数学名著译丛

数学物理方法 I

〔德〕R.柯朗　D.希尔伯特 著
钱敏　郭敦仁 译

科学出版社

(O-4317.0101)

数学名著译丛

拓扑空间论
代数特征值问题
数学概观
常微分方程
数学与猜想
代数几何
数学 —— 它的内容，方法和意义
非线性与泛函分析
微积分和数学分析引论
代数数理论讲义
非线性及泛函分析 —— 数学分析中的非线性问题讲义
数学的发现 —— 对解题的理解、研究和讲授
代数拓扑基础
博大精深的素数
环与模范畴
代数几何引论
代数学 I
代数学 II
控制论(或关于在动物和机器中控制和通信的科学)(第二版)
微分几何基础（第一卷）
一般拓扑学
能量分析攻击
线性算子理论
数学物理方法 I

www.sciencep.com



ISBN 978-7-03-031361-4

科学出版中心 数理分社
电话：(010) 64033664
E-mail：math-phy@mail.sciencep.com

销售分类建议：高等数学

定 价：88.00 元

数学名著译丛

数学物理方法 I

〔德〕 R. 柯 朗 D. 希尔伯特 著

钱 敏 郭敦仁 译

科 学 出 版 社

北 京

PDG

内 容 简 介

本书系一经典名著.

本书系统地提供了为解决各种重要物理问题所需的基本数学方法. 全书分三卷出版. 卷Ⅰ内容包括：线性代数和二次型、任意函数的级数展开、线性积分方程、变分法、振动和本征值问题、变分法在本征值问题上的应用以及本征值问题所定义的特殊函数.

本书可以作为高等学校“数学物理”课程的教本；对理论物理学工作者，它也是一本有用的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法 Ⅰ/(德)柯朗，(德)希尔伯特著；钱敏，郭敦仁译. —北京：科学出版社，2011

(数学名著译丛)

ISBN 978-7-03-031361-4

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①柯… ②希… ③钱… ④郭… Ⅲ. ①数学物理方法 Ⅳ. ①O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 104979 号

责任编辑：陈玉琢 汪 操／责任校对：李 影

责任印制：钱玉芬／封面设计：陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 6 月第 一 版 开本：B5 (720 × 1000)

2011 年 6 月第一次印刷 印张：29 3/4

印数：1—2 500 字数：576 000

定价：88.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

中译本前言

柯朗和希尔伯特所著《数学物理方法》一书, 德文第二版发行于 1930 年. 1953 年出版了英文本. 在内容上, 英文本有些增加, 因此译文大体以英文本为基础. 可是无论在措辞或字句的含义上, 英文本都出了不少错误, 因此在翻译过程中, 译者不得不经常参照德文本, 加以改正. 第 1 章翻译时, 英文本尚未出版, 所以翻译以德文本为根据, 后来又参照英文本修改过.

译　者



英文版原序摘译

本书第一卷德文第一版于 1924 年在柏林出版, 第二版于 1930 年出版, 第二卷于 1938 年出版. 这本英文版是依据德文本写成的, 但有大部分增加和修改.

本书对于数学家和物理学家有同样的用处. 本书目的还是如同第一次德文版序言中所写的:"从十七世纪以来, 物理的直观, 对于数学问题和方法是富有生命力的根源. 然而近年来的趋向和时尚, 已将数学与物理学间的联系减弱了; 数学家离开了数学的直观根源, 而集中在推理精致和着重于数学的公设方面, 甚至有时忽视数学与物理学以及其他科学领域的整体性. 在许多情况下, 物理学家也不再体会数学家的观点. 这种分裂, 无疑地对于整个科学是一个严重的威胁; 科学发展的洪流, 可以逐渐分裂成为细小而又细小的溪渠, 以至干涸. 因此, 有必要引导我们的努力转向于将许多有特点的和各式各样的科学事实的共同点及其相互关联加以阐明, 以重新统一这种分离的趋向. 只有这样, 才可以使学者们掌握这些材料, 从而为研究工作更进一步的有机发展准备下基础.

"本书就是针对这个目的为供学习数学物理而作的. 本书发展了起源于物理问题的数学方法, 并试图使这些结果纳入统一的数学理论. 作者并未企图做得完备, 只是希望本书可以便利于读者接近一个丰富而重要的领域."

"本书的责任由我个人担负. 可是, 本书加上我的老师、同事和朋友 D. 希尔伯特的名字, 这是正当的, 盖因从希尔伯特的一些论文和讲义中采取了许多材料, 并且希望本书表现一些希尔伯特的精神, 这种精神在数学研究和教学上具有决定性的影响."

R. 柯朗

1953 年 6 月于纽约

目　　录

第 1 章　线性代数和二次型

在本卷内我们要处理许多数学分析的问题, 它们是和线性变换和二次型的理论紧密地联系着的; 因此我们在第一章中先简短地复习一下这个部分的某些方面, 假定读者对于这些问题已有一般的知识.

1.1　线性方程和线性变换

1.1.1　矢量

为了简短地叙述线性方程论的结果, 最适当的是引进矢量计算中的符号[1]. 我们称一组 n 个实数 $x_1, \cdots, x_n$ 为一个 n 维矢量或 n 维空间的一个矢量, 而用相应的黑体字母 $\boldsymbol{x}$ 来简单地表示它. $x_i (i = 1, \cdots, n)$ 这些数叫做矢量 $\boldsymbol{x}$ 的*分量*. 如果所有的分量皆为零, 那么我们称该矢量为*零矢量*. 在 $n = 2$ 或 $n = 3$ 的情形, 矢量在几何上可以解释为由坐标原点引向以 x_i 为直角坐标的那一点的“位矢”. 在 $n > 3$ 的情形, 不可能再有几何直观; 不过几何的语言依然适用.

给定两个任意的实数 λ 和 μ, 我们定义 $\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$ 为一个矢量, 它的分量 z_i 由 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的分量 x_i, y_i 按照关系 $z_i = \lambda x_i + \mu y_i$ 线性组合而成. 由此, 作为特例, 我们已给出了两个矢量的和及差的定义.

矢量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的“*内积*” $(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})$ 表示一个数:

$$(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = y_1 x_1 + \cdots + y_n x_n = (\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x})^{2)}. \tag{1}$$

有时候我们也称内积 $(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})$ 为*矢量 $\boldsymbol{y}$ 对 $\boldsymbol{x}$ 的分量*, 反过来说也一样.

如果内积 $(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})$ 为零, 我们就说 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 互相垂直或*正交*; 在 $n = 2$ 和 $n = 3$ 的情形, 这种说法具有直接的直观意义. 一个矢量和它自己的内积 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^2$ 有其特殊的地位, 我们称之为该矢量的*范数*. $\boldsymbol{x}^2$ 的正平方根叫做矢量 $\boldsymbol{x}$ 的*值*或*长度*, 而记作 $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\boldsymbol{x}^2}$. 长度为 1 的矢量叫做*规一化矢量*或*单位矢量*.

对两个矢量 $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_n)$ 和 $\boldsymbol{b} = (b_1, \cdots, b_n)$ 的内积 $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$ 而言, 以下不等式成立:

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 \leqslant \boldsymbol{a}^2 \boldsymbol{b}^2,$$

---

1) 这里我们只涉及一种简短的表示法, 而不是真正来讲矢量分析或是它在 n 维空间的推广, 这方面研究的中心问题是关于一些不变量的寻求.

2) 有时记作 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ 而不用括号.

或者不用矢量写法,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right),$$

其中等号当且仅当 a_i 和 b_i 成比例时方才成立, 这时候关系 $\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b} = 0$ 成立, 其中 $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$.

上述"施瓦茨不等式"1) 的证明可以由这样的论点得出, 就是二次方程

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i x + b_i)^2 = x^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2x \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = 0$$

对于未知数 x 来说永远不会有两个不同的实根, 而必须有两个虚根, 除非 a_i 和 b_i 成比例; 施瓦茨不等式无非是把这事实用二次方程的判别式表出而已. 施瓦茨不等式的另一个证明可由下面的恒等式直接得出:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(a_j b_k - a_k b_j)^2.$$

矢量 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ 称为彼此**线性独立**, 假如不可能找到一组数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$(不全等于零) 使矢量方程

$$\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{x}_m = 0$$

成立, 也就是说使左边矢量的各个分量都为零. 如果情形不是如此, 我们就称这些矢量为**线性相关的**.

在 n 维空间, 具有分量

$$\begin{matrix} 1 & 0\cdots 0, \\ 0 & 1\cdots 0, \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0\cdots 1 \end{matrix}$$

的 n 个矢量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 组成一组 n 个线性独立的矢量. 因为假如存在一个关系 $\lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{e}_2 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{e}_n = 0$, 于是只要乘以 $\boldsymbol{e}_h$ 则由于 $\boldsymbol{e}_h^2 = 1$, $(\boldsymbol{e}_h \cdot \boldsymbol{e}_k) = 0 (h \neq k)$ 就得出 $\lambda_h = 0$. 因此一组 n 个线性独立的矢量 (在 n 维空间) 总是存在的. 可是在 $n+1$ 个矢量 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_{n+1}$($n$ 维空间的) 之间, 就至少有一个系数不全为零的线性关系存在:

$$\mu_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \mu_{n+1} \boldsymbol{u}_{n+1} = 0,$$

1) 这个关系在施瓦茨之前已为柯西所用过.

因为 $n+1$ 个未知数 $\mu_1,\cdots,\mu_{n+1}$ 的 n 个齐次线性方程

$$\sum_{i=1}^{n+1} u_{ik}\mu_i = 0 \quad (k=1,\cdots,n)$$

总有一组非平庸解 (见 1.1.3 小节).

1.1.2 正交矢量组、完备性

上述“坐标矢量”$\boldsymbol{e}_i$ 是一组特殊的“正交单位矢量”. 单位矢量的意义在上面已经讲过. 一般说来, 所谓一组 n 个正交单位矢量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 就是这样一组矢量, 它们满足下列条件

$$\boldsymbol{e}_h^2 = 1, \quad \boldsymbol{e}_h\cdot\boldsymbol{e}_k = 0 \quad (h\neq k),$$

其中 $h,k=1,2,\cdots,n$. 完全和上面一样, 我们知道这 n 个矢量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是彼此线性独立的.

设 $\boldsymbol{x}$ 为一任意矢量, 则由于 $n+1$ 个矢量的线性相关性, 以下关系必然成立:

$$c_0\boldsymbol{x} - c_1\boldsymbol{e}_1 - \cdots - c_n\boldsymbol{e}_n = 0,$$

其中系数 c_i 不都等于零. 又由于各 $\boldsymbol{e}_i$ 线性独立, c_0 不能为零, 因此可取它为 1. 由此可见, 任一矢量 $\boldsymbol{x}$ 可以用一组正交单位矢量表为

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n. \tag{2}$$

系数 c_i 的值, 也就是“$\boldsymbol{x}$ 相对于矢量组 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 的分量”, 可由 (2) 式乘以 $\boldsymbol{e}_i$ 而得出

$$c_i = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e}_i.$$

给了任意一组 m 个线性独立的矢量 $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_m$, 我们可以通过以下施密特的正交化步骤得出一组 m 个正交单位矢量 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_m$.

我们令 $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{v}_1/|\boldsymbol{v}_1|$. 然后选择两个不同时为零的数 c_1' 和 c_2' 使 $c_1'\boldsymbol{e}_1+c_2'\boldsymbol{v}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_1$ 正交, 也就是使 $c_1'+c_2'(\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{e}_1)=0$. 由于 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 线性独立, 同样 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 也线性独立, 所以矢量 $c_1'\boldsymbol{e}_1+c_2'\boldsymbol{v}_2$ 不等于零; 将这个矢量用它的范数除一除, 我们就得到正交于矢量 $\boldsymbol{e}_1$ 的单位矢量 $\boldsymbol{e}_2$. 然后我们再定出三个不全等于零的数 c_1'', c_2'', c_3'', 使 $c_1''\boldsymbol{e}_1+c_2''\boldsymbol{e}_2+c_3''\boldsymbol{v}_3$ 和 $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_2$ 相正交, 也就是使 $c_1''+c_3''(\boldsymbol{v}_3\boldsymbol{e}_1)=0$ 以及 $c_2''+c_3''(\boldsymbol{v}_3\boldsymbol{e}_2)=0$. 矢量 $c_1''\boldsymbol{e}_1+c_2''\boldsymbol{e}_2+c_3''\boldsymbol{v}_3$ 同样也不等于零, 因此可以把它规一化. 这样一来我们就得到 $\boldsymbol{e}_3$. 按这样的步骤继续做下去, 我们最后得到所要求的正交组.

若 $m < n$, 我们就说所得到的是一个非完备的正交组, 若 $m = n$, 我们说这是一个完备的正交组. 若仍以 $c_1, \cdots, c_m$ 表示一矢量 $\boldsymbol{x}$ 相对于 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m$ 的分量, 则显然, 有关系

$$(\boldsymbol{x} - c_1\boldsymbol{e}_1 - \cdots - c_m\boldsymbol{e}_m)^2 \geqslant 0.$$

将左边矢量的平方按适用于矢量的代数运算法则计算出来, 就得到

$$\boldsymbol{x}^2 - 2\boldsymbol{x}\sum_{i=1}^{m} c_i\boldsymbol{e}_i + \sum_{i=1}^{m} c_i^2 = \boldsymbol{x}^2 - 2\sum_{i=1}^{m} c_i^2 + \sum_{i=1}^{m} c_i^2 \geqslant 0$$

或者

$$\boldsymbol{x}^2 \geqslant \sum_{i=1}^{m} c_i^2, \tag{3}$$

其中 $m \leqslant n$, $c_i = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}_i)$. $m = n$ 时则等号生效:

$$\boldsymbol{x}^2 = \sum_{i=1}^{m} c_i^2. \tag{4}$$

最后两个关系中包含了毕达哥拉斯定理的矢量表示式, 它在 $n \leqslant 3$ 时有直接的直观意义; 我们称前者为贝塞尔不等式, 后者为完备性关系. 事实上, 如果对任意矢量而言 (4) 皆成立, 那就说明所给的正交组是完备的; 因为对一个正交于 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m$ 的规一化矢量而言, (4) 不能成立, 而当 $m < n$ 时这样的矢量必然是存在的.

此外, 我们可以把完备性关系用一种更一般的形式来表示:

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}' = \sum_{i=1}^{m} c_i c_i', \tag{5}$$

这很容易由 $\boldsymbol{e}$ 的正交性得出.

所有这些代数关系都是纯形式的. 它们之所以具有深刻的含义是由于它们在分析的超越性问题中以完全类似的姿态出现, 而且那时候这些关系就不再是显见的了.

1.1.3 线性变换、矩阵

系数为 a_{ik} 的一组 n 个线性方程

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= y_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots& \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= y_n, \end{aligned} \tag{6}$$

对于每一组 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的值, 规定一组确定的值 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 与之对应. 我们称这样的对应为由 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的一个**线性变换**, 或者简称为由矢量 $\boldsymbol{x}$ 到矢量 $\boldsymbol{y}$ 的线性变换. 变换之所以为线性是由于矢量 $\lambda_1\boldsymbol{y}_1 + \lambda_2\boldsymbol{y}_2$ 对应于矢量 $\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2$.

线性变换中最重要的问题是逆变换的问题, 换句话说, 是解一个线性方程组的问题. 下述线性方程论中的主要定理给出了这问题的解答, 我们假定这个定理的证明为已知:

设有方程组

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = y_n,
\end{aligned}
$$

或简写为

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = y_i \quad (i = 1, \cdots, n). \tag{7}$$

在 a_{ik} 给定时, 只有下面两种可能: 或者对任意给的矢量 $\boldsymbol{y}$ 而言方程皆具有唯一的一组解 $\boldsymbol{x}$, 特别地当 $\boldsymbol{y} = 0$ 时有解 $\boldsymbol{x} = 0$; 或者由 (7) 中 $\boldsymbol{y} = 0$ 所得的齐次方程组有正数 ρ 个非平庸的 (不恒等于零的) 彼此线性独立的解 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_\rho$, 这些解我们假定已经规一化. 在后一种情形下, "转置"方程组

$$\sum_{k=1}^{n} a'_{ik}x'_k = 0 \quad (i = 1, \cdots, n), \tag{8}$$

(其中 $a'_{ik} = a_{ki}$) 也正好有 ρ 个线性无关的非平庸解 $\boldsymbol{x}'_1, \cdots, \boldsymbol{x}'_\rho$. 对于满足 ρ 个关系: $(\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}'_1) = 0, \cdots, (\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}'_\rho) = 0$, 而且也只对于满足这些关系的矢量 $\boldsymbol{y}$(也就是说和 $\boldsymbol{x}'_1, \cdots, \boldsymbol{x}'_\rho$ 正交的那些矢量), 非齐次方程组 (7) 才有解 (许多个), 这些解彼此之间相差的是齐次方程组的一个任意解.

在以上基本定理的表述中我们避免了引用行列式的理论. 至于行列式, 我们只在以后要把方程组的解用式子明显表示出来的时候才会用到.

上述线性变换的主要性能可由方程组 (7) 的系数或其"矩阵" A 表达出来:

$$A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{9}$$

行列式为

$$A=|a_{ik}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

有时候把线性变换本身 (亦称张量或算子) 用一个特定的字母 $\boldsymbol{A}$ 来表示是很方便的. $\boldsymbol{A}$ 的元素 a_{ik} 叫做张量的分量. 我们可以把线性变换 (7) 认为是张量 $\boldsymbol{A}$ 和矢量 $\boldsymbol{x}$ 的“*相乘*”, 且用符号写为

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{y}.$$

许多“*线性代数*”中的结果, 在我们引进一些所谓*矩阵计算*的简单定义和法则后, 就可以用矩阵或张量简洁地加以表述. 我们首先要有的是矩阵相乘的概念, 为此我们假定上述方程 (7) 中被变换的矢量 $\boldsymbol{x}$ 是另一个以 b_{ik} 为分量的张量 $\boldsymbol{B}$ 和矢量 $\boldsymbol{w}$ 的乘积; 因此 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 可以通过线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} b_{kj}w_j = x_k \quad (k=1,\cdots,n)$$

联系起来, 方程组的矩阵为 $B=(b_{ik})$, 于是 $\boldsymbol{y}$ 也可以由 $\boldsymbol{w}$ 和一张量 $\boldsymbol{C}$ 相乘而得出. $\boldsymbol{C}$ 的矩阵 C 则由 A 和 B 按照“矩阵乘法”的规则作出:

$$C=AB,$$

出就是说, 元素 c_{ij} 是 A 中 i 行和 B 中 j 列的内积:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{jk} \quad (i,j=1,\cdots,n). \tag{10}$$

因此我们称张量或变换 $\boldsymbol{C}$ 为*张量或变换* $\boldsymbol{A}$ *和* $\boldsymbol{B}$ *的内积*, 或简称之为积. 今后我们对张量及与之等效的矩阵不加区分. 我们应该注意矩阵乘积服从*结合律*

$$(AB)C=A(BC),$$

因此任意多个矩阵按一定顺序的乘积 $A_1A_2\cdots A_h$ 具有确定的意义. 在 $A_1=A_2=\cdots=A_h=A$ 的情形我们把这乘积写为矩阵 A 的 h 次幂. 另一方面, 我们必须注意乘法的*交换律*一般说来*并不成立*, 因此有必要区别 A 和 B 的*前乘*和*后乘*, 一般说来 AB 和 BA 是不同的. 最后我们定义 $\lambda A+\mu B$ 为这样一个矩阵, 它的分量是 $\lambda a_{ik}+\mu b_{ik}$; 顾名思义则须定义零矩阵为所有的分量皆等于零的矩阵[1]. 此外我们

1) 在矩阵计算中须注意由矩阵方程式 $AB=(0)$并得不出其中的一个因子 A 或 B 为零的结论, 这可以由 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ 的例子看出.

很容易知道分配律成立:

$$(A+B)C = AC + BC.$$

为此, 我们还须要引入"**单位矩阵**"

$$E = (e_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

它有这样的性质, 就是对任意矩阵 A 而言, 方程

$$AE = EA = A$$

成立. 单位矩阵相应于**恒等变换**, 即由方程

$$x_i = y_i \quad (i = 1, \cdots, n)$$

所给的变换. 我们定义任一个矩阵 A 的零次幂为

$$A^0 = E.$$

有了一个矩阵的幂 A^h 的定义, 我们同样可以定义变量为一矩阵的多项式. 如果

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$$

为一以 x 为变数的 m 次多项式, 则我们也由方程

$$f(A) = a_0 E + a_1 A + \cdots + a_m A^m$$

定义矩阵 $f(A)$ 为矩阵 A 的多项式. A 的函数 $f(A)$ 这个矩阵的定义有时候又可以推广到函数不可能用多项式来表示的情形. 例如 e^A 这个矩阵就是用方程

$$B = e^A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A^\nu}{\nu!}$$

来定义的. 这样的级数应该如此了解, 就是我们先只求其前 N 项的和, 然后再研究是否在这样形成的矩阵中 n^2 个元素中的任一个当 N 增大时都是收敛的; 在收敛的情形, 由 n^2 个极限值所形成的矩阵就是级数的和. 在矩阵 e^A 这种特殊情形, 往后可以证明收敛性总是成立的.

假如我们取函数 $f(A)$ 为一"几何级数", 我们可以得出一个特别重要的矩阵关系. 令

$$S_m = E + A + A^2 + \cdots + A^m.$$

以 A 乘 S_m 的定义式, 我们就得到关系式

$$S_m A + E = S_m + A^{m+1},$$

从而有

$$S_m(E - A) = E - A^{m+1}.$$

如果当 m 增大时矩阵 S_m 趋于一个极限, A^{m+1} 就趋于零, 于是我们得到由无穷几何级数

$$S = E + A + A^2 + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} A^{\nu} = f(A)$$

所定义的矩阵 S 所满足的关系式

$$S(E - A) = E.$$

矩阵的几何级数, 有时候称为矩阵的*诺伊曼级数*, 何时收敛的问题, 我们在下一章再细讲.

我们完全可以像处理普通的 x 的多项式一样, 来对矩阵的多项式作运算. 例如由两个含 x 的多项式的恒等就可以得出相应的关于任意矩阵 A 的恒等式. 因此相应于恒等式

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 4 \equiv (x^2 + 1)(x + 2) + (2x + 2),$$

有对任意矩阵 A 皆成立的关系

$$A^3 + 2A^2 + 3A + 4E \equiv (A^2 + E)(A + 2E) + (2A + 2E),$$

同样由因子分解式

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m = a_m(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_m)$$

—— 其中 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 是多项 $f(x)$ 的根 —— 就有矩阵式

$$f(A) = a_0 E + a_1 A + \cdots + a_m A^m = a_m(A - x_1 E)(A - x_2 E)\cdots(A - x_m E),$$

它对任意 A 皆成立.

对每一个以 a_{ik} 为分量的矩阵 A, 我们可以有同它关联的若干别的矩阵, 这里我们允许矩阵的元素为复数. 设 $\bar{a}_{ik}$ 为 a_{ik} 的共轭复数, 我们称 $\bar{A} = (\bar{a}_{ik})$ 为 A 的共轭矩阵; 此外我们称矩阵 $A' = (a_{ki})$, 即由 A 转置相应行列而形成的矩阵, 为 A 的转置矩阵; 最后称 $A^* = \bar{A}' = (\bar{a}_{ki})$ 为 A 的共轭转置矩阵; 这个矩阵是通过把元素换为其共轭复数然后转置行列而做成的.

由直接验算知有关系式

$$(AB)' = B'A'.$$

一个矩阵, 如果对它说来有 $A = A'$, 则称它为**对称的**; 一个实矩阵称为**正交的**, 如果

$$AA' = E.$$

一般说来, 对复矩阵若有

$$AA^* = E,$$

我们称它为复正交的.

由行列式的理论和线性变换 (7) 知, 若对任意 y_i 皆可求逆, 则须有而且只须有行列式 $\mathrm{A} = |a_{ik}|$ 不为零. 若 A 不为零, 解答是唯一确定的, 而且可由相应的方程组

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} \check{a}_{ik} y_k \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{11}$$

表示, 其中

$$\check{a}_{ik} = \frac{\mathrm{A}_{ki}}{\mathrm{A}}, \tag{12}$$

而 A_{ki} 是矩阵 A 中属于元素 a_{ki} 的余因子. 矩阵 $\check{A} = (\check{a}_{ik})$ 叫做 A 的**逆矩阵**, 它的特征在于

$$\check{A}A = A\check{A} = E.$$

我们用符号 A^{-1} 来代替这个唯一确定的矩阵 $\check{A}$; A^{-1} 的行列式的值为 A^{-1}. 因此在矩阵计算的语言中, 我们可以把行列式不为零的矩阵 A 所代表的线性方程组的求解用一个矩阵 $B = A^{-1}$ 来表述, B 满足关系

$$AB = BA = E.$$

1.1.4 双线型、二次型和埃尔米特型

为了要清楚地了解线性方程 (7), 我们利用和该方程组等价的, 属于矩阵 A 的**双线型**, 在做这个双线型

$$A(u, x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} u_i x_k \tag{13}$$

时, 我们把在方程 (7) 左边 $x_1, \cdots, x_n$ 的线性方乘以变量 $u_1, \cdots, u_n$, 然后相加; 这样一来由方程 (7) 我们就得到一个 u 的恒等式

$$A(u, x) = E(u, y), \tag{14}$$

这里 $E(u,y)=\sum_{i=1}^{n}u_iy_i$ 是单位矩阵的双线型, 或单位双线型. 矩阵为 A 和 B 的两个双线型$A(u,x),B(u,x)$ 的形式乘积 是一个矩阵为 $C=AB$ 的双线型 $C(u,x)$; 我们又常把 h 次幂 $A^h(u,x)$ 称为 h 重型. 矩阵为 A^{-1} 的“逆双线型”, 根据行列式理论的定理可表为

$$A^{-1}(u,x)=-\frac{A(u,x)}{A}, \tag{15}$$

其中令

$$A(u,x)=\begin{vmatrix} o & u_1 & \cdots & u_n \\ x_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=-\sum_{i,k=1}^{n}A_{ik}x_iu_k.$$

对称线性变换对我们特别有意义, 所谓对称性即条件 $a_{ki}=a_{ik}$ 所表述的特性. 研究对称变换时, 我们只要考虑二次型

$$A(x,x)=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}x_ix_k \quad (a_{ki}=a_{ik}),$$

就够了, 在双线型中设 $u_i=x_i$ 就可以得出以上式子. 因为由一个二次型 $A(x,x)$ 可以得出一个对称双线型

$$\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}u_ix_k=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}u_i\frac{\partial A(x,x)}{\partial x_i}=\frac{A(x+u,x+u)-A(x,x)-A(u,u)}{2},$$

我们称它为属于二次型 $A(x,x)$ 的极型.

若 $A(u,x)=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}u_ix_k$ 为一任意非对称的双线型 (系数为实数), 则 $AA'(u,x)$ 和 $A'A(u,x)$ 恒为对称双线型; 亦即有

$$AA'(u,x)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ik}x_i\sum_{i=1}^{n}a_{ik}u_i\right)$$

以及

$$A'A(u,x)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k\sum_{j=1}^{n}a_{ij}u_j\right).$$

与此对应可以作二次型

$$AA'(x,x)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ik}x_i\right)^2$$

和

$$A'A(x,x)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k\right)^2.$$

这些二次型平方之和的特性是其值不能为负. 这样的二次型叫做**正定二次型**.

埃尔米特型是二次型的推广, 对许多问题说来都很重要的. 它是这样一个双线型

$$A(u,x)=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}u_ix_k,$$

其中系数 a_{ik} 可为复数, 而满足条件

$$a_{ik}=\bar{a}_{ki}.$$

因此当 u_i 和 x_i 互为共轭复数时, 埃尔米特型取实数值. 我们通常把埃尔米特型表为

$$H(x,\bar{x})=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}x_i\bar{x}_k=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ki}\bar{x}_ix_k.$$

和一任意复系数双线型

$$A(u,x)=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}u_ix_k$$

相对应, 有一个埃尔米特型

$$AA^*(x,\bar{x})=A\bar{A}'(x,\bar{x})=\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n}a_{ik}x_i\right|^2,$$

同样有

$$A^*A(x,\bar{x})=\bar{A}'A(x,\bar{x})=\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\bar{x}_i\right|^2.$$

假如我们在一双线型

$$A(x,y)=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}x_iy_k$$

内用矩阵为 C 和 B 的两个变换

$$x_i=\sum_{k=1}^{n}c_{ik}\zeta_k \quad 和 \quad y_i=\sum_{k=1}^{n}b_{ik}\eta_k$$

更换变数, 则有

$$A(x,y)=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}x_iy_k=\sum_{i,j,k,l=1}^{n}a_{ik}c_{ij}b_{kl}\zeta_j\eta_l=\sum_{j,l=1}^{n}p_{jl}\zeta_j\eta_l;$$

$$p_{jl}=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}c_{ij}b_{kl}.$$

因此 A 变换成这样一个双线型, 其矩阵为

$$(p_{jl})=C'AB,$$

矩阵的行列式根据行列式乘法定理等于 $\mathrm{AB\Gamma}$. 特别地, 若 A 为二次型

$$K(x,x)=\sum_{p,q=1}^{n}k_{pq}x_px_q,$$

其对称矩阵为 $K=(k_{pq})$, 行列式为 $\mathrm{K}=|k_{pq}|$, 则令 $C=B$, 经过双数 x 的更换, 我们得到对称矩阵 $C'KC$, 其行列式为 $\mathrm{K\Gamma}^2$.

1.1.5 正交变换和复正交变换

现在我们要来作这样一件工作, 就是建立一种线性变换 L

$$x_p=\sum_{q=1}^{n}l_{pq}y_q=L_p(y)\quad(p=1,\cdots,n),\tag{16}$$

其矩阵为 $L=(l_{pq})$, 行列式为 $\Lambda=|l_{pq}|$, 而且它是"正交的", 也就是说它把单位二次型

$$E(x,x)=\sum_{p=1}^{n}x_p^2$$

仍旧变为它自己, 因此关系

$$E(x,x)=E(y,y)\tag{17}$$

对 y_p 说来为恒等式.

应用我们的变换于二次型 $A(x,x)=E(x,x)$, (17) 所表示的要求给出了变换 L 为正交的充要条件, 即方程

$$L'EL=L'L=LL'=E;\quad L'=L^{-1};\tag{18}$$

因此一个正交变换的转置矩阵和其逆矩阵一致, 从而知方程 (16) 的解

$$y_p=\sum_{q=1}^{n}l_{qp}x_q=L'_p(x).\tag{19}$$

也给出一个正交变换. 由此可见, 正交变换可由本章 1.1.3 小节中所定义的正交矩阵给出. 正交条件详细写出来, 是

$$\sum_{\nu=1}^{n} l_{\nu p}^2 = 1, \quad \sum_{\nu=1}^{n} l_{\nu p} l_{\nu q} = 0 \quad (q \neq p) \tag{20}$$

或

$$\sum_{\nu=1}^{n} l_{p\nu}^2 = 1, \quad \sum_{\nu=1}^{n} l_{p\nu} l_{q\nu} = 0 \quad (q \neq p). \tag{21}$$

把 (18) 式中的矩阵换为行列式, 首先我们可以看出 $|L|^2 = 1$, 因此正交变换的行列式等于 $+1$ 或 -1; 其次可以看出, 一任意二次型的行列式在正交变换下不变.

为了要将正交变换用矢量符号表示, 我们令坐标矢量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 变换为一组 n 个互相正交的单位矢量 $\boldsymbol{I}_1, \boldsymbol{I}_2, \cdots, \boldsymbol{I}_n$. 于是矢量 $\boldsymbol{x}$ 可表为

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n = y_1\boldsymbol{I}_1 + y_2\boldsymbol{I}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{I}_n.$$

用 $\boldsymbol{e}_p$ 乘两边可得 $x_p = \sum\limits_{q=1}^{n} y_q(\boldsymbol{e}_p\boldsymbol{I}_q)$; 因此我们有

$$l_{pq} = \boldsymbol{e}_p \cdot \boldsymbol{I}_q.$$

由 (18) 可得对两个任意双线型和一个正交变换的矩阵 A, B 和 L 成立的关系 $L'(AB)L = (L'AL)(L'BL)$, 这告诉我们: 施正交变换于二次型的形式乘积时, 可以将其中的两个因子分别作正交变换. 从而作为特例可得: 二互逆二次型经过正交变换后仍为互逆二次型.

将以上讨论推广于埃尔米特型

$$H(x, \bar{x}) = \sum_{p,q=1}^{n} h_{pq} x_p \bar{x}_q.$$

就引到所谓*复正交变换*, 复正交变换

$$x_p = \sum_{q=1}^{1} l_{pq} y_q$$

是这样一种变换 (系数 l_{pq} 为复数), 它把*单位埃尔米特型*

$$\sum_{p=1}^{n} |x_p|^2 = \sum_{p=1}^{n} x_p \bar{x}_p$$

依然变为单位型, 因此有

$$\sum_{p=1}^{n}|x_p|^2=\sum_{p=1}^{n}|y_p|^2.$$

完全和上面一样, 可以得到以 L 为矩阵的变换是复正交变换的充要条件, 这就是下列的矩阵式:

$$LL^*=L^*L=E,$$

这里 $L^*=\bar{L}'$ 是 L 的共轭转置矩阵. L 必须是一个复正交矩阵. 复正交性条件详细写出来, 是

$$\sum_{\nu=1}^{n}|l_{\nu p}|^2=1,\quad \sum_{\nu=1}^{n}l_{\nu p}\bar{l}_{\nu p}=0\quad (q\neq p) \tag{22}$$

或者

$$\sum_{\nu=1}^{n}|l_{p\nu}|^2=1,\quad \sum_{\nu=1}^{n}l_{p\nu}\bar{l}_{q\nu}=0\quad (q\neq p). \tag{23}$$

复正交变换的行列式的绝对值为 1, 这一点从方程式 $LL^*=E$ 也可以立刻看出.

1.2 含线性参数的线性变换

在许多问题中会遇到以下形式的线性变换方程组:

$$x_i-\lambda\sum_{k=1}^{n}t_{ik}x_k=y_i\quad (i=1,\cdots,n), \tag{24}$$

其中 λ 是一个参数 (可以取复数值). 和它相关的双线型是 $E(u,x)-\lambda T(u,x)$ 其中 $T(u,x)$ 的矩阵为 (t_{ik}). 按照前一节所讲的, 解这个方程组就相当于求矩阵为 R 的逆双线型 $R(u,y;\lambda)$, 这个 R 满足方程式 $(E-\lambda T)R=E$. 我们知道, 这个逆矩阵当且仅当行列式 $|E-\lambda T|$ 不为零时才存在.

让我们来考虑行列式 $|E-\lambda T|$ 的零点, 或者当 $\kappa=1/\lambda\neq 0$ 时, 也可以考虑行列式 $|T-\kappa E|$ 的零点. 显然, $|T-\kappa E|$ 为 κ 的 n 级多项式. 所以存在 n 个 κ 的值 (即多项式的零点) 使二次型 $R(u,y;\lambda)$ 不存在. 这些值 κ_i 叫做 T 对单位矩阵 E 而言的"特征值,""固有值,"或"本征值"; 它们形成矩阵 T 所谓的谱[1].

由于方程式 (24) 的特殊结构, 很容易使我们想到用逐次逼近法来求它们的解, 在使用这种方法时, 我们在方程

$$x_i=y_i+\lambda\sum_{k=1}^{n}t_{ik}x_k$$

---

1) 有时候也把使 $E-\lambda T$ 的逆不存在的 λ 值 $\lambda_i=1/ki$ 叫做谱. 我们将称这些值为"逆谱", 而称 λ_i 为"逆本征值".

内, 将 x_k 再用

$$y_k+\lambda\sum_{j=1}^{n}t_{kj}x_j$$

来代, 这样一步一步做下去. 这个步骤若利用关系 $R=E+\lambda TR$ 写出来时, 形式最为清楚, 我们依次有

$$R=E+\lambda TR=E+\lambda T+\lambda^2T^2R=E+\lambda T+\lambda^2T^2+\lambda^3T^3R=\cdots.$$

我们得到 R 的一个无穷级数表达式

$$R=E+\lambda T+\lambda^2T^2+\lambda^3T^3+\cdots,$$

这个级数 —— 假定收敛 —— 事实上就是矩阵 $E-\lambda T$ 的逆. 要看出这一点, 只需将级数乘以 $E-\lambda T$, 而且注意在级数收敛的情形可以将形式乘法逐项运算. 不难看出, 表示式

$$R=(E-\lambda T)^{-1}=E+\lambda T+\lambda^2T^2+\cdots$$

在形式上是和一般的几何级数完全一样的 (试和前面所讲的比较, 我们只要令那里的 $A=\lambda T$, 就可以得到形式上的一致).

若将原先的方程组不用矩阵而用相关的二次型表示为

$$E(u,x)-\lambda T(u,x)=E(u,y),$$

那么解答就立刻可以用完全对称的形式写为

$$E(u,y)+\lambda \mathrm{T}(u,y;\lambda)=E(u,x),$$

这里我们令

$$\mathrm{T}(u,y;\lambda)=T+\lambda T^2+\lambda^2T^3+\cdots=\frac{R(u,y;\lambda)-E(u,y)}{\lambda}.$$

我们称 T 为 T 的*预解式*.

很容易证明以上 R 或 T 的"*诺伊曼级数*"在 $|\lambda|$ 充分小时的收敛的.

令 M 为 t_{ik} 的绝对值的上界, 则 $T^2,T^3,\cdots,T^h$ 各双线型的系数的绝对值依次有上界 $nM^2,n^2M^3,\cdots,n^{h-1}M^h$. 因此我们可得

$$(M+\lambda nM^2+\lambda^2n^2M^3+\cdots)(|u_1|+\cdots+|u_n|)(|y_1|+\cdots+|y_n|)$$

为诺伊曼级数的长级数. 这个长级数在 $|\lambda|<\dfrac{1}{nM}$ 时是收敛的. 因此当 $|\lambda|$ 充分小

时上述诺伊曼级数也是收敛的, 事实上它就表示 $T(u,x)$ 的预解式[1].

上面所作的估计同时也指出了这样的事实, 就是我们在任意一个处处收敛的 x 的幂级数 $f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu x^\nu$ 中, 可以用任意矩阵 A 来代 x, 这样得到的是一个矩阵 $f(A)=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu A^\nu$. 因此作为特例, 矩阵 e^A 恒存在.

上面所得到的 R 和 T 的表示式只在 $|\lambda|$ 足够小时方才收敛, 可是我们由上节的公式 (15) 可以得到一个逆双线型或矩阵 $R=(E-\lambda T)^{-1}$ 的表示式, 它在级数的收敛区域之外也是有意义的. 把二次型 $E-\lambda T$ 看作公式中的 $A(u,x)$, 立即可得其逆型的表示式为

$$R(u,y;\lambda)=-\frac{\Delta(u,y;\lambda)}{\Delta(\lambda)},$$

而预解式 T 的表示式则为

$$\mathrm{T}(u,y;\lambda)=-\frac{\Delta(u,y;\lambda)}{\lambda\Delta(\lambda)}-\frac{1}{\lambda}E(u,y),$$

这里

$$\Delta(u,y;\lambda)=\begin{vmatrix}0 & u_1 & \cdots & u_n\\ y_1 & 1-\lambda t_{11} & \cdots & -\lambda t_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ y_n & -\lambda t_{n1} & \cdots & 1-\lambda t_{nn}\end{vmatrix}$$

---

1) 上面作出的上界级数当 n 增大时, 其收敛范围显然越来越窄. 现在让我们来证明: 在把以上估计稍加修改后, 我们很容易得到一个与 n 无关的收敛上界的估计, 这样一来, 这个估计就可以适用于无限多个变数的推广情形. 我们用 $t_{ik}^{(\nu)}$ 表示矩阵 T^ν 的元素, 而令 $\sum_{\alpha=1}^{n}|t_{p\alpha}^{(1)}|=z_p$, 设 M 为 n 个数 z_p 的上界, 则可用归纳法证明: $\sum_{q=1}^{n}|t_{pq}^{(\nu)}|\leqslant M^\nu$; 于是对任意 ν 以及 $p,q=1,2,\cdots,n$ 而言, 有

$$|t_{pq}^{(\nu)}|\leqslant M^\nu.$$

由此很容易看出诺伊曼级数在 $|\lambda|<\frac{1}{M}$ 时是收敛的. 这样我们就找到了一个不显含 n 的上界.

现在我们要对任意 ν 来证明上面写出的不等式. 先假定已证明它在 $\nu-1$ 时是成立的, 就有

$$\begin{aligned}\sum_{q=1}^{n}|t_{pq}^{(\nu)}|&=\sum_{q=1}^{n}\left|\sum_{\alpha=1}^{n}t_{p\alpha}^{(1)}t_{\alpha_q}^{(\nu-1)}\right|\leqslant\sum_{q=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n}|t_{p\alpha}^{(1)}||t_{\alpha_q}^{(\nu-1)}|\\ &=\sum_{\alpha=1}^{n}|t_{p\alpha}^{(1)}|\left(\sum_{q=1}^{n}|t_{\alpha_q}^{(\nu-1)}|\right)\leqslant\overline{M}^{\nu-1}\sum_{\alpha=1}^{n}|t_{p\alpha}^{(1)}|\leqslant\overline{M}^{\nu}.\end{aligned}$$

当 $\nu=1$ 时, 不等式成立, 因此已证明它对任意 ν 皆成立.

以及

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda t_{11} & -\lambda t_{12} & \cdots & -\lambda t_{1n}\\ -\lambda t_{21} & 1-\lambda t_{22} & \cdots & -\lambda t_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -\lambda t_{n1} & -\lambda t_{n2} & \cdots & 1-\lambda t_{nn}\end{vmatrix}$$

是 λ 的 $(n-1)$ 次和 n 次有理整函数. 因此多项式 $\Delta(\lambda)$ 的根就组成上面所定义的 T 的逆谱, 也就是, 所有使 $E-\lambda T$ 没有逆的 λ 之值.

通过公式

$$T+\lambda T^2+\lambda^2T^3+\cdots=-\frac{\Delta(u,y;\lambda)}{\lambda\Delta(\lambda)}-\frac{1}{\lambda}E(u,y),$$

左边那不能直接看出其性质而且不是对所有 λ 的值都收敛的级数, 可以解析开拓到整个 λ 平面上去. 逆型 R 和预解式 T 都是 λ 的有理函数, 它们的极点可由双线型 T 的谱定出.

把行列式 $\Delta(u,y;\lambda)$ 和 $\Delta(\lambda)$ 依照行列式理论的法则按 λ 的方次展开, 我们得到表示式

$$\begin{aligned}\Delta(u,y;\lambda)=&\Delta_1(u,y)-\lambda\Delta_2(u,y)+\lambda^2\Delta_3(u,y)-\cdots\\&+(-1)^n\lambda^{n-1}\Delta_n(u,y),\\ \Delta(\lambda)=&1-\lambda\Delta_1+\lambda^2\Delta_2-\cdots+(-1)^n\lambda^n\Delta_n,\end{aligned}$$

其中

$$\Delta_h(u,y)=\sum\begin{vmatrix}0 & u_{p_1} & \cdots & u_{p_h}\\ y_{p_1} & t_{p_1p_1} & \cdots & t_{p_1p_h}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ y_{p_h} & t_{p_hp_1} & \cdots & t_{p_hp_h}\end{vmatrix},$$

$$\Delta_h=\sum\begin{vmatrix}t_{p_1p_1} & t_{p_1p_2} & \cdots & t_{p_1p_h}\\ t_{p_2p_1} & t_{p_2p_2} & \cdots & t_{p_2p_h}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ t_{p_hp_1} & t_{p_hp_2} & \cdots & t_{p_hp_h}\end{vmatrix}.$$

求和时 $p_1,p_2,\cdots,p_h$ 为各种可能的由 1 到 n 的正整数，且 $p_1<p_2<\cdots<p_h$.

若不用参数 λ 而引进其倒数 $\kappa=\dfrac{1}{\lambda}$, 往往有许多方便之处. 这时候我们所要考

虑的是双线型 $\kappa E - T$, 其行列式

$$\begin{vmatrix} \kappa - t_{11} & -t_{12} & \cdots & -t_{1n} \\ -t_{21} & \kappa - t_{22} & \cdots & -t_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -t_{n1} & -t_{n2} & \cdots & \kappa - t_{nn} \end{vmatrix} = \varphi(\kappa)$$

是 κ 的 n 次有理函数, 它的根 $\kappa_1, \cdots, \kappa_n$ 就是 $\Delta(\lambda)$ 诸根之倒数, 也就是 T 的本征值. 对所有不同于 $\kappa_1, \cdots, \kappa_n$ 的 κ 值, 逆型 $(\kappa E - T)^{-1}$ 存在, 而当 $|\kappa|$ 的值充分大时有诺伊曼展开式如下:

$$(\kappa E - T)^{-1} = \frac{E}{\kappa} + \frac{T}{\kappa^2} + \frac{T^2}{\kappa^3} + \cdots.$$

从这展开式可得一值得注意的结论. 由上面的讨论显然上式左端是 κ 的有理函数, 其分母为 $\varphi(\kappa)$; 所以 $\varphi(\kappa)(\kappa E - T)^{-1}$ 须为 κ 的整有理型, 若按 κ 的幂展开时它不包含负的幂次. 因此, 我们若以 $\varphi(\kappa) = \kappa^n + c_1\kappa^{n-1} + \cdots + c_n$ 乘上方程, 在右边所得的结果中所有 κ 的负幂次的系数须为零. 可是立刻可以看出, κ^{-1} 的系数为 $T^n + c_1 T^{n-1} + \cdots + c_n E$, 因此我们得到以下为盖利所发现的定理: *若以 $\varphi(\kappa)$ 表示 $\kappa E - T$ 的行列式, 则矩阵 T 满足关系*

$$\varphi(T) = 0.$$

有关本征值 $\kappa_1, \kappa_2, \cdots, \kappa_n$ 的谱的另一重要事实可表为以下定理:

若矩阵 T 的本征值为 $\kappa_1, \kappa_2, \cdots, \kappa_n$, $g(x)$ 为 x 的任意多项式, 则矩阵$g(T)$的本征值为$g(\kappa_1), g(\kappa_2), \cdots, g(\kappa_n)$.

证明时我们从下列关系开始:

$$|\kappa E - T| = \varphi(\kappa) = \prod_{\nu=1}^{n} (\kappa - \kappa_\nu),$$

这是一个关于 T 的恒等式. 我们所要得的是关系

$$|\kappa E - g(T)| = \prod_{\nu=1}^{n} (\kappa - g(\kappa_\nu)).$$

设 $h(x)$ 为一 r 级的任意多项式, 可用其零点 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 写为

$$h(x) = a \prod_{\rho=1}^{r} (x - x_\rho),$$

PDG

则恒等式

$$h(T) = a \prod_{\rho=1}^{r} (T - x_\rho E)$$

对任意矩阵 T 皆成立. 考虑在这方程中诸矩阵的行列式, 我们得到

$$\begin{aligned}|h(T)| &= a^n \prod_{\rho=1}^{r} |T - x_\rho E| = (-1)^{nr} a^n \prod_{\rho=1}^{r} |x_\rho E - T| \\ &= (-1)^{nr} a^n \prod_{\rho=1}^{r} \varphi(x_\rho) = (-1)^{nr} a^n \prod_{\rho=1}^{r} \left(\prod_{\nu=1}^{n} (x_\rho - \kappa_\nu) \right) \\ &= (-1)^{nr} (-1)^{nr} a^n \prod_{\nu=1}^{n} \left(\prod_{\rho=1}^{r} (\kappa_\nu - x_\rho) \right) = \prod_{\nu=1}^{n} h(\kappa_\nu).\end{aligned}$$

如果现在设 $h(T)$ 为函数 $\kappa E - g(T)$, 就立刻得到所要求的方程

$$|\kappa E - g(T)| = \prod_{\nu=1}^{n} (\kappa - g(\kappa_\nu)).$$

1.3 二次型和埃尔米特型的主轴变换

把二次型

$$K(x, x) = \sum_{p,q=1}^{n} k_{pq} x_p x_q$$

化为平方和

$$K(x, x) = \sum_{p=1}^{n} \kappa_p y_p^2$$

的线性变换 $x = Z(y)$ 在代数中是极其重要的. 我们特别感兴趣的是利用正交变换

$$x_p = \sum_{q=1}^{n} l_{qp} y_q = L_p(y) \quad (p = 1, \cdots, n)$$

把 $K(x, x)$ 化为平方和的形式. 这一类的变换叫做*主轴变换*.

1.3.1 根据极大值原理作主轴变换

让我们先来断定, 对任意给的二次型 $K(x, x)$ 总可能有一个主轴变换. 为此我们利用魏尔斯特拉斯定理：限定在有限闭域内的多个变数的连续函数在该区域内

某处取极大值[1].

根据这条定理, 存在一个单位矢量 $\boldsymbol{l}_1$, 其分量为 $l_{11}, l_{12}, \cdots, l_{1n}$, 使得当 $x_1 = l_{11}, \cdots, x_n = l_{1n}$ 时, $K(x,x)$ 在条件

$$\sum_{p=1}^{n} x_p^2 = \mathbf{1} \tag{25}$$

下取极大值 κ_1. 从几何上来看, 矢量 $\boldsymbol{l}_1$ 在"单位球"(25) 上代表这样一个点 P, 使得包含 P 点的二次曲面 $K(x,x) = \text{const.}$ 在 P 点和单位球相切.

此外还存在一个和 $\boldsymbol{l}_1$ 正交的矢量 $\boldsymbol{l}_2$, 其分量为 $l_{21}, \cdots, l_{2n}$, 使得当 $x_1 = l_{21}, \cdots, x_n = l_{2n}$ 时, $K(x,x)$ 在条件 (25) 以及条件

$$\sum_{p=1}^{n} l_{1p} x_p = 0 \tag{26}$$

下取极大值 κ_2, 由 $\boldsymbol{l}_1$ 所解决的对整个球的问题现在变为对单位球和垂直于 $\boldsymbol{l}_1$ 的"平面"(26) 的交"线"的问题, 而由 $\boldsymbol{l}_2$ 来解决.

此外, 还存在一个和 $\boldsymbol{l}_1$ 及 $\boldsymbol{l}_2$ 正交的矢量 $\boldsymbol{l}_3$, 分量为 $l_{31}, l_{32}, \cdots, l_{3n}$, 使得当 $x_i = l_{3i}$ $(i = 1, \cdots, n)$ 时, $K(x,x)$ 在条件 (25),(26) 以及条件

$$\sum_{p=1}^{n} l_{2p} x_p = 0 \tag{27}$$

下取极大值 κ_3. 这样继续作下去, 我们得到一组 n 个互相正交的矢量 $\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2, \cdots, \boldsymbol{l}_n$, 称为"**主轴矢量**"或"**本征矢量**". 按 (21) 这些矢量的分量 l_{qp} 决定一正交变换

$$x_p = \sum_{q=1}^{n} l_{qp} y_q \quad (p = 1, \cdots, n); \tag{28}$$

这个变换就是我们的问题的解.

因为方程 (28) 的解为

$$y_p = \sum_{q=1}^{n} l_{pq} x_q \quad (p = 1, \cdots, n), \tag{29}$$

---

1) 主轴变换又可以用直接的代数方法来完成. 我们要求的是一个正交矩阵 L, 使 $L'KL = D$ 为一对角矩阵, 其对角线元素为 $\kappa_1, \kappa_2, \cdots, \kappa_n$. 由关系 $KL = LD$ 可得矩阵元素 l_{qi} 的方程

$$\sum_{q=1}^{n} k_{pq} l_{qi} = l_{pi} \kappa_i,$$

由这组方程可得 κ_i 为后面方程 (30) 的根 (见 22 页). 然后根据简单的代数论据我们可以作出一正交组, 其中包含 n^2 个数 l_{qi}. 在本书中所采用的方法较代数法为佳, 因为我们可以把它推广而用于后面的一类超越问题.

方程 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{l}_p$ 就相当于说 $u_p=1$, $y_q=0$ $(q\neq p)$. 因此, 特别地当 $y_1=1$, $y_2=0,\cdots,y_n=0$ 时就达到极大值 κ_1; 所以在变换后的二次型

$$C(y,y)=\sum_{p,q=1}^{n}c_{pq}y_py_q=K(x,x)$$

中, 第一个系数 c_{11} 等于 κ_1. 此外, 二次型

$$H(y,y)=\sum_{p,q=1}^{n}h_{pq}y_py_q=C(y,y)-\kappa_1(y_1^2+\cdots+y_n^2)$$

不能取正值, 因为由于 κ_1 的极大性, $H(y,y)$ 当 $\sum\limits_{p=1}^{n}x_p^2=\sum\limits_{p=1}^{n}y_p^2=1$ 时为非正的, 于是对所有使 $\sum\limits_{p=1}^{n}y_p^2\neq 0$ 的 y_i 而言它是非正的. 现在假设 y_1 在表示式 $H(y,y)$ 中出现, 例如, 若 $h_{12}=h_{21}$ 不为零, 那么令

$$y_1=1,\quad y_2=\varepsilon,\quad y_3=\cdots=y_n=0$$

我们就可以使 $H(y,y)$ 有值

$$2h_{12}\varepsilon+h_{22}\varepsilon^2=\varepsilon(2h_{12}+h_{22}\varepsilon).$$

适当地选择 ε 就可以使上式为正.

因此我们证明了在变换后 $K(x,x)$ 化为

$$C(y,y)=\kappa_1y_1^2+C_1(y,y),$$

其中 $C_1(y,y)$ 为 $n-1$ 个变数 $y_2,y_3,\cdots,y_n$ 的二次型. 若附加条件 $y_1=0$, 则变换后的二次型等于 $C_1(y,y)$. 同前我们可以断定 $C_1(y,y)$ 的形式为 $\kappa_2y_2^2+C_2(y,y)$, 其中 $C_2(y,y)$ 只依赖于 $n-2$ 个变数 $y_3,y_4,\cdots,y_n$ 而依次类推.

因此我们证明了可能有主轴变换使

$$\sum_{p,q=1}^{n}k_{pq}x_px_q=\sum_{p=1}^{n}\kappa_py_p^2,\quad \sum_{p=1}^{n}x_p^2=\sum_{p=1}^{n}y_p^2.$$

可以看出, 对应的极小问题同样可以作为我们证明的出发点; 也就是说, 我们可以在附加条件 $E(x,x)=1$ 之下求 $K(x,x)$ 的极小值. 在这种情形下, 我们将在相反的次序下得到 $\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_n$ 这些量. 我们也可以保持 $K(x,x)$ 为常数而求 $E(x,x)$ 极大或极小; 于是所得极小值 λ_i 将为 κ_i 的倒数.

1.3.2　本征值

现在我们来证明在上小节中作为逐次极大所定出的 κ_i 值和 1.2 节中所引进的本征值是等同的.

κ_i 这些数所满足的方程

$$\varphi(\kappa) = (\kappa - \kappa_1)(\kappa - \kappa_2)\cdots(\kappa - \kappa_n) = 0$$

可写为这样的形式:

$$\begin{vmatrix} \kappa - \kappa_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \kappa - \kappa_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \kappa - \kappa_n \end{vmatrix} = 0.$$

可是这个行列式恰好是二次型

$$\kappa \sum_{p=1}^{n} y_p^2 - \sum_{p=1}^{n} \kappa_p y_p^2$$

的行列式, 而这个二次型可从用正交变换于二次型

$$\kappa \sum_{p=1}^{n} x_p^2 - K(x, x)$$

得到. 所以关系式

$$\begin{vmatrix} \kappa - \kappa_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \kappa - \kappa_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \kappa - \kappa_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \kappa - k_{11} & -k_{12} & \cdots & -k_{1n} \\ -k_{21} & \kappa - k_{22} & \cdots & -k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -k_{n1} & -k_{n2} & \cdots & \kappa - k_{nn} \end{vmatrix}$$

是 κ 的恒等式. 因此 κ_i 这些数是以 κ 为未知数的代数方程

$$\begin{vmatrix} k_{11} - \kappa & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} - \kappa & \cdots & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} - \kappa \end{vmatrix} = 0 \tag{30}$$

的根; 也就是说, 它们是 1.2 节中引进的本征值.

导出以上结果的方法贝尔身就证明了当 k_{pq} 为满足条件 $k_{pq} = k_{qp}$ 的任意实数时, 方程 (30) 的根必然是实的[1]. 顺便我们还可以指出, 本征值倒数的绝对值在几

1) 方程 (30) 常称为久期方程, 因为它出现在行星轨道的摄动问题中. 关于本征值为实数的直接证明可参看第 3 章的 3.4.2 节.

何上的意义为 n 维空间的曲面 $K(x,x)=1$ 的主轴之长的平方. 假如至少有一个本征值等于零, 我们就说二次型为"退化的"; 可以把它表为一少于 n 个变数的二次型. 由方程 (30) 可以看出退化的充要条件为 $|k_{pq}|$ 等于零. 若欲 $K(x,x)$ 为正定的, 则充要条件为 $\kappa_p>0,\ p=1,2,\cdots,n$.

假设已给二次型 $K(x,x)$ 对主轴的表示式

$$K(x,x)=\sum_{p=1}^{n}\kappa_p y_p^2.$$

于是利用以前讨论过的乘积的正交变换的性质, 很容易得到屡次型的表达式为

$$K^2(x,x)=\sum_{p=1}^{n}\kappa_p^2 y_p^2,\quad K^3(x,x)=\sum_{p=1}^{n}\kappa_p^3 y_p^2,\cdots.$$

因此 h 重屡次型 $K^h(x,x)$ 的本征值是 $K(x,x)$ 的本征值的 h 次方; 而且我们还可以看到对 h 为偶数而言, 二次型 $K^h(x,x)$ 是正定的.

1.3.3 推广于埃尔米特型

对埃尔米特型可以用完全同样的方法作主轴变换. 以 $H=\overline{H}'$ 为矩阵的埃尔米特型

$$H(x,\bar{x})=\sum_{p,q=1}^{n}h_{pq}x_p\bar{x}_q$$

恒可用一复正交变换

$$L:x_p=\sum_{q=1}^{n}l_{qp}y_q$$

化为以下形式:

$$H(x,\bar{x})=\sum_{p=1}^{n}\kappa_p y_p\bar{y}_p=\sum_{p=1}^{n}\kappa_p|y_p|^2,$$

其中所有系数 κ_p 都是实的. 这些本征值 κ_m 依然是在附加条件

$$\sum_{p=1}^{n}|x_p|^2=1\quad 及\quad \sum_{p=1}^{n}l_{ip}\bar{x}_p=0\quad(i=1,\cdots,m-1)$$

之下, 埃尔米特型 $H(x,\bar{x})$ 的极大值.

1.3.4 二次型的惰性定理

假如我们放弃线性变换为正交的要求, 就可以用许多不同的变换把一个二次型变为平方和. 特别地, 在作了上述正交变换后, 任何把各个变数简单地乘一个比例

因子的变换都将保持二次型为平方和的特性不变. 因此, 有可能这样来变换二次型, 使得所有的系数 (实的) 取值为 $+1$ 或 -1. 于此, 下述二次型的惰性定理成立:

用非奇异实线性变换把二次型化为形式 $\sum c_p z_p^2$ 之后, 正负系数的个数不因变换的不同而异.

证明: 可以依次使正负系数等于 $+1$ 和 -1. 现在假设二次型 $K(x,x)$ 由两种不同的变换化为 $y_1^2+\cdots+y_r^2-y_{r+1}^2-\cdots-y_n^2$ 以及 $z_1^2+\cdots+z_s^2-z_{s+1}^2-\cdots-z_n^2$, 其中 $r<s$. 于是我们有

$$y_1^2+\cdots+y_r^2+z_{s+1}^2+\cdots+z_n^2=y_{r+1}^2+\cdots+y_n^2+z_1^2+\cdots+z_s^2.$$

试看 $y_1=\cdots=y_r=z_{s+1}=\cdots=z_n=0$ 的情形, 这意味着其余的 y_i 也为零. 我们想像 z_i 由 y_i 表出, 而把这些条件看做 y_i 的一组少于 n 个的方程, 我们就得到矛盾 —— 即存在一个非零的矢量解.

1.3.5　二次型的预解式的表示

二次型 $K(x,x)$ 的预解式可以用一种有启发意义的方式表示出来. 按照 1.2 节, 预解式可由以下形式方程定义:

$$K(x,x;\lambda)=\frac{[E(x,x)-\lambda K(x,x)]^{-1}-E(x,x)}{\lambda}.$$

假设 $K(x,x)$ 已化为

$$K(x,x)=\sum_{p=1}^{n}\frac{y_p^2}{\lambda_p}.$$

$\sum\limits_{p=1}^{n}y_p^2/\lambda_p$ 的预解式一定和 $K(x,x)$ 的预解式等同, 因为施行变换后 $[E(x,x)-\lambda K(x,x)]^{-1}$ 须为

$$\left[E(y,y)-\lambda\sum_{p=1}^{n}\frac{y_p^2}{\lambda_p}\right]^{-1}.$$

于是有下列关系:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda}\left[\left(\sum_{p=1}^{n} y_p^2-\lambda\sum_{p=1}^{n}\frac{y_p^2}{\lambda_p}\right)^{-1}-E(y,y)\right]\\
&=\frac{1}{\lambda}\left[\left(\sum_{p=1}^{n}\frac{\lambda_p-\lambda}{\lambda_p}y_p^2\right)^{-1}-E(y,y)\right]\\
&=\frac{1}{\lambda}\left[\sum_{p=1}^{n}\frac{\lambda_p}{\lambda_p-\lambda}y_p^2-E(y,y)\right]\\
&=\frac{1}{\lambda}\left[\sum_{p=1}^{n}\frac{\lambda_p}{\lambda_p-\lambda}y_p^2-\sum_{p=1}^{n}y_p^2\right]=\sum_{p=1}^{n}\frac{y_p^2}{\lambda_p-\lambda}.
\end{aligned}$$

假如现在我们变换回变数 x_p, 在 (19) 的记法就得到表示式

$$K(x,x;\lambda)=\sum_{p=1}^{n}\frac{[L_p'(x)]^2}{\lambda_p-\lambda}. \tag{31}$$

因此, 对双线型而言, 我们有

$$K(u,x;\lambda)=\sum_{p=1}^{n}\frac{L_p'(u)L_p'(x)}{\lambda_p-\lambda}. \tag{32}$$

从这个表示式顺带地可以看出有理函数 $K(u,x;\lambda)$ 在 λ_p 点的留数等于 $-L_p'(u)\cdot L_p'(x)$, 此处设 $p\neq q$ 时 $\lambda_p\neq\lambda_q$.

1.3.6 与二次型相联属的线性方程组的解

最后我们将利用本征矢量来给出线性方程组

$$x_p-\lambda\sum_{q=1}^{n}k_{pq}x_q=y_p \quad (p=1,\cdots,n) \tag{33}$$

的解, 此方程组与二次型

$$K(x,x)=\sum_{p,q=1}^{n}k_{pq}x_px_q$$

相关. 对变数 x_i 和 y_i 运用主轴变换

$$x_p=\sum_{q=1}^{n}l_{qp}u_q,\quad y_p=\sum_{q=1}^{n}l_{qp}v_q,$$

$K(x,x)$ 就变为

$$\sum_{q=1}^{n}\kappa_q u_q^2,$$

而双线型 $K(x,z)$ 也经过一类似的变换. 因此, 我们的方程组 (33) 变为

$$u_p - \lambda\kappa_p u_p = v_p \quad (p = 1, \cdots, n). \tag{34}$$

这组方程的解为

$$u_p = \frac{v_p}{1-\lambda\kappa_p} = \frac{v_p}{1-\dfrac{\lambda}{\lambda_p}} = \frac{\lambda_p}{\lambda_p - \kappa} v_p. \tag{35}$$

用原先的变数来写, 我们得到与上式相等当的解的公式

$$\boldsymbol{x} = \sum_{p=1}^{n} \frac{\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{l}_p}{1-\dfrac{\lambda}{\lambda_p}} \boldsymbol{l}_p; \tag{36}$$

这里, 解答表现为依 $K(x,x)$ 的本征矢量 $\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2, \cdots, \boldsymbol{l}_n$ 的展开, 其中我们采用了记号 $\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{l}_p = \sum_{q=1}^{n} l_{pq} y_q$.

主轴矢量或本征矢量 $\boldsymbol{l}_p$ 本身是齐次方程

$$x_q - \lambda_p \sum_{r=1}^{n} k_{qr} x_r = 0$$

或

$$u_q - \lambda_p \kappa_q u_q = 0 \quad (q = 1, \cdots, n)$$

的规一化解. 假如当 $q \neq p$ 时所有的 κ_q 和 $\kappa_q = \lambda_p$ 不同, 那就只存在一个规一化解,

$$u_p = 1,$$
$$u_q = 0 \quad (q \neq p)$$

或

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{l}_p.$$

假如数个本征数重合, 则主轴矢量就不是唯一确定的.

1.4　本征值的极小–极大性

1.4.1　用极小–极大问题表征本征值

在上面的讨论中, 我们解了一系列极大问题而得到本征值, 这一系列中的每一个问题依赖于它前面诸问题的解. 现在我们要指出, 每一本征值可以作为一个稍微不同的问题的解直接定出, 而毋需牵涉到前面各问题的解.

这问题就是要在条件 (25)

$$\sum_{p=1}^{n} x_p^2 = 1$$

之下来求二次型

$$K(x,x) = \sum_{p,q=1}^{n} k_{pq} x_p x_q$$

的极大, 并要求它满足 $h-1$ 个方程

$$\sum_{p=1}^{n} \alpha_{\nu p} x_p = 0 \quad (\nu = 1, \cdots, h-1; h \leqslant n). \tag{37}$$

自然, $K(x,x)$ 的极大值是参数 $\alpha_{\nu p}$ 的函数. 现在我们选择 $\alpha_{\nu p}$ 使得这极大取最小的可能值. 我们说, 极大的这个极小值就正好是 $K(x,x)$ 的第 h 个本征值 κ_h, 假定我们已把本征值由大至小顺序排列起来, 即 κ_1 为最大本征值, κ_2 次之, 等等.

事实上, 主轴变换把 $K(x,x)$ 变为

$$\sum_{p=1}^{n} \kappa_p y_p^2 \quad (\kappa_1 \geqslant \cdots \geqslant \kappa_n),$$

把条件 (25) 变为

$$\sum_{p=1}^{n} y_p^2 = 1, \tag{38}$$

而把 (37) 变为

$$\sum_{p=1}^{n} \beta_{\nu p} y_p = 0 \quad (\nu = 1, \cdots, h-1; h \leqslant n), \tag{39}$$

其中 $\beta_{\nu p}$ 为新参数. 假如我们令

$$y_{h+1} = \cdots = y_n = 0,$$

方程 (39) 就变为包含未知数 $y_1, y_2, \cdots, y_h$ 的 $h-1$ 个方程, 而必定有一组满足 (38) 的 y_i 值满足这些方程. 对这些值而言我们有

$$K(x,x) = \kappa_1 y_1^2 + \cdots + \kappa_h y_h^2 \geqslant \kappa_h (y_1^2 + \cdots + y_n^2) = \kappa_h.$$

因此对任何一组值 $\beta_{\nu p}$ 而言所要求的 $K(x,x)$ 的极大不小于 κ_h; 可是假如我们取 (39) 为方程

$$y_1 = \cdots = y_{h-1} = 0,$$

它就恰好等于 κ_h. 因此得到:

二次型 $K(x,x)$ 的第 h 个本征值 κ_h 是 $K(x,x)$ 所能取的极大中的最小值, 如果在讨论极大时除条件

$$\sum x_p^2 = 1$$

之外还附加 $h-1$ 个联系 x_p 的任意齐次线性方程.

1.4.2 应用、约束

根据这个普通本征值的极小–极大的独立性质, 很容易看出, 如果在变数间加上 j 个独立的约束

$$\sum_{p=1}^{n} \gamma_{sp} x_p = 0 \quad (s=1,\cdots,j) \tag{40}$$

而把 $K(x,x)$ 化为一有 $n-j$ 个独立变数的二次型 $\widetilde{K}(x,x)$ 之后, 本征值有些什么变化. 第 h 个本征值 $\widetilde{\kappa}_h$ 与求 κ_h 时一样可以由同样的极小–极大问题求出, 其中数组 x_i 所可取的值的集合由于 (40) 的限制而变小. 因此, 所求的极大, 也就是说 $\widetilde{K}(x,x)$ 的本征值, 决不会超过对 $K(x,x)$ 而言相应的量.

此外, 假如在 (25) 之外再给 x_p 加上 $h+j-1$ 个线性齐次条件, 则 κ_{j+h} 为 $K(x,x)$ 所能有的最小极大; 因此 κ_{j+h} 一定不大于 $\widetilde{\kappa}_h$, 因为对后者而言有 j 个条件由确定的方程 (40) 给出.

因此我们有定理如下: 若 n 个变数的二次型由 j 个线性齐次约束而化为 $n-j$ 个变数的二次型 $\widetilde{K}(x,x)$, 则 $\widetilde{K}(x,x)$ 的本征值 $\widetilde{\kappa}_1,\widetilde{\kappa}_2,\cdots,\widetilde{\kappa}_{n-j}$ 不大于序列 $\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_{n-j}$ 中相应的数值, 而不小于序列 $\kappa_{j+1},\kappa_{j+2},\cdots,\kappa_n$ 中相应的数值[1].

特别地, 假如我们令 $j=1$ 而取约束条件为 $x_n=0$, 则二次型 K 变为其 $(n-1)$ 级"截口", 而我们得到定理如下: *$(n-1)$ 级截口的第 h 个本征值最多等于原二次型的第 h 个本征值, 而最少等于它的第 $h+1$ 个本征值.*

假如把这定理用于二次型的 $(n-1)$ 级截口, 则得到对 $(n-2)$ 级截口而言的相应的一条定理, 且可依此类推. 一般说来, 我们可以看出二次型相继二截口的本征值可按上述方式参插.

此外, 我们还可以断定: *假如在 $K(x,x)$ 上加一正定型, 其和的本征值不小于相应的 $K(x,x)$ 的本征值.*

我们也可以不用极小–极大问题来表征本征值, 而用*极大–极小问题*. 这时候本征值出现的次序将反一反.

埃尔米特型的本征值的极小–极大性, 我们留给读者去加以叙述并证明.

---

1) 由几何可以这样解释这一点: 考虑椭球面和通过其中心的平面相交出的椭圆. 这个椭圆的长轴之长在椭球的最长和次长轴之间, 而椭圆的短轴之长则在椭球的次长轴和最短轴之间.

1.5 补充材料及问题

1.5.1 线性独立性及格拉姆行列式

对于给定的 m 个矢量 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m$ 线性相关的问题可以不必定其分量矩阵的秩而按以下方式简单地来判断：我们考虑二次型

$$G(x,x) = (x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_m\boldsymbol{v}_m)^2 = \sum_{i,k=1}^{m} (\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_k) x_i x_k.$$

显然 $G(x,x) \geqslant 0$ 而矢量 $\boldsymbol{v}_i$ 线性相关的充分和必要条件是：存在一组 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的值满足 (25)

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1,$$

并使 $G(x,x) = 0$. 因此假如矢量 $\boldsymbol{v}_i$ 线性相关, 在条件 (25′) 之下二次型 $G(x,x)$ 的极小值须等于零. 可是这个极小值恰好是二次型 $G(x,x)$ 的最小本征值, 即方程

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{v}_1^2 - \kappa & (\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2) & \cdots & (\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_n) \\ (\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_1) & \boldsymbol{v}_2^2 - \kappa & \cdots & (\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\boldsymbol{v}_m \cdot \boldsymbol{v}_1) & (\boldsymbol{v}_m \cdot \boldsymbol{v}_2) & \cdots & \boldsymbol{v}_m^2 - \kappa \end{vmatrix} = 0 \tag{41}$$

最小的根.

故有下述定理：

矢量 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m$ 线性相关的充分与必要条件为“格拉姆行列式”

$$\varGamma = \begin{vmatrix} \boldsymbol{v}_1^2 & (\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2) & \cdots & (\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_m) \\ (\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_1) & \boldsymbol{v}_2^2 & \cdots & (\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\boldsymbol{v}_m \cdot \boldsymbol{v}_1) & (\boldsymbol{v}_m \cdot \boldsymbol{v}_2) & \cdots & \boldsymbol{v}_m^2 \end{vmatrix} \tag{42}$$

等于零.

由 (41) 可得 $\varGamma$ 的另一表示式. $G(x,x)$ 的本征值 (皆非负)$\kappa_1, \kappa_2, \cdots, \kappa_m$ 满足方程 (41), 若把 (41) 的左端按 κ 的幂次展开, 则不依赖于 κ 的一项等于 $\varGamma$, κ^m 的系数则等于 $(-1)^m$. 根据熟知的代数定理就有

$$\varGamma = \kappa_1 \kappa_2 \cdots \kappa_m. \tag{43}$$

因此任意矢量组的格拉姆行列式为非负. 在关系式

$$\Gamma=|(\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_k)|\geqslant 0\quad(i,k=1,\cdots,m)\tag{44}$$

中等号只对线性相关的矢量 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_m$ 成立, 这个式子是施瓦茨不等式

$$\boldsymbol{v}_1^2\boldsymbol{v}_2^2-(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2)^2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{v}_1^2 & (\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2)\\ (\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{v}_1) & \boldsymbol{v}_2^2\end{vmatrix}\geqslant 0$$

的推广.

格拉姆行列式的值, 或者二次型 $G(x,x)$ 的最小本征值 κ_m 乃是矢量 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_m$ 线性独立性的度量. 这个数越小, 由矢量 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_m$ 所决定的 m 维多面体就越扁; 假如它等于零, 则多面体退化成至多为 $(m-1)$ 维的多面体. 此外我们还可以给格拉姆行列式以简单的几何意义. 它等于由矢量 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_m$ 所决定的 m 维多面体体积的平方. 例如, 当 $m=2$ 时, 它是 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 所作成的三角形面积的两倍的平方.

线性相关的格拉姆判别法自然须和通常的判别法等当. 后者是这样叙述的: 矢量组线性相关时必须而且只须所有由分量矩阵

$$\begin{matrix}v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n}\\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ v_{m1} & v_{m2} & \cdots & v_{mn}\end{matrix}$$

中 m 列所作成的行列式皆等于零. 而事实上, 按照熟知的行列式论的定理,

$$\Gamma=\sum\begin{vmatrix}v_{1s_1} & v_{1s_2} & \cdots & v_{1s_m}\\ v_{2s_1} & v_{2s_2} & \cdots & v_{2s_m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ v_{ms_1} & v_{ms_2} & \cdots & v_{ms_m}\end{vmatrix}^2\tag{45}$$

其中的和数是对所有由 1 到 n 而满足 $s_1<s_2<\cdots<s_m$ 的整数 $s_1,s_2,\cdots,s_m$ 来求的.

1.5.2 行列式的阿达马不等式

具有实元素 a_{ik} 的任一行列式

$$A=|a_{ik}|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

皆满足不等式

$$A^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2.$$

证明：令元素 a_{ik} 变化而保持平方和

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = c_i^2 \quad (i = 1, \cdots, n)$$

不变, 若 $A_{\max}^2$ 为在上述 n 个条件下 a_{ik} 的函数 A^2 的极大值 —— 这样的极大的存在可由魏尔斯特拉斯定理立刻得出 —— 则在 $A_{\max}$ 中每一行的元素必须与其相应的余子式成正比. 因为当 h 固定时我们有

$$A = a_{h1}A_{h1} + \cdots + a_{hn}A_{hn};$$

而由施瓦茨不等式

$$A^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_{hk}^2 \sum_{k=1}^{n} A_{hk}^2 = c_h^2 \sum_{k=1}^{n} A_{hk}^2.$$

若 a_{hk} 和 A_{hk} 不成比例则不等号成立, A^2 自然不能取其极大值. 因为这时候适当地改变 a_{hk} 这 n 个量 $(k = 1, \cdots, m)$, 同时使 c_h^2 和 A_{hk} 保持为常数, 就可以使行列式的平方等于式子的右端.

现在假如我们将 $A_{\max}$ 自乘, 按照行列式的乘法定理, 我们得到

$$A_{\max}^2 = \prod_{i=1}^{n} c_i^2,$$

因为由于行列式的初等定理和刚才证明的比例性, $A_{\max}$ 不同的两列的内积等于零. 因此原有的行列式满足阿达马不等式

$$A^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n} c_i^2 = \prod_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2.$$

阿达马不等式的几何意义是：在 n 维空间有定长的 n 个矢量所作成的多面体的体积当诸矢量互相正交时为最大.

若把 A 和 a_{ik} 代之以其绝对值, 则阿达马不等式对 a_{ik} 为复数的情形依然正确.

1.5.3 正则变换的广义处理

为了推广和对分析上许多问题的应用, 下述对两个二次型同时作正则变换的简明处理方法最为适当. 我们依然考虑在 n 维矢量空间 (其矢量为 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \cdots$) 的两个

二次型

$$H(x,x)=\sum_{p,q=1}^{n}h_{pq}x_px_q, \tag{46a}$$

(假设为正定的), 以及

$$K(x,x)=\sum_{p,q=1}^{n}k_{pq}x_px_q, \tag{46b}$$

(不一定是正定的) 作为定义, 我们把 $H(x,x)$ 解释为矢量 $\boldsymbol{x}$ 的长度的平方, 而把极式

$$H(x,y)=(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\sum_{p,q=1}^{n}h_{pq}x_py_q$$

解释为 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的内积. 问题就在于找一个线性变换

$$x_p=\sum_{q=1}^{n}l_{pq}y_q \quad (p=1,\cdots,n),$$

它把 K 和 H 变为平方和

$$K(x,x)=\sum_{p=1}^{n}\rho_py_p^2, \quad H(x,x)=\sum_{p=1}^{n}y_p^2.$$

要找这个变换, 并不需要写出二次型 K 和 H 的显式; 我们的证明仅基于 H 和 K 的下述性质, 就是它们乃是矢量 $\boldsymbol{x}$ 的连续函数, 而当 λ 和 μ 为任意常数时, 以下形式的方程成立:

$$H(\lambda x+\mu y,\lambda x+\mu y)=\lambda^2H(x,x)+2\lambda\mu H(x,y)+\mu^2H(y,y), \tag{47}$$

$$K(\lambda x+\mu y,\lambda x+\mu y)=\lambda^2K(x,x)+2\lambda\mu K(x,y)+\mu^2K(y,y), \tag{48}$$

而且 H 为正定的, 只有在 $\boldsymbol{x}=0$ 时为零.

我们考虑一系列的极大问题: 首先我们定义一个矢量 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^1$, 对它说来商式

$$K(x,x)/H(x,x)$$

达到其极大值 ρ_1. 矢量 $\boldsymbol{x}$ 可以规一化. 而不影响上述商的值, 也就是说它满足条件 $H(x,x)=1$.

然后我们定义另一个规一化的矢量 $\boldsymbol{x}^2$, 对它说来商式 $K(x,x)/H(x,x)$ 在正交条件 $H(x,x^1)=0$ 下达到其极大 ρ_2. 这样做下去, 我们定出一串规一化矢量 $\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2,\cdots,\boldsymbol{x}^k$, 使得 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^k$ 时商式 $K(x,x)/H(x,x)$ 在正交条件

$$H(x,x^\nu)=0 \quad (\nu=1,\cdots,k-1)$$

下达到其极大值 ρ_k. 在 n 步之后我们得到一完备组的矢量 $\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2,\cdots,\boldsymbol{x}^n$, 对它们说来有关系

$$H(x^i,x^k)=1,\quad i=k;\quad H(x^i,x^k)=0,\quad i<k \tag{49}$$

以及

$$K(x^i,x^k)=\rho_k,\quad i=k;\quad K(x^i,x^k)=0,\quad i<k. \tag{50}$$

关系 (49) 仅仅是在我们的极大问题中定下的正交关系. 证明 (50) 时我们先考虑 $\boldsymbol{x}^1$. $\boldsymbol{x}^1$ 的极大性可表为不等式

$$K(x^1+\varepsilon\zeta,x^1+\varepsilon\zeta)-\rho_1 H(x^1+\varepsilon\zeta,x^1+\varepsilon\zeta)\leqslant 0,$$

上式对任意的常数 ε 和任意矢量 ζ 皆正确. 由 (47) 和 (48) 就有

$$2\varepsilon A+\varepsilon^2 B\leqslant 0$$

其中

$$A=K(x^1,\zeta)-\rho_1 H(x^1,\zeta),\quad B=K(\zeta,\zeta)-\rho_1 H(\zeta,\zeta).$$

因为这个不等式对任意的小正数或负数 ε 皆正确, 所以对于任意的 ζ 有 $A=0$, 或者

$$K(x^1,\zeta)-\rho_1 H(x^1,\zeta)=0,$$

和上面一样, $\boldsymbol{x}^h$ 的极大问题使

$$K(x^h,\zeta)-\rho_h H(x^h,\zeta)=0,$$

其中 ζ 为满足关系

$$H(\zeta,x^\nu)=0\quad(\nu=1,\cdots,h-1)$$

的任意矢量. 现在, 对 $h<k$ 而言, 可取 $\zeta=\boldsymbol{x}^k$. 因为 $H(x^h,x^k)=0$, 可以断定当 $h<k$ 时 $K(x^h,x^k)=0$, 而由定义 $K(x^h,x^h)=\rho_h$.

因为 $\boldsymbol{x}^\nu$ 这 n 个正交矢量在我们的矢量空间形成一个完备组, 所以任意矢量 $\boldsymbol{x}$ 皆可表为

$$\boldsymbol{x}=\sum_{\nu=1}^{n}y_\nu\boldsymbol{x}^\nu,$$

其中 $y_\nu=H(x,x^\nu)$. 把这些式子代入 H 和 K 中并利用相应于 (47) 和 (48) 的 n 项展开式; 由 (49) 和 (50) 立刻就有

$$H(x,x)=\sum_{\nu=1}^{n}y_\nu^2,$$

$$K(x,x)=\sum_{\nu=1}^{n}\rho_\nu y_\nu^2,$$

这样我们就完成了所要作的变换.

完全和以前一样, ρ_k 这些值可证明有下述极小–极大性质.

在附加条件

$$\sum_{p=1}^{n}\alpha_{\nu p}x_p=0 \quad (\nu=1,\cdots,h-1)$$

之下, ρ_h(其中 $\rho_1\geqslant\cdots\geqslant\rho_n$) 是 $K(x,x)/H(x,x)$ 所能取的最大值中最小的一个 —— 这个最大值被看作是参数 $\alpha_{\nu p}$ 的函数.

为了构造出我们已证明其存在的变换, 我们首先证明对所有整数 h 而言, "变分方程"

$$K(x^h,\zeta)-\rho_h H(x^h,\zeta)=0$$

对任意矢量 ζ 皆正确. 到目前为止, 我们只在 $(\zeta,\boldsymbol{x}^\nu)=0(\nu<h)$ 的限制下证明了这个关系. 可是, 若 ζ 为任意, 则矢量 $\eta=\zeta-c_1\boldsymbol{x}^1-\cdots-c_{h-1}x^{h-1}$(其中 $c_\nu=(\zeta,\boldsymbol{x}^\nu)$) 满足正交条件 $H(\eta,x^\nu)=0,\ \nu<h$, 因此 $0=K(x^h,\eta)-\rho_h H(x^h,\eta)=(Kx^h,\zeta)-\rho_h H(x^h,\zeta)$; 这里最后一个等号是由于 (49) 和 (50) 之故.

对 $\boldsymbol{x}^h=\boldsymbol{x},\rho_h=\rho$ 写出变分方程, 我们就得到决定 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^h$ 的分量 x_j 的一个齐次线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n}(k_{ij}-\rho h_{ij})x_j=0 \quad (i=1,\cdots,n);$$

因此 ρ_h 的值满足行列式方程 $\|k_{ij}-\rho h_{ij}\|=0$, 而矢量 $\boldsymbol{x}^h$ 可在求得 $\rho=\rho_h$ 这个量之后由线性方程得出. 显然, 这种说法就表征出了数 ρ_h 和矢量 $\boldsymbol{x}^h$ 是矩阵 $(\boldsymbol{k}_{pq})$ 对矩阵 $(\boldsymbol{h}_{pq})$ 而言的本征值和本征函数.

所以对应于每一个本征值 ρ_h, 存在一个矢量形式的解 $\boldsymbol{x}^h$. 对应于不同本征值的解是正交的; 假如两个本征值相等, 则对应的解不一定正交, 可是却可以按前面所说的正交化步骤使它们变为正交的. 这些互相正交的解可以规一化使它们具有单位长; 这样得到的矢量就是问题中的本征矢量, 其分量即所求变换的系数.

这些系数 l_{pq} 可由 $\boldsymbol{x}=\sum_{q=1}^{n}y_q\boldsymbol{x}^q$ 得出, 只要用老坐标系的坐标矢量 $\boldsymbol{e}^p$ 乘 $\boldsymbol{x}$. 这样就有 $x_p=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}^p)=\sum_{q=1}^{n}y_q(\boldsymbol{x}^q,\boldsymbol{e})^p$; 因此 $l_{pq}=(\boldsymbol{x}^q,\boldsymbol{e}^p)$.

1.5.4　无穷多个变数的变线型和二次型

在适当的条件下我们的理论在变数的个数无限增加时还是正确的. 例如, 当变线型或二次型次数的平方之和以及变数的平方之和皆收敛时就是如此. 这个为希尔伯特所发展的关于无穷多个变数的型的理论于是就可以应用于分析的许多问题.

不过, 无穷维矢量空间中的型的理论可以更为适当地根据前面所指出的抽象概念来发展. 我们将看到, 分析上的许多问题都可以从这样一个二次型的广义理论的观点得到启发.

1.5.5 无穷小线性变换

一无穷小线性变换按定义为一变换, 其矩阵为

$$A = E + (\varepsilon\alpha_{ik}) = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon\alpha_{11} & \varepsilon\alpha_{12} & \cdots & \varepsilon\alpha_{1n} \\ \varepsilon\alpha_{21} & 1+\varepsilon\alpha_{22} & \cdots & \varepsilon\alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varepsilon\alpha_{n1} & \varepsilon\alpha_{n2} & \cdots & 1+\varepsilon\alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

其中 ε 表示一级无穷小量, 也就是这样一个量, 在所讨论的问题中它的高次幂比之于低次幂 ε 来可以略去. 矩阵为 $A = E + (\varepsilon\alpha_{ik})$ 和 $B = E + (\varepsilon\beta_{ik})$ 的这样两个无穷小变换的积有矩阵 $C = E + (\varepsilon\alpha_{ik} + \varepsilon\beta_{ik})$. 因此这个积不依赖于相乘因子的次序; 换句话说, *无穷小变换是可以彼此交换的*.

此外, $A = E + (\varepsilon\alpha_{ik})$ 的逆矩阵为 $A^{-1} = E - (\varepsilon\alpha_{ik})$, 而矩阵 A 的行列式等于

$$1 + \varepsilon(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \cdots + \alpha_{nn}).$$

若要无穷小变换为正交的, 则由条件 $A'A = E$, 其中 A' 为转置矩阵, 我们必须有 $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} = 0$, 或者换句话说:

无穷小变换为正交的充分和必要条件是其矩阵和单位矩阵的差为反对称的.

任一矩阵为 $C = E + (\varepsilon\gamma_{ik})$ 的无穷小变换可表为一正交变换 $A = E + (\varepsilon\alpha_{ik})$ 和一对称变换 $B = E + (\varepsilon\beta_{ik})$ 的积, 其中

$$\alpha_{ik} = \frac{1}{2}(\gamma_{ik} - \gamma_{ki});$$

$$\beta_{ik} = \frac{1}{2}(\gamma_{ik} + \gamma_{ki}).$$

考虑一个不一定是无穷小的对称变换 $y_i = \sum_k s_{ik}x_k$, 其矩阵为 $S = (s_{ik})$. 它的几何意义乃是在 n 个互相正交方向的膨胀. 要看出这一点我们需要把二次型 $S(x,x)$ 变换到主轴形式, 把 x_i 变为 u_i, y_i 变为 v_i. 于是我们有

$$\sum_{i,k=1}^{n} s_{ik}x_ix_k = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i u_i^2,$$

而方程 $y_i = \sum_k s_{ik}x_k$ 则变为

$$v_i = \kappa_i u_i.$$

这些方程显然表示在第 i 主轴方向以 κ_i 为系数的膨胀. 体积之增加和原体积的比, 即所谓体积膨胀, 显然由差 $\kappa_1\kappa_2\cdots\kappa_n - 1 = |s_{ik}| - 1$ 给出. 特别地, 假如变换为无穷小, 也就是 $(s_{ik}) = E + (\varepsilon\beta_{ik})$, 我们有

$$\kappa_1\kappa_2\cdots\kappa_n - 1 = \varepsilon(\beta_{11} + \cdots + \beta_{nn}).$$

既然正交变换所表示的是一个转动, 我们就可以得出这样的结论:

以 $E + (\varepsilon\gamma_{ik})$ 为矩阵的无穷小变换可表为一转动和一膨胀的积; 体积膨胀为 $\varepsilon\sum\limits_{i=1}^{n}\gamma_{ii}$.

1.5.6　微扰

在小幅度振动理论和量子力学的许多问题中, 决定二次型 $K(x,x) = \sum\limits_{i,k=1}^{n} b_{ik}x_ix_k$ 的本征值和本征矢量在二次型 $K(x,x)$ 和单位型 $E(x,x)$ 改变时是如何改变的, 是很重要的问题. 设 $E(x,x)$ 为 $E(x,x) + \varepsilon A(x,x)$ 所代换, 而 $K(x,x)$ 则为 $K(x,x) + \varepsilon B(x,x)$ 所代换, 其中

$$A(x,x) = \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik}x_ix_k, \quad B(x,x) = \sum_{i,k=1}^{n} \beta_{ik}x_ix_k,$$

ε 为一参数. 问题于是变为把 $E + \varepsilon A$ 和 $K + \varepsilon B$ 同时变为正则形. 若令

$$K(x,x) + \varepsilon B(x,x) = \sum_{i,k=1}^{n} b'_{ik}x_ix_k,$$

$$E(x,x) + \varepsilon A(x,x) = \sum_{i,k=1}^{n} a'_{ik}x_ix_k,$$

则本征矢量的分量所满足的方程为

$$\sum_{k=1}^{n}(b'_{ik} - \rho' a'_{ik})x'_k = 0 \quad (i = 1, \cdots, n),$$

其中 ρ' 可由方程组的行列式为零的条件提出. 以 $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$ 表示 $K(x,x)$ 的本征值, 并假设它们各不相等; 而令变动组的相应的值为 $\rho'_1, \rho'_2, \cdots, \rho'_n$. 可设原二次型 $K(x,x)$ 为平方和:

$$K(x,x) = \rho_1x_1^2 + \rho^2x_2^2 + \cdots + \rho_nx_n^2.$$

ρ'_i 这些量是一代数方程的单根, 它们在 $\varepsilon=0$ 的邻域中是 ε 的单值解析函数; 对属于本征值 ρ'_h 的变动本征矢量的分量 x'_{hk} 说来, 这也是正确的. 因此 ρ'_h 和 x'_{hk} 这些量可表为 ε 的幂级数, 其常数项自然依次为原本征值 ρ_h 以及原本征矢量的分量 x_{hk}. 要逐步算出 $\varepsilon,\varepsilon^2,\cdots$ 的系数, 我们须将这些幂级数代入方程

$$\sum_{k=1}^{n}(b'_{ik}-\rho'_h a'_{ik})x'_{hk}=0 \quad (i,h=1,\cdots,n),$$

其中 $b'_{ik}=\rho_{ik}+\varepsilon\beta_{ik}$, $a'_{ik}=\delta_{ik}+\varepsilon\alpha_{ik}$, 而 $\rho_{ii}=\rho_i$, $\rho_{ik}=0(i\neq k)$, $\delta_{ii}=1$, $\delta_{ik}=0(i\neq k)$. 归并方程中 ε 的同幂次项, 然后令 ε 各幂次的系数为零, 我们就得到一无穷序列的新方程. 一种与此相等当而往往更为方便的做法可以从数量级方面的考虑得出, 在这里把 ε 看作无穷小量. 我们首先考虑 $i=h$ 的方程. 令 ε 一次幂的系数为零, 得

$$\rho'_h=\frac{\rho_h+\varepsilon\beta_{hh}}{1+\varepsilon\alpha_{hh}}=\rho_h-\varepsilon\rho_h\alpha_{hh}-\varepsilon\beta_{hh},$$

这里所差的是 ε 的二次或高次项. 同样的步骤可用于 $i\neq h$ 的方程而给出结果

$$x'_{hh}=1,\quad x'_{hi}=-\varepsilon\frac{\alpha_{ih}\rho_h-\beta_{ih}}{\rho_h-\rho_i},$$

所差的是 ε 的二级无穷小量.

利用本征矢量分量的这些值, 我们很容易得到本征值, 准确到 ε 的二级无穷小. 我们仍旧考虑那决定第 h 个本征矢量的分量的第 h 个方程

$$\sum_{k=1}^{n}(b'_{hk}-\rho'_h a'_{hk})x'_{hk}=0.$$

假如在左端我们略去 ε 的三级量, 而把 $h=k$ 的项分写出来, 就得到

$$\begin{aligned}b'_{hh}-\rho'_h a'_{hh}&=\sum_{k=1}^{n'}\varepsilon(b'_{hh}-\rho'_h a'_{hh})\frac{\alpha_{kh}\rho_h-\beta_{kh}}{\rho_h-\rho_k}\\&=-\varepsilon^2\sum_{k=1}^{n'}\frac{(\alpha_{kh}\rho_h-\beta_{kh})^2}{\rho_h-\rho_k}.\end{aligned}$$

于是有

$$\rho'_h=\rho_h-\varepsilon(\rho_h\alpha_{hh}-\beta_{hh})-\varepsilon^2\alpha_{hh}(\beta_{hh}-\rho_h\alpha_{hh})+\varepsilon^2\sum_{k=1}^{n'}\frac{(\alpha_{kh}\rho_h-\beta_{kh})^2}{\rho_h-\rho_k}.$$

这里我们用符号 $\sum\limits_{k}{}'$ 来表示求和时 k 由 1 到 n, 除去 $k=h$.

1.5.7 约束

由线性条件

$$\gamma_1 x_1 + \cdots + \gamma_n x_n = 0$$

所表示的约束以及由此而引起的二次型$K(x,x) = \sum\limits_{p,q=1}^{n} k_{pq} x_p x_q$ 中自变数个数的减少, 可以看作一个连续变化的最终结果. 考虑二次型 $K(x,x) + t(\gamma_1 x_1 + \cdots + \gamma_n x_n)^2$, 其中 t 为正参数. 若 t 无限制地增大, 每一个本征值皆单调上升. 最大的本征值无限增加, 而其他的则趋近于由 $K(x,x)$ 按所给约束消去一个变数后所得的二次型的本征值.

1.5.8 矩阵或变线型的初等除数

令 A 为一张量而 $A = (a_{ik})$ 为相应的矩阵. 于是多项式

$$|\kappa E - A| = \begin{vmatrix} \kappa - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \kappa - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \kappa - a_{nn} \end{vmatrix}$$

可按熟知的一些法则分解为其“初等除数”的积

$$(\kappa - r_1)^{e_1}, (\kappa - r_2)^{e_2}, \cdots, (\kappa - r_h)^{e_h},$$

其中有些 $r_1, r_2, \cdots, r_h$ 可以是相等的. 对每一个除数 $(\kappa - r_\nu)^{e_\nu}$ 而言, 存在一组 e_ν 个矢量 $\boldsymbol{f}_1^{(\nu)}, \boldsymbol{f}_2^{(\nu)}, \cdots, \boldsymbol{f}_{e_\nu}^{(\nu)}$, 对它们说来方程

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}_1^{(\nu)} = r_\nu \boldsymbol{f}_1^{(\nu)}, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{f}_2^{(\nu)} = r_\nu \boldsymbol{f}_2^{(\nu)} + \boldsymbol{f}_1^{(\nu)}, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{f}_{e_\nu}^{(\nu)} = r_\nu \boldsymbol{f}_{e_\nu}^{(\nu)} + \boldsymbol{f}_{e_\nu - 1}^{(\nu)}$$

成立. 这里的 n 个矢量

$$\boldsymbol{f}_1^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{f}_{e_1}^{(1)}; \quad \boldsymbol{f}_1^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{f}_{e_2}^{(2)}; \cdots; \quad \boldsymbol{f}_1^{(h)}, \cdots, \boldsymbol{f}_{e_h}^{(h)}$$

是线性无关的. 假如引进它们作为新变数 $x_1^{(1)}, \cdots, x_{e_h}^{(h)}$ 的基, 矩阵 A 就变换为矩阵

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_h \end{pmatrix}$$

PDG

其中 $A_1, A_2, \cdots, A_h$ 本身也是一些矩阵; A_ν 为 e_ν 阶矩阵:

$$\begin{pmatrix} r_\nu & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & r_\nu & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r_\nu & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & r_\nu \end{pmatrix}.$$

1.5.9 复正交矩阵的谱

我们现在来证明, 一复正交矩阵的谱在单位圆上, 也就是说, 所有它的本征值的绝对值皆为 1.

我们知道, 复正交矩阵的元素的绝对值不能超过 1. 所以所有 n 阶复正交矩阵的特征方程的系数在绝对值上必须小于某个与所考虑的特殊矩阵无关的上界. 因为特征方程的第一和最后一个系数的绝对值皆等于 1, 这就意味着其本征值的绝对值必须在某正的上界和下界之间, 它们与所考虑的特殊矩阵无关. 另一方面, 复正交矩阵 A 的所有的方次 A^m 仍为复正交的, 它们的本征值为 A 的相应本征值的 m 次方. 可是这些方次及其倒数的绝对值若能保持在一与 m 无关的上界之下, 就必须每个本征值的绝对值 (以及所有其方次) 皆为 1.

另一个证明, 而且是可以用于无限矩阵的证明, 可由 $(E-\lambda A)^{-1}$ 的诺伊曼级数的收敛性得出. 级数

$$(E-\lambda A)^{-1} = E + \lambda A + \lambda^2 A^2 + \cdots,$$

其中 A 为复正交矩阵, 当 $|\lambda| < 1$ 时自然是收敛的. 既然矩阵 A^m 的元素的绝对值最多等于 1, 于是公比为 λ 的几何级数是矩阵元素的一个长级数. 因此 $|E-\lambda A|$ 没有零点在单位圆之内. 另一方面, 由关系 $A\overline{A}' = E$, 我们有

$$(E-\lambda A)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\overline{A}'\left(E + \frac{1}{\lambda}\overline{A}' + \frac{1}{\lambda^2}\overline{A}'^2 + \cdots\right).$$

在这里右端的几何级数对 $|1/\lambda| < 1$ 而言收敛, 因为 $\overline{A}'$ 是复正交矩阵. 因此 $|E-\lambda A|$ 没有零点可在单位圆外. 所以所有的零点皆在单位圆上, 我们的论断乃得证明.

参 考 文 献

教本

Bôcher, M.: Introduction to Higher Algebra. Macmillan, New York, 1907.

Kowalewski, G.: Einführung in die Determinantentheorie. Veit , Leipzig, 1909.

Wintner, A.: Spektraltheorie der unendlichen Matrizen. S. Hirzel, Leipzig, 1929.

专刊及散篇论文

Courant, R.: Zur Theorie der kleinen Schwingungen. Zts. f. angew. Math. u. Mech., Vol. 2, 1922, pp. 278–285.

Fischer, E.: Über quadratische Formen mit reelen Koeffizienten. Monatsh. f. Math. u. Phys., Vol. 16, 1905, pp. 234–249. The maximum-minimum character of the eigenvalues probably was first mentioned in this paper.

Hilbert, D.: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, especially sections 1 and 4. Fortschritte der mathematischen Wissenschaften in Monographien, Heft 3. B. G. Teubner, Leipzig and Berlin, 1912.



第 2 章　任意函数的级数展开

在第 1 章中所讨论的许多关系和有些定理非常类似, 在这些定理中, 定义在某一给定基本区域 G 内的单变数或多变数的函数代替了 n 维空间矢量的地位, 把 n 维空间的一个矢量表为任意 n 个线性独立矢量的组合这个问题, 类似于把区域 G 内在某种意义下的任意函数表为一给定函数集中诸元素之组合的问题 (集合中函数的个数须为无穷将是显然的). 这就是熟知的*把任意函数按一给定函数集展为级数的问题*. 在这一章中这个以各种形式出现于数学物理中的问题, 将从一般的观点来加以处理.

我们将限于考虑*分段连续的函数*; 也就是说, 我们所考虑的函数, 其基本区域可分为有限多个子区域, 在每一子区域中, 该函数是连续的, 而且当从内部趋近于任一子区域边界上的一点时, 函数趋于有限的极限值. 为了简化符号, 我们将先考虑一个变数 x 的函数, 其基本区域 G 为 x 轴上一有限的区间. 假如我们要谈多个变数的问题, 例如两个变数 x 和 y, 我们将假定基本区域 G 的边界由有限多段曲线所组成, 各段曲线有连续变动的切线, 假如我们认定边界上的点属于基本区域, 我们就说这是一个"闭区域".

此外, 在许多情形下, 我们将假定所考虑的函数为*分段平滑的*, 也就是说, 它们分段连续且具有分段连续的一级微商. 若不另作声明, 我们将假定所考虑的函数取实值.

2.1　正交函数组

2.1.1　定义

取在 (有限) 基本区域上的积分[1)]

$$(f, g) = \int fg dx \tag{1}$$

叫做二函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的内积 (f, g) 或 (fg). 内积满足施瓦茨不等式

$$(f, g)^2 \leqslant (f, f)(g, g), \tag{2}$$

其中等式当而且只当 f 和 g 成比例时成立, 像矢量的情形一样, 此不等式可由变数

1) 若不会有误解, 积分限省去不写.

λ 的函数 $\int(\lambda f+g)^2dx$ 恒为正的性质得出, 或者直接由以下恒等式得出

$$(f,g)^2=(f,f)(g,g)-\frac{1}{2}\iint(f(x)g(\xi)-f(\xi)g(x))^2dxd\xi.$$

若二函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 之内积 (f,g) 为零, 则称它们为**正交的**. 一函数 $f(x)$ 和它自己的内积叫做该函数的**范数**而用 Nf 来表示:

$$Nf=(f,f)=\int f^2dx. \tag{3}$$

范数为 1 的函数称为是**规一化的**. 一组规一化函数 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots$, 其中任意二不同的成员皆正交, 称为**正交规一组**, 而表示这个性质的关系

$$(\varphi_\nu,\varphi_\mu)=\delta_{\mu\nu}\quad(\delta_{\nu\nu}=1,\ \ \delta_{\mu\nu}=0\text{ 当 }\nu\neq\mu)$$

为**正交关系**.

在区间 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 内, 或者更一般地说在任意长度为 2π 的区间内正交规一函数组的例可由以下函数给出:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad\frac{\cos\ x}{\sqrt{\pi}},\quad\frac{\sin\ x}{\sqrt{\pi}},\quad\frac{\cos\ 2x}{\sqrt{\pi}},\quad\frac{\sin\ 2x}{\sqrt{\pi}},\cdots.$$

对实变数的复值函数而言, 宜按以下方式推广正交的概念: 两个复函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 称为是正交的, 若关系

$$(f,\bar{g})=(\bar{f},g)=0$$

成立, 其中 $\bar{f}$ 和 $\bar{g}$ 依次表示 f 和 g 的共轭函数. 函数 $f(x)$ 称为是规一化的, 若 $Nf=\int|f|^2dx=1$. 复正交规一组最简单的例子可由区间 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 内的指数函数

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad\frac{e^{ix}}{\sqrt{2\pi}},\quad\frac{e^{2ix}}{\sqrt{2\pi}},\cdots$$

给出, 这一点可由以下"**正交关系**"立刻得出

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(\mu-\nu)x}dx=\delta_{\mu\nu}(\delta_{\nu\nu}=1,\ \ \delta_{\mu\nu}=0\text{ 当 }\mu\neq\nu). \tag{4}$$

我们称 r 个函数 $f_1,f_2,\cdots,f_r$ 为**线性相关的**, 若有对所有 x 皆成立的常系数齐次线性关系 $\sum_{i=1}^{r}c_if_i=0$, 其中系数不全等于零. 否则, 这些函数称为是**线性无关的**. 值得注意的是正交组中的各函数永远是线性无关的. 因为, 若恒等式

$$c_1\varphi_1+c_2\varphi_2+\cdots+c_n\varphi_n=0$$

成立, 我们可以乘以 φ_ν, 积分, 而得出结果 $c_\nu=0$.

2.1.2 一组函数的正交化

给了一组无穷多个函数 $v_1, v_2, \cdots$，无论 r 为何，其中的任意 r 个皆为线性无关的，则从这组函数就可以得出一正交规一组 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$，只要取 φ_n 为 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 适当的线性组合. 正交化的步骤完全类似于由一线性无关的矢量组求得一正交矢量组的步骤 (见第 1 章). 我们首先选 $\varphi_1 = \dfrac{v_1}{\sqrt{Nv_1}}$. 然后我们求一个数 c_1' 使函数 $v_2 - c_1'\varphi_1$ 正交于 φ_1，也就是说我们选 $c_1' = (\varphi_1 v_2)$; $v_2 - c_1'\varphi_1$ 不能恒等于零，因为 v_1 和 v_2 是线性无关的，因此 φ_1 和 v_2 也是线性无关的. 于是我们可以把这个函数除以其范数的平方根而得到一规一化函数 φ_2，φ_2 和 φ_1 正交. 然后我们求两个数 c_1''，c_2''，使函数 $v_3 - c_1''\varphi_1 - c_2''\varphi_2$ 和 φ_1 及 φ_2 二者皆正交，也就是说，选 $c_1'' = (\varphi_1 v_3)$，$c_2'' = (\varphi_2 v_3)$. 这个函数不可能恒等于零，所以又能加以规一化；用它范数的平方根除之即得规一化函数 φ_3. 无限地继续这个步骤我们就得到所要求的正交函数组.

凡提到正交化步骤，一般说来我们所指的就是上述把一组函数同时规一化并正交化的步骤.

2.1.3 贝塞尔不等式、完备性关系、平均逼近

设 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ 为一正交规一组，并设 f 为任一函数. 数

$$c_\nu = (f\varphi_\nu) \quad (\nu = 1, 2, \cdots) \tag{5}$$

称为 f 对所给正交规一组[1]的*展开系数*或*分量*.

由明显的关系式

$$\int \left(f - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu\right)^2 dx \geqslant 0 \tag{6}$$

我们展开平方并逐项积分，就得到

$$0 \leqslant \int f^2 dx - 2\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \int f\varphi_\nu dx + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^2 = Nf - 2\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^2 + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^2,$$

因此

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^2 \leqslant Nf. \tag{7}$$

因为式子右端的数不依赖于 n，可得

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^2 \leqslant Nf. \tag{8}$$

1) 又称作傅里叶系数，因为所考虑的展开为傅里叶展开的推广.

这个称为“贝塞尔不等式”的基本不等式对每一正交规一组而言都是正确的, 它证明了展开系数的平方之和永远收敛.

对取复数值的函数组说来, 有以下相应的关系式

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|c_\nu|^2 \leqslant Nf = (f, \bar{f}), \tag{8'}$$

其中 c_ν 为展开系数 $c_\nu = (f, \overline{\varphi}_\nu)$. 这个关系可由以下不等式得出:

$$\int\left|f(x) - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\varphi_\nu\right|^2 dx = Nf - \sum_{\nu=1}^{n}|c_\nu|^2 \geqslant 0.$$

积分 (6) 的意义是这样的: 我们若要用线性组合 $\sum_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu\varphi_\nu$ (其中 n 固定, γ_ν 为常系 数) 来逼近 $f(x)$ 而使“平均平方误差” $M = \int\left(f - \sum_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu\varphi_\nu\right)^2 dx$ 为最小, 那么所遇到的就是这个积分. 因为由简单的积分运算我们可得恒等式

$$M = \int\left(f - \sum_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu\varphi_\nu\right)^2 dx = \int f^2 dx + \sum_{\nu=1}^{n}(\gamma_\nu - c_\nu)^2 - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^2,$$

由此立刻可知当 $\gamma_n = c_\nu$ 时 M 取最小值.

这样类型的近似称为最小二乘法的近似, 或“平均”近似.

假如有一正交规一组 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ 对任意分段连续的函数 f 而言皆能选 n 充分大而以任意准确度作其平均近似, 也就是说, 可选 n 使平均平方误差 $\int\left(f - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\varphi_\nu\right)^2 dx$ 小于任意给定的正数, 则函数组 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ 称为“完备的”. 对完备的正交规一组而言, 贝塞尔不等式对任意函数 f 皆成为等式:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^2 = Nf. \tag{9}$$

这个关系称作“完备性关系”. 它可以用更一般的形式写为

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu d_\nu = (f, g) \quad 其中\ c_\nu = (f, \varphi_\nu),\ d_\nu = (g, \varphi_\nu), \tag{9'}$$

要验证这一点, 可对函数 $f+g$ 应用 (9) 式:

$$N(f+g) = Nf + Ng + 2(f,g) = \sum_{\nu=1}^{\infty}(c_\nu + d_\nu)^2$$
$$= \sum_{\nu=1}^{\infty}(c_\nu^2 + d_\nu^2 + 2c_\nu d_\nu),$$

然后在其中减去相应于 f 和 g 的方程.

顺便可以指出, 一函数组 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ 为完备的充分条件是完备关系 (9) 对所有的连续函数 f 皆得满足. 事实上, 任一分段连续的函数 g 可用连续函数 f 来逼近而使积分 $\int (f-g)^2 dx$ 任意小. 令 g 的断点为 x_ν, 若在每一区间 $x_\nu - \delta \leqslant x \leqslant x_\nu + \delta$ 内我们用联接点 $(x_\nu - \delta, g(x_\nu - \delta))$ 及点 $(x_\nu + \delta,\ g(x_\nu + \delta))$ 的直线段代替 g 的曲线, 就可以得到一个近似 g 的连续函数 f[1].

设 $c_1, c_2, \cdots$ 为 f 的展开系数, 则当 n 充分大时, 表示平均平方误差的积分 $\int \left(f - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu\right)^2 dx$ 可任意小. 这就表示积分

$$M' = \int \left(g - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu\right)^2 dx = \int \left[(g-f) + \left(f - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu\right)\right]^2 dx$$

在适当选择 n 时可和 $N(g-f)$ 任意接近. 因由施瓦茨不等式我们有

$$M' = N(g-f) + N\left(f - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu\right) + 2\left(g-f, f - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu\right)$$
$$\leqslant N(g-f) + N\left(f - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu\right) + 2\sqrt{N(g-f) \cdot N(f - \sum c_\nu \varphi_\nu)}.$$

此外又有

$$M = \int \left(g - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi_\nu\right)^2 dx \leqslant M',$$

其中 a_ν 为 g 的展开系数, 这是因为这些系数给出了对 g 说是最小的平均平方误差. 因此, 若完备性关系对 f 成立, 则对 g 亦成立.

1) 若 M 为 $|g(x)|$ 的上界, q 为积分区间内 g 的断点的个数, 则平均平方误差为

$$\int (f-g)^2 dx \leqslant 8M^2 q\delta,$$

选 δ 充分小可使以上积分任意小.

必须注意, 由方程

$$\lim_{n\to\infty}\int\left(f-\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu\varphi_\nu\right)^2dx=0$$

所表示的、一正交规一函数组 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots$ 的完备性并不一定意味着 $f=\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu\varphi_\nu$, 也就是说 f 不一定能展为函数 φ_ν 的级数. 可是, *若级数* $\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu\varphi_\nu$ *一致收敛, 则可在积分号下求极限. 而展开式成立.* 函数组 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots$ 的完备性自然是可展的一个必要条件, 因为我们若取 f 为完备组中的一个函数, 则它对非完备组 (由 f 之外的其他函数 φ_ν 组成) 而言的各分量为零. 可是, 即使是完备组 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots$, 对任意函数而言上述级数的收敛问题还需要更详尽的讨论, 这将在以后处理 (第 5 章和第 6 章).

假如上面的极限方程得到满足, 我们就说*函数* $\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu\varphi_\nu$ *平均收敛于函数* f.

另一重要的定理是: *一分段连续的函数为其对一完备正交规一组的展开系数唯一确定.* 这就是说, 两个分段连续的函数若有相同的展开系数, 它们就恒等. 这是因为系数相等的二函数的差的系数为零; 因此由完备性关系其范数为零, 所以它恒等于零. 因此, 一函数完全确定于它对一完备正交规一组的展式, 虽然这个展式只是在平均的意义下收敛. 事实上, 在许多数学物理的定理中所需要的也就是平均收敛性.

一函数组完备的概念, 即使该组不是正交规一组, 也是有意义的. *一般说来, 我们称一函数组为完备的, 假如任一分段连续的函数可由该组中函数的线性组合以任意准确度逼近它.* 这样一组函数的完备性不因正交化步骤而丧失.

2.1.4 无穷多个变数的正交变换和复正交变换

在正交规一函数组和 n 维空间的正交规一矢量组之间有着许多类似之处. 把函数 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots$ 看作无限维空间 (常称为希尔伯特空间) 的“坐标矢量”或“坐标函数”往往是很有用的. 一个任意函数 f 是这空间中的一个矢量, 它的展开系数 $c_\nu=(f\varphi_\nu)$ 是该矢量在 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots$ 所定义的坐标系中的分量.

假设 $\psi_1,\psi_2,\cdots$ 是另一正交规一函数组, 对它说来 f 的分量为 $d_\nu=(f\psi_\nu)$, 又设二函数组皆完备, 则 c_i 和 d_i 为下列一组无限多个方程所联系:

$$c_i=\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}d_k,\quad a_{ik}=(\varphi_i\psi_k)\quad(i=1,2,\cdots).\tag{10}$$

要看出这一点, 可将完备关系 (9′) 用于函数 f 和 φ_i 对函数组 $\psi_1,\psi_2,\cdots$ 的展开系

数. 同样我们可得逆方程组

$$d_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ki} c_k, \quad a_{ki} = (\psi_i \varphi_k) \quad (i = 1, 2, \cdots). \tag{10'}$$

这些系数满足条件

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} a_{jk} = (\varphi_i \varphi_j) = \delta_{ij}, \tag{11}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ki} a_{kj} = (\psi_i \psi_j) = \delta_{ij}, \tag{11'}$$

这不过是 n 维空间 (第 1 章 1.1 节) 的正交条件在无限维空间的推广. 因此, 我们称满足条件 (11) 和 (11′) 的变换 (10) 为**无限多个变数的正交变换**或希伯尔特空间的正交变换.

同样, 对两个不同的复正交组, 一函数的展开系数为一**无限多变数的复正交变换**所联系.

2.1.5 在多个自变数及更一般的假定下上述结果的正确性

若我们所考虑的不是单变数的函数而是多变数的函数, 例如 x 和 y 两个变数, 所有前述的概念和结论皆不改变. 我们设变数限于一有限区域 G 内, G 的体积元素用 dG 来表示. 我们定义在区域 G 内二函数 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 的内积 (fg) 为积分 $(fg) = \int_G fg dG$. 于是本节中的符号和证明基本上毋需更改.

不仅如此, 若基本区域为无限, 所有我们的概念和结论依然成立, 只要假设所有我们处理的函数在整个基本区域上平方可积分.

最后, 可以指出, 我们的方法甚至于对在基本区域内为无界的函数 f 也是可用的, 只要 f 和它的平方在该基本区域上可积分.

2.1.6 多变数完备函数组的构造

假如单变数的完备函数组为已知, 就可以按下述定理作出两个或多个变数的完备函数组:

设

$$\varphi_1(s), \varphi_2(s), \cdots$$

为区间 $a \leqslant s \leqslant b$ 上的完备正交规一函数组, 又设对任一 $i (i = 1, 2, \cdots)$ 而言

$$\psi_{1i}(t), \psi_{2i}(t), \cdots$$

为区间 $c \leqslant t \leqslant d$ 上的完备正交规一组. 于是函数

$$\omega_{ik}(s,t)=\varphi_i(s)\psi_{ki}(t)$$

形成在矩形 $a\leqslant s\leqslant b,\ c\leqslant t\leqslant d$ 内以 s 和 t 为变数的完备正交规一函数组 (特别地, 函数组 $\varphi_i(s)\varphi_k(t)$ 在正方形 $a\leqslant s\leqslant b,\ a\leqslant t\leqslant b$ 内是正交规一而且完备的). 也就是说, 若 $f(s,t)$ 为这矩形内的一连续函数, 则完备性关系

$$\iint f^2(s,t)dsdt=\sum_{i,k=1}^{\infty}\left(\iint f(s,t)\omega_{ik}(s,t)dsdt\right)^2$$

成立.

证明此定理时, 注意有 $\int f^2(s,t)ds=\sum_{i=1}^{\infty}g_i^2(t)$, 其中 $g_i(t)=\int f(s,t)\varphi_i(s)ds$. 这只不过是函数组 φ_i 的完备性表达式. 因为右边的级数一致收敛[1], 我们可以对 t 逐项积分, 而得

$$\iint f^2(s,t)dsdt=\sum_{i=1}^{\infty}\int g_i^2(t)dt.$$

现在对右边的第 i 项我们又可以用函数组 $\psi_{ki}(t)\ (k=1,2,\cdots)$ 的完备性关系而立刻得出所要求的完备性关系.

2.2 函数的聚点定理

2.2.1 函数空间的收敛性

假如我们考虑的是函数和 n 维矢量的一个无穷集合, 那么二者之间的类似性在许多方面不复存在. 由数学分析的初等定理 (魏尔斯特拉斯聚点定理) 知道, 从绝对值 $|\boldsymbol{v}|$ 或范数 $\boldsymbol{v}^2=N\boldsymbol{v}$ 为有界的一无穷矢量集合 $\{\boldsymbol{v}\}$ 中, 我们恒可选出一收敛的序列. 其次, 若对一串矢量 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots$ 而言关系 $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}N(\boldsymbol{v}_n-\boldsymbol{v}_m)=0$ 成立, 则存在一极限矢量 $\boldsymbol{v}=\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{v}_n$; 最后, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}N\boldsymbol{v}_n=0$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{v}_n=0$. 可是这些事实在函数空间, 也就是说在无限维的空间, 一般说来并不成立. 从范数有界的

---

1) 可由迪尼定理得出: 假如正连续函数的级数 $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}f_\nu(t)$ 在闭区域 G 内收敛于一连续函数 $\delta(t)$, 这收敛是一致的. 以下为定理证明之大意: 写 $S_n(t)=\sum\limits_{\nu=1}^{n}f_\nu(t)$; $S(t)=S_n(t)+R_n(t)$. 若论断不真, 则存在一正数 α, 一组趋于无穷的整数 $n_1,n_2,\cdots$, 以及在 G 内相应的变数值 $t_1,t_2,\cdots$ 使有 $R_{n_i}(t_i)\geqslant\alpha$, 也就是说 $S_{n_i}(t_i)\leqslant S(t_i)-\alpha$. 我们可以假定 t_i 的值趋于一极限 t, t 在 G 内. 现在令 N 为一固定整数; 于是当 $n_i\geqslant N$ 时, 我们有 $S_{n_i}(t_i)\geqslant S_N(t_i)$, 而 $S_N(t_i)\leqslant S(t_i)-\alpha$. 现在令 i 无限增大, 由所设各函数的连续性, 就得到 $S_N(t)\leqslant S(t)-\alpha$, 在 N 充分大时这是不可能的.

无限连续函数集中并不一定能选出一收敛函数序列; 对一串连续函数而言由关系 $\lim_{n\to\infty} Nf_n = 0$ 并不能推出 $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$. 作为反例, 可考虑函数

$$f_n(x) = 1 - n^2x^2 \quad 当\ x^2 \leqslant \frac{1}{n^2},$$
$$f_n(x) = 0 \qquad\qquad 当\ x^2 \geqslant \frac{1}{n^2},$$

其中定义区间为 $-1 \leqslant x \leqslant 1$. 这个函数集合的任一子集合皆收敛于下述函数:

$$f(x) = 0 \qquad 当\ x \neq 0,$$
$$f(x) = 1 \qquad 当\ x = 0,$$

这个函数在 $x = 0$ 不连续, 可是 $\lim_{n\to\infty} Nf_n = 0$.

虽然如此, 使矢量和函数之间能有类似, 也就是说, 使在函数空间保持有魏尔斯特拉斯聚点定理和上述收敛定理, 却是在多方面极为重要的事, 尤其是在证明收敛性和存在性时. 我们可以从两方面来处理这个问题: 首先, 我们可以更改积分和收敛的概念而扩充所讨论的函数集的范围; 在勒贝格的理论中所用的就是这个方法, 可以它在本书中并非必需, 因此将不加采用[1]. 我们所要采取的另一途径乃是限制所讨论的函数的范围而使聚点定理成立. 我们所加的限制是这样的: 除了要求所讨论的函数为连续外, 还要求所讨论的函数集*同等连续*.

假设我们处理的是一个变数的函数. 同等连续所要求的乃是: 对任意正数 $\varepsilon > 0$, 存在一个只依赖于 ε 而不依赖于集合中个别 $f(x)$ 的正数 $\delta = \delta(\varepsilon)$, 使得当 $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$ 时, 就有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, 在这里 x_1 和 x_2 皆在规定的自变数的变动区域之内. 例如, 设 M 为定数, 所有使 $\int_a^b f'^2(x)dx \leqslant M$ 的函数 $f(x)$ 在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 内形成一同等连续函数集. 事实上, 对此区间内的任意两个变数值 x_1 和 x_2 而言, 有

$$f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f'(x)dx;$$

因此, 由施瓦茨不等式,

$$|f(x_2) - f(x_1)|^2 \leqslant |x_2 - x_1| \int_{x_1}^{x_2} f'^2(x)dx \leqslant |x_2 - x_1|M.$$

从这个不等式我们看出同等连续的条件可以满足, 只要取 $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon^2}{M}$.

对同等连续的函数集说来, *聚点定理*成立: 从任意在基本区域 G 内一致有界并同等连续的函数集中, 可以选出一个序列 $q_1(x), q_2(x), \cdots$, 它一致收敛于一在 G

1) 见本章 2.10.11 小节.

内的连续极限函数[1]. 这条对连续函数集的定理 (阿尔泽拉定理) 是和有界点集的魏尔斯特拉斯定理类似的, 因此它适合于我们的要求.

证明这定理时, 我们考虑一可数点集 $x_1, x_2, \cdots$, 它在所述区间内到处稠密, 例如, 可考虑将区间等分并将所分得之子区间再依次不断等分而得出的点集. 在 x_1 点各函数值的集合包含一收敛序列为其子集; 这可由魏尔斯特拉斯定理得出. 因此我们可以从所给的函数集中选出一无限函数序列 $a_1(x), a_2(x), \cdots$, 它们在 x_1 点的值为一收敛序列. 同样我们可以由这函数序列选出一子序列 $b_1(x), b_2(x), \cdots$, 它在 x_2 点收敛, 等等. 现在来考虑"对角序列" $a_1(x) = q_1(x)$, $b_2(x) = q_2(x), \cdots$ 并证明它在整个区间内一致收敛.

为此我们选一任意小的正数 ε 及一大整数 M, 使得对区间的任一点 x 而言存在一点 x_h, 而 $h \leqslant M$ 并且 $|x - x_h| \leqslant \delta(\varepsilon)$, 其中 $\delta(\varepsilon)$ 为上面在同等连续性的定义中所确定的正数. 现在再选整数 $N = N(\varepsilon)$, 它依赖于 ε 而且足够大, 使得当 $m > N$, $n > N$ 时, 有

$$|q_m(x_h) - q_n(x_h)| < \varepsilon \quad (h = 1, 2, \cdots, M).$$

由于各函数的同等连续性, 对某一确定的值 $h \leqslant M$ 而言, 我们有

$$|q_m(x) - q_m(x_h)| < \varepsilon,$$
$$|q_n(x) - q_n(x_h)| < \varepsilon;$$

因此, 当 $m > N$, $n > N$ 时,

$$|q_m(x) - q_n(x)| < 3\varepsilon.$$

这就证明了函数序列 $q_1(x), q_2(x), \cdots$ 在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上的一致收敛性. 极限函数 $q(x)$ 的连续性可由收敛的一致性立刻得出. 在这里还可以指出以上论据证明了所讨论的函数集中的*任一收敛子序列必一致收敛*.

一同等连续的函数集还有以下的性质: 若函数序列 $f_1(x), f_2(x), \cdots$ 属于一同等连续集并有 $\lim\limits_{n\to\infty} Nf_n = 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$. 此外, 若 f_n 为有界并有 $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}} N(f_n - f_m) = 0$, 则存在一连续函数 $f(x)$ 使有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. 在这两种情形, 收敛皆是一致的.

证明第一个论断时, 我们设在某一 x_0 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) \neq 0$. 于是存在任意大的 n 值使得 $f_n^2(x_0) > 2\alpha^2$, 其中 $2\alpha^2$ 为某一正数. 由于函数 $f_n(x)$ 的同等连续性, 必然存在一长度为 δ 之确定区间, 它包含 x_0 点, 而且使得在这区间内有 $f_n^2 > \alpha^2$, n

1) 事实上只须假定函数集在 G 的一个点上一致有界; 因为由同等连续性, 函数集须对整个区域 G 而言一致有界.

为前面指定的数值. 因此 $Nf_n > \delta\alpha^2$, 这和 $\lim\limits_{n\to\infty} Nf_n = 0$ 的前提相矛盾. 第二个论断的证明与此类似; 读者可自行推演.

范数有界的同等连续函数集的另一性质, 称为该集合的光滑性[1], 可叙述如下: 设 r 为正整数, $c_1, c_2, \cdots, c_r$ 为任意数, 其绝对值有一确定上界, 例如可以是 1. 在这些条件下, 存在一个正数 $\delta(\varepsilon)$, 它只依赖于 r 和正数 ε 且随 ε 趋近于零, 使得当关系 $N(c_1f_1 + c_2f_2 + \cdots + c_rf_r) < \varepsilon$ 成立时, 就有

$$|c_1f_1 + c_2f_2 + \cdots + c_rf_r| < \delta,$$

其中 $f_1, f_2, \cdots, f_r$ 为集合中的任意 r 个函数.

上述论断可由前面刚证明的定理得出, 只要注意这样的事实, 就是若把我们的函数集扩大而使它包含所有的线性组合 $c_1f_1 + c_2f_2 + \cdots + c_rf_r$(其中 r 固定, $|c_i|$ 有界), 它依然是同等连续的.

函数序列 $f_1, f_2, \cdots$ 的光滑性又可以表述为以下性质: 从它的任一子序列中可以选出一个一致收敛的子序列.

下述较为一般性的定理很容易由聚点定理得出: 设

$$\begin{array}{cccc} p_{11}(x), & p_{12}(x), & \cdots, & p_{1r}(x), \\ p_{21}(x), & p_{22}(x), & \cdots, & p_{2r}(x), \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array}$$

为包含 r 个函数的集合 $G_1, G_2, \cdots$ 的序列, 所有的函数在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 内为一致有界并同等连续. 于是可以选出一子序列 $G_{n_1}, G_{n_2}, \cdots$ 使得函数组 $p_{n_ik}(x)(k = 1, 2, \cdots, r)$ 当 i 增加时一致收敛于 r 个连续函数 $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_r(x)$.

事实上, 可选一适当的子序列而使第一列的函数一致收敛; 从这个子序列中又可以选出一子序列而使第二列也一致收敛. 将这步骤继续再重复 $r-2$ 次就行了.

2.3 独立性测度和维数

2.3.1 独立性测度

r 个函数 $f_1, f_2, \cdots, f_r$ 线性相关或线性独立的简单判别法可由类似于用在 n 维空间矢量的步骤得出. 我们首先考虑 r 个变数 $t_1, t_2, \cdots, t_r$ 的二次型

$$\begin{aligned} K(t,t) = N(t_1f_1 + \cdots + t_rf_r) &= \int (t_1f_1 + \cdots + t_rf_r)^2 dx \\ &= \sum_{i,k=1}^{r} (f_if_k)t_it_k. \end{aligned} \tag{12}$$

1) 这个有关于函数集的概念, 不应和第 1 章中所引进的"光滑函数"的概念相混淆.

因为 $K(t,t)$ 是正定的, 它的最小本征值 m (也就是说, 当 t_i 在条件 $\sum_{i=1}^{r} t_i^2 = 1$ 下变动时 K 的最小值) 一定是非负的. 我们称 m 为函数 $f_1, f_2, \cdots, f_r$ 的"**独立性测度**". 显然函数 $f_1, f_2, \cdots, f_r$ 线性相关的充要条件为独立性测度 m 等于零. 在线性独立的情形则 m 标示出"独立的程度"

函数组 $f_1, \cdots, f_r$ 的格拉姆行列式

$$\Gamma(f_1, \cdots, f_r) = \begin{vmatrix} (f_1 f_1) & \cdots & (f_1 f_r) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (f_r f_1) & \cdots & (f_r f_r) \end{vmatrix} \tag{13}$$

等于零是和其独立性测度为零的事实相等当的. 这是因为格拉姆行列式就等于 K 的所有本征值的乘积. 此外, 由于这些本征值是非负的, 所以就有 $m^r \leqslant \Gamma \leqslant mM^{r-1}$, 其中 M 是 K 的最大本征值, 而 $\Gamma \geqslant 0$[1]. 因此, **格拉姆行列式等于零是函数$f_1, f_2, \cdots, f_r$ 线性相关的充要条件.**

假如我们作 r 个线性独立的函数 $f_1, f_2, \cdots, f_r$ 的线性组合 $f = \sum_{i=1}^{r} u_i f_i$, 此外并设 f 已规一化, 我们发现, 每个系数 u_i 在绝对值上皆不能超过上界 $1/\sqrt{m}$, 后者只依赖于独立性测度. 事实上, 若写

$$v_i = \frac{u_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{r} u_i^2}},$$

由 m 的定义我们显然有

$$m \leqslant \int \left(\sum_{i=1}^{r} v_i f_i \right)^2 dx = \frac{Nf}{\sum_{i=1}^{r} u_i^2} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{r} u_i^2};$$

因此 $\sum_{i=1}^{r} u_i^2 \leqslant 1/m$. 假如把独立性测度大于一正下界 μ 的一组 r 个函数正交规一化, 也就是说, 把这些函数代换为其适当的规一化线性组合, 则所有系数的绝对值皆不超过 $1/\sqrt{\mu}$.

2.3.2 一函数序列的渐近维数

规一化的函数序列 $f_1, f_2, \cdots$(或者更一般地说是范数有界的序列) 称为恰是 r 维的, 假如序列中的任意 $r+1$ 个函数皆线性相关, 而同时序列中至少存在一组

1) 这个不等式是施瓦茨不等式的推广; 事实上, 当 $r = 2$ 时, 它就是施瓦茨不等式.

r 个线性独立的函数. 在这种情形下, 序列中的每一个函数皆可表为 r 个基函数 $g_1, g_2, \cdots, g_r$ 的线性组合 $t_1g_1 + t_2g_2 + \cdots + t_rg_r$, 其中 $t_1, t_2, \cdots, t_r$ 为常系数; 于是整个函数序列为“线性空间”(或“线性族”) $t_1g_1 + t_2g_2 + \cdots + t_rg_r$ 的元素所组成.

假如函数序列 $f_1, f_2, \cdots$ 不是有限维的, 就存在两种可能性: (1) 对每一任意大的正整数 s 而言, 皆存在包含 s 个元素的函数组 $f_{n_1}, f_{n_2}, \cdots, f_{n_s}$, 其中下标 $n_1, n_2, \cdots, n_s$ 可任意大, 而这些函数的独立性测度在一确定下界之上, 它不依赖于 n_i 而可能依赖于 s. 在这种情形, 我们规定函数序列的渐近维数为 ∞[1]. (2) 对充分大的 s 而言, $f_{n_1}, \cdots, f_{n_s}$ 的独立性测度随下标 $n_1, n_2, \cdots, n_s$ 的无限增加而趋于零. 这时, 最小的整数 r 使得当 $s > r$ 时独立性测度就趋于零的, 叫做序列的渐近维数. 特别地, 若 Nf_n 随 n 的增大而趋于零, 则 $r = 0$. 假如一序列的渐近维数为 r, 而且我们舍去足够多个位于序列开头的函数, 那么剩下的函数中的任意 $r+1$ 个皆“几乎”线性无关.

这个用语是与 n 维空间矢量类比而得出的. 假如渐近维数为 r 的序列中相当后的那些函数都可以用由 r 个基函数所张的线性空间中的函数以任意准确度加以逼近, 那么这个用语就很有意义了. 可是一般说来, 除非按照勒贝格理论推广函数和积分的概念, 否则前面的说法是不成立的. 因为我们希望不越出初等理论的范畴, 所以我们如 2.2 节中所讨论的那样在一些限制作用的假定下来证明上述论断. 事实上, 我们干脆地假定所讨论的函数序列是平滑的.

在这种情形, 就有以下的定理: 若 $f_1, f_2, \cdots$ 为一平滑函数序列其渐近维数为 r, 则存在 r 个线性独立的函数 (可取为正交规一化的) $g_1, g_2, \cdots, g_r$, 使得当 n 充分大时, 每一个函数 f_n 和线性空间 $t_1g_1 + \cdots + t_rg_r$ 中的某个函数之差小于任意正数 ε, 而且不存在基函数少于 r 个的空间具有同样的性质.

上述线性空间可以这样确定: 设 $G_1, G_2, \cdots, G_m, \cdots$ 为一串包含 r 个函数 $f_{m_1}, f_{m_2}, \cdots, f_{m_r}$ 的函数组, $f_{m_1}, \cdots, f_{m_r}$ 属于所给的序列, 而且每一组的独立性测度皆在一确定正下界 μ 之上, 而下标 $m_i (i = 1, \cdots, r)$ 当 m 增加时趋于无穷. 于是以 G_m 中函数为基的线性函数空间 S_m, 当 m 增大时, 一致收敛于由 r 个线性独立的函数 $g_1, g_2, \cdots, g_r$ 所形成的极限空间 T. 所谓收敛, 意思是指当 m 充分大时, S_m 中每一规一化的函数都和 T 中一函数相差任意小.

为了证明的方便, 我们引进一空间和一函数之间的距离的概念. 我们说一函数 f 和一线性函数空间 S 间的距离小于正数 d, 假如 S 中有一个函数它和 f 的差的绝对值到处小于 d. 同样我们说两个线性函数空间 S 和 S^* 间的距离小于 d, 假如一空间中的每一规一化函数都和另一空间中的某一规一化函数的差的绝对值小于 d.

1) 无穷维 (渐近) 序列最简单的实例为正交标准函数序列, 这序列中任一有限子集的独立性测度皆为 1.

因此立刻得知, 当 m 和 n 充分大时, 函数 f_n 和空间 S_m 之间的距离为任意小. 因为当 m 及 n 充分大时 $f_n, f_{m_1}, \cdots, f_{m_r}$ 的独立性测度必为任意小. 我们的函数序列既然是平滑的, 所以存在 $r+1$ 个数 $u_0, u_1, \cdots, u_r$, $\sum_{i=0}^{r} u_i^2 = 1$, 使得 $|u_0 f_n + u_1 f_{m_1} + \cdots + u_r f_{m_r}|$ 为任意小. 注意 u_0 的绝对值不能随 m 和 n 的增加而为任意小, 因为否则 $f_{m_1}, f_{m_2}, \cdots, f_{m_r}$ 的独立性测度将为任意小而与当初假定它有下界 μ 的事实矛盾. 所以我们可以用 u_0 去除 $u_0 f_n + u_1 f_{m_1} + \cdots + u_r f_{m_r}$, 令 $u_i/u_0 = -t_i$, 而得出这样的结论, 就是当 m 和 n 充分大时, 函数 f_n 与在线性空间 S_m 中适当选择的一函数 $t_1 f_{m_1} + \cdots + t_r f_{m_r}$ 相差任意小. 由此可见, 当 m 和 n 充分大时, 空间 S_n 和 S_m 之间的距离也为任意小. 现在令 ε 为一小正数 (往后将使其充分小), 而令 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ 为一串满足条件 $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i = \varepsilon$ 的正数. 此外, 再令 m_i 为一正整数, 使得当 $n \geqslant m_i$, $m \geqslant m_i$ 时, S_n 和 S_m 间的距离小于 ε_i. 现在我们在空间 S_{m_1} 中取任意 r 个规一化的函数 $h_{11}, h_{12}, \cdots, h_{1r}$, 并定出空间 $S_{m_2}(m_2 > m_1)$ 的规一化函数 $h_{21}, h_{22}, \cdots, h_{2r}$, 使有 $|h_{2i} - h_{1i}| < \varepsilon_1$(这是可能的, 因为 S_{m_1} 和 S_{m_2} 间的距离小于 ε_1). 同样我们可以在空间 $S_{m_3}(m_3 > m_2)$ 中定出一组规一化的函数 $h_{31}, h_{32}, \cdots, h_{3r}$ 使得 $|h_{3i} - h_{2i}| < \varepsilon_2$, 等等. 因为 $|h_{pi} - h_{qi}| < \varepsilon_p + \cdots + \varepsilon_{q-1} (p < q)$, 所以对任意固定的 i 函数序列 $h_{ni}(i = 1, \cdots, r)$ 皆一致收敛于一极限函数 g_i, 而 $|g_i - h_{1i}| < \varepsilon$. 若选 ε 充分小, 则当函数 $h_{11}, h_{12}, \cdots, h_{1r}$ 的独立性测度不等于零时, 函数 $g_1, g_2, \cdots, g_r$ 的独立性测度也不等于零; 因此 g_i 线性独立. 函数 $g_1, g_2, \cdots, g_r$ 显然满足所有我们的要求.

2.4　魏尔斯特拉斯逼近定理、幂函数和三角函数的完备性

2.4.1　魏尔斯特拉斯逼近定理

幂函数是完备函数组的最简单的例子:

$$1, x, x^2, x^3, \cdots.$$

这些函数在任一闭区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上形成一完备函数组; 事实上, 我们有以下魏尔斯特拉斯逼近定理[1]: *在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上的任意连续函数可用在此区间上的多项式一致逼近.*

1) K. T. W. 魏尔斯特拉斯: 任意实函数分析表示的可能性 (Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen reeller Argumente). Sitzungsber. K. Akad. Wiss. Berlin: 1885, 633–639, 789–805; 全集第三卷. Berlin: 1903.

这条定理所肯定的还不止于完备性; 它肯定了一致收敛的可能性, 而不仅限于平均收敛.

证明这条定理时, 我们假设区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 整个在区间 $0 < x < 1$ 之内; 于是, 我们可以找到两个数 α 和 β, 满足 $0 < \alpha < a < b < \beta < 1$. 假定原先在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上连续的函数 $f(x)$ 已连续地扩张到了整个区间 $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ 之上.

试考虑积分

$$J_n = \int_0^1 (1-v^2)^n dv,$$

我们立即看出, 当 n 增大时 J_n 收敛于零. 现在若令 δ 为区间 $0 < \delta < 1$ 之内的一个定数, 并令

$$J_n^* = \int_\delta^1 (1-v^2)^n dv,$$

我们可以断定有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{J_n^*}{J_n} = 0,$$

这意思是说, 当 n 充分大时, 由 0 到 δ 的积分在 0 到 1 的整个积分中占了绝大部分. 事实上, 当 $n \geqslant 1$ 时

$$J_n > \int_0^1 (1-v)^n dv = \frac{1}{n+1},$$

$$J_n^* = \int_\delta^1 (1-v^2)^n dv < (1-\delta^2)^n(1-\delta) < (1-\delta^2)^n,$$

$$\frac{J_n^*}{J_n} < (n+1)(1-\delta^2)^n,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} \frac{J_n^*}{J_n} = 0.$$

现在我们假定 $a \leqslant x \leqslant b$ 而作式子

$$P_n(x) = \frac{\displaystyle\int_\alpha^\beta f(u)[1-(u-x)^2]^n du}{\displaystyle\int_{-1}^1 (1-u^2)^n du} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

这是 x 的 $2n$ 次多项式, 其系数为一些定积分的商. 我们来证明这些多项式给出了所要求的近似.

作代换 $u = v + x$, 得分子的表达式为

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(u)[1-(u-x)^2]^n du = \int_{\alpha-x}^{\beta-x} f(v+x)(1-v^2)^n dv$$
$$= \int_{\alpha-x}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\beta-x} = I_1 + I_2 + I_3,$$

其中正数 δ 系在区间 $0<\delta<1$ 之内, 其值下面再加以确定. 积分 I_2 可变换为

$$I_2 = f(x)\int_{-\delta}^{\delta}(1-v^2)^n dv + \int_{-\delta}^{\delta}[f(v+x)-f(x)](1-v^2)^n dv$$
$$= 2f(x)(J_n - J_n^*) + \int_{-\delta}^{\delta}[f(v+x)-f(x)](1-v^2)^n dv.$$

根据 $f(x)$ 在区间 $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ 内的一致连续性. 对任意小的 $\varepsilon > 0$ 可以选择 $\delta = \delta(\varepsilon)$, 它在区间 $0<\delta<1$ 之内, 只依赖于 ε, 而使得当 $|v| \leqslant \delta$ 并 $a \leqslant x \leqslant b$ 时, 有 $|f(v+x)-f(x)| \leqslant \varepsilon$. 于是

$$\left|\int_{-\delta}^{\delta}[f(v+x)-f(x)](1-v^2)^n dv\right| \leqslant \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta}(1-v^2)^n dv$$
$$< \varepsilon \int_{-1}^{1}(1-v^2)^n dv = 2\varepsilon J_n.$$

此外, 若 M 为 $|f(x)|$ 在 $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ 内之极大, 我们可得

$$|I_1| < M\int_{-1}^{-\delta}(1-v^2)^n dv = MJ_n^*,$$
$$|I_3| < M\int_{\delta}^{1}(1-v^2)^n dv = MJ_n^*.$$

$P_n(x)$ 中的分子既然等于 $2J_n$, 所以就有

$$|P_n(x) - f(x)| < 2M\frac{J_n^*}{J_n} + \varepsilon.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}(J_n^*/J_n) = 0$, 故适当选择 n 可使上式右端小于 2ε; 因此在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上 $P_n(x)$ 的确一致地逼近 $f(x)$.

2.4.2　推广到多元函数的情形

以完全同样的方式可以证明 m 个变数 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的函数 f, 若在 $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$ $(i = 1, 2, \cdots, m;\ 0 < \alpha_i < a_i < b_i < \beta_i < 1)$ 内连续, 就可以用下面的多项式一致

逼近:

$$P_n(x_1,\cdots,x_m)$$
$$=\frac{\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\cdots\int_{\alpha_m}^{\beta_m}f(u_1,\cdots,u_m)[1-(u_1-x_1)^2]^n\cdots[1-(u_m-x_m)^2]^n du_1\cdots du_m}{\left[\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-u^2)^n du\right]^m}.$$

2.4.3 函数及其微商同时用多项式逼近

类似的论据可导致以下一般的结果: 若 $f(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 以及其直到 k 阶的微商在闭区域 $a_i\leqslant x_i\leqslant b_i$ 内连续, 则 f 可用多项式 $P(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 一致逼近, 而 f 的直到 k 阶的各阶微商则由多项式的相应各阶微商一致逼近.

证明这一点时, 我们假定 $0<a_i<b_i<1$, 而且还假定函数及其微商皆已连续地扩充到一较大的方形区域 $\alpha_i\leqslant x_i\leqslant\beta_i$ $(0<\alpha_i<a_i<b_i<\beta_i<1)$ 之上, 而使得该函数及其 $(k-1)$ 并 $k-1$ 以下的各阶微商在较大的区域的边界上为零. 于是在上一节中定义的多项式 $P_n(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 就给出所要求的近似. 验证这一点时只要在积分号下对 x_i 求微商, 再用对 u_i 的微商代替对 x_i 的微商, 最后利用假定中的边界条件分部积分变换所得的积分就行了.

2.4.4 三角函数的完备性

由 2.4.1 节可以推出以下重要事实, 即正交规一化的三角函数组

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad\frac{\cos\ x}{\sqrt{\pi}},\quad\frac{\sin\ x}{\sqrt{\pi}},\quad\frac{\cos\ 2x}{\sqrt{\pi}},\quad\frac{\sin\ 2x}{\sqrt{\pi}},\quad\cdots\tag{14}$$

在区间 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 内是完备的. 事实上我们可以证明以下含义更多的定理: *在区间 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 内连续而且满足 $f(-\pi)=f(\pi)$ 的任意函数可用三角多项式*

$$\frac{\alpha_0}{2}+\sum_1^n(\alpha_\nu\ \cos\ \nu x+\beta_\nu\ \sin\ \nu x)$$

一致逼近, 其中 α_ν 和 β_ν 为常数.

证明这定理时, 我们写 θ 以代替 x, 并考虑一 ξ,η 平面, 其极坐标为 ρ 和 $\theta(\xi=\rho\ \cos\ \theta,\ \eta=\rho\ \sin\ \theta)$. 于是函数

$$\varphi(\xi,\eta)=\rho f(\theta)$$

在整个 ξ,η 平面上连续, 而且在单位圆 $\xi^2+\eta^2=1$ 上和所给的函数 $f(\theta)$ 一致. 按魏尔斯特拉斯逼近定理, 这个函数在包含单位圆的一方形内可以用 ξ 和 η 的多项式一致逼近. 我们若令 $\rho=1$, 就可以看出 $f(\theta)$ 可以用 $\cos\ \theta$ 和 $\sin\ \theta$ 的多项式一

致逼近. 可是由熟知的三角公式, 每一个这样的三角多项式都可以写成前面所提出的形式

$$\frac{\alpha_0}{2}+\sum_1^n(\alpha_\nu\ \cos\ \nu x+\beta_\nu\ \sin\ \nu x).$$

凡不满足周期性条件$f(-\pi)=f(\pi)$ 的连续函数 $f(x)$ 可以用满足这条件的连续函数 $g(x)$ 来代替, 而使得积分 $\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-g(x))^2dx$ 为任意小. 由此可见凡连续函数皆可用三角多项式平均逼近, 所以三角函数成一完备组.

2.5 傅里叶级数

2.5.1 基本定理的证明

由 2.1 节的讨论和三角函数的正交性可得以下结论: 由所谓傅里叶多项式

$$s_n(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_1^n(a_\nu\ \cos\ \nu x+b_\nu\ \sin\ \nu x),$$

其中

$$\begin{aligned}a_\nu&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\ \cos\ \nu xdx\quad(\nu=1,2,\cdots,n),\\ b_\nu&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\ \sin\ \nu xdx\quad(\nu=1,2,\cdots,n),\\ a_0&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\end{aligned}\tag{15}$$

我们可以得到 $f(x)$ 的最好 n 级平均近似.

上述多项式又可以用更简明的形式写出:

$$s_n(x)=\sum_{\nu=-n}^{n}\alpha_\nu e^{i\nu x}\begin{cases}2\alpha_\nu=a_\nu-ib_\nu, & \nu>0,\\ 2\alpha_0=a_0, & \\ 2\alpha_\nu=a_\nu+ib_\nu, & \nu<0,\end{cases}$$

$$\alpha_\nu=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-i\nu t}dt\quad(\nu=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots),\tag{15'}$$

这里我们利用了关系式 $\cos\ \nu x+i\ \sin\ \nu x=e^{i\nu x}$.

这些多项式虽然给出了最好平均近似, 但并非不加证明就可以断定它们也给出函数的一致近似 —— 也就是说, 并不能断定无穷级数 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n(x)$ 一致收敛并代表函数 $f(x)$. 这个问题乃是傅里叶级数论的中心问题.

为方便计, 我们假定函数 $f(x)$ 最初只定义在区间 $-\pi < x < \pi$ 上, 然后再利用函数方程 $f(x+2\pi) = f(x)$ 按周期性延拓到这区间之外. 此外, 在每个跳断点上, 我们要求函数值等于其左右极限的算术平均值, 即 $f(x+0) = \lim_{h\to 0} f(x+h)$ 和 $f(x-0) = \lim_{h\to 0} f(x-h)(h>0)$ 的平均值; 也就是说, 我们令 $f(x) = \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$.

于是就有以下的定理: *任意在区间$-\pi \leqslant x \leqslant \pi$内分段连续并以$2\pi$为周期的函数可以展成一傅里叶级数*; 也就是说, 傅里叶多项式

$$s_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

当 n 增大时收敛于 $f(x)$. 此外, 我们还将证明: *在该函数为连续的任意闭区间内, 傅里叶级数的收敛是一致的.*

我们将先对 $f(x)$ 为连续的而只有其微商 $f'(x)$ 有断点的情形来证明这定理. 若用 α_ν 和 β_ν 来表示 $f'(x)$ 的展开系数, 我们就有

$$\alpha_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos \nu x dx = \frac{\nu}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin \nu x dx = \nu b_\nu,$$

$$\beta_\nu = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin \nu x dx = -\frac{\nu}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \nu x dx = -\nu a_\nu,$$

$$\alpha_0 = 0.$$

由于 $f'(x)$ 是分段连续的, 我们有完备性关系

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'^2(x)dx = \sum_{\nu=1}^{\infty}(\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^2(a_\nu^2 + b_\nu^2).$$

因此

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\nu=n}^{m}(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)\right| &= \left|\sum_{\nu=n}^{m}\frac{1}{\nu}(\nu a_\nu \cos \nu x + \nu b_\nu \sin \nu x)\right| \\ &\leqslant \sqrt{\sum_{\nu=n}^{m}\nu^2(a_\nu^2+b_\nu^2)}\cdot\sqrt{\sum_{\nu=n}^{m}\frac{1}{\nu^2}} \\ &\leqslant \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'^2 dx}\cdot\sqrt{\sum_{\nu=n}^{m}\frac{1}{\nu^2}}.\end{aligned}$$

这就立刻证明了无穷级数

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

的绝对和一致收敛性, 而由于三角函数的完备性, 这个级数就代表 $f(x)$.

为了在函数不连续而分段平滑时证明傅里叶展开式的正确性, 我们从考虑这一类型中的一个特殊函数开始, 即由以下式子定义的函数:

$$h(x) = \frac{1}{2}(\pi - x), \quad 0 < x < 2\pi,$$

$$h(0) = 0,$$

$$h(x + 2\pi) = h(x).$$

这个函数在 $x = \pm 2k\pi (k = 0, 1, \cdots)$ 这些点上的跳跃为 π. 函数的傅里叶系数为

$$a_0 = 0, \quad a_\nu = 0, \quad b_\nu = \frac{1}{\nu} \quad (\nu = 1, 2, \cdots).$$

假如傅里叶展开对分段连续的函数成立, 我们就该有

$$h(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin\ \nu x}{\nu}.$$

验证这个式子时我们首先作函数

$$g(x) = h(x)(1 - \cos\ x) = 2h(x)\ \sin^2 \frac{x}{2},$$

它是到处连续并且分段平滑的. 根据前面论据, 这函数的傅里叶级数 $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu\ \sin\ \nu x$ 一致收敛并等于 $g(x)$. 系数 β_ν 和 b_ν 间有关系

$$\beta_\nu = b_\nu - \frac{1}{2}(b_{\nu-1} + b_{\nu+1}) \quad (\nu = 2, 3, \cdots),$$

$$\beta_1 = b_1 - \frac{1}{2} b_2.$$

假如我们令 $\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu\ \sin\ \nu x = s_n(x)$, $\sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu\ \sin\ \nu x = \sigma_n(x)$, 我们就有

$$(1 - \cos x) s_n(x) = \sigma_n(x) - \frac{1}{2} b_n\ \sin(n+1)x + \frac{1}{2} b_{n+1} \sin\ nx.$$

当 n 增加时, b_n 收敛于零, 而和数 $\sigma_n(x)$ 一致收敛于 $g(x)$. 因此 $(1 - \cos\ x) s_n(x)$ 在区间 $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ 内也一致收敛于 $g(x)$, 而 $s_n(x)$ 本身在任一不包含点 $x = 0$ 的闭子区间内一致收敛于 $h(x)$.

在除去的点 $x = 0$ 上, 所有部分和 s_n 皆为零, 所以 $\lim_{n \to \infty} s_n(0) = 0$. 由此可见在间断点上级数的值也等于 $h(x)$ 的值, 也就是说等于左右极限 $-\frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{\pi}{2}$ 的算术平均.

由于函数 $h(x)$ 在 $x=0$ 的跳跃为 π, 函数 $h(x-\xi)$ 在 $\xi=x$ 的跳跃也为 π 而在基本区间其他各处则连续. 可是 $f(x)$ 既然是分段连续的函数而在区间 $0\leqslant x<2\pi$ 的点 $x=\xi_i$ $(i=1,\cdots,r)$ 上跳跃 $s(\xi_i)=f(\xi_i+0)-f(\xi_i-0)$, 因此

$$F(x)=f(x)-\sum_{\nu=1}^{r}\frac{s(\xi_i)}{\pi}h(x-\xi_i)$$

为一到处连续的函数, 它和 $f(x)$ 皆有分段连续的一级微商. 所以 $F(x)$ 可以展成绝对和一致收敛的傅里叶级数. 可是函数

$$\sum_{\nu=1}^{r}\frac{s(\xi_i)}{\pi}h(x-\xi_i)$$

也可以展成傅里叶级数, 它在不包含间断点的任一闭区间内一致收敛, 因此在本节开始所叙述的定理完全得证.

2.5.2 重傅里叶级数

三角函数又可以用来构造高维空间一"方块"上的正交函数组. 为简单计, 我们只考虑"平面"(二维) 的情形. 可是所有我们的论据都可以用于任意维数.

函数

$$\begin{aligned}
&\cos\ \mu s\ \cos\ \nu t &&(\mu=0,1,\cdots;\ \ \nu=0,1,\cdots),\\
&\sin\ \mu s\ \cos\ \nu t &&(\mu=1,2,\cdots;\ \ \nu=0,1,\cdots),\\
&\cos\ \mu s\ \sin\ \nu t &&(\mu=0,1,\cdots;\ \ \nu=1,2,\cdots),\\
&\sin\ \mu s\ \sin\ \nu t &&(\mu=1,2,\cdots;\ \ \nu=1,2,\cdots),
\end{aligned}$$

在方形 $0\leqslant s\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 上成一正交组. 用复指数来写出展开公式最方便. 假如 $F(s,t)$ 可以展为一致收敛的重傅里叶级数, 则级数为

$$F(s,t)=\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}a_{\mu\nu}e^{i(\mu s+\nu t)},$$

其中

$$a_{\mu\nu}=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}ds\int_0^{2\pi}dtF(s,t)e^{-u(\mu s+\nu t)}.$$

函数组的完备性, 因之完备性关系

$$\sum_{\mu,\nu=-\infty}^{\infty}|a_{\mu\nu}|^2=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|F(s,t)|^2dsdt,$$

可以从由一元完备组作出多元完备组的一般定理得出.

此外, 若 $\dfrac{\partial^2F(s,t)}{\partial s\partial t}$ 存在并分段连续, 则 $F(s,t)$ 的傅里叶级数绝对并一致收敛.

2.5.3 傅里叶系数的数量级

假如周期函数 $f(x)$ 连续, 并且有直到 $(h-1)$ 阶的连续微商, 又假如其 h 阶微商分段连续, 若 $f(x)$ 之傅里叶展开为 $f(x)=\sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty}\alpha_\nu e^{i\nu x}$, 则当 $|\nu|\geqslant 1$ 时, 系数 α_ν 可如下加以估计:

$$2|\alpha_\nu|=\sqrt{a_\nu^2+b_\nu^2}\leqslant\frac{c}{\nu^h},$$

其中 c 为一常数. 因此, 函数愈是平滑, 其傅里叶系数之趋近于零愈快.

如果将傅里叶系数的表示式 (15′) 分部积分 h 次, 就立刻可以得到以上的关系.

2.5.4 基本区间长度的更改

若函数 $f(x)$ 以 $2l$ 为其周期, 它可以展成级数

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(a_\nu\ \cos\ \nu\frac{\pi}{l}x+b_\nu\ \sin\ \nu\frac{\pi}{l}x\right),$$

其中

$$a_\nu=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(t)\ \cos\ \nu\frac{\pi}{l}tdt,$$

$$b_\nu=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(t)\ \sin\ \nu\frac{\pi}{l}tdt,$$

又可以把它写为

$$f(x)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\alpha_\nu e^{i\nu\left(\frac{\pi}{l}\right)x},$$

$$a_\nu=\frac{1}{2l}\int_0^{2l}f(t)e^{-i\nu\left(\frac{\pi}{l}\right)^t}dt.$$

2.5.5 例子

关于傅里叶级数理论的应用的简单例子, 读者可参看初等教科书[1]. 在这里我们将利用傅里叶展开导出 θ 函数所满足的函数方程以及泊松的一般公式.

θ 函数

$$\theta(x)=\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}e^{-\pi\mu^2x}\quad(x>0)$$

的函数方程为

$$\theta(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\theta\left(\frac{1}{x}\right).$$

1) 例如见柯朗. 微积分学. 第一卷, 第 440–446 页 (有中译本).

PDG

证明这个关系时, 我们令

$$\varphi(y)=\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}e^{-\pi(\mu+y)^2x};$$

显然 $\varphi(y)$ 为 y 的周期函数, 以 1 为周期, 而且具有对 y 的各阶微商, 因此可以把它展为傅里叶级数

$$\varphi(y)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\alpha_\nu e^{2\pi i\nu y},$$

其中

$$\alpha_\nu=\int_0^1\varphi(t)e^{-2\pi i\nu t}dt=\int_0^1\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}e^{-\pi(\mu+t)^2x-2\pi i\nu t}dt.$$

因为求和和积分的符号对所有的 $x>0$ 而言皆可更换, 我们就得到系数 α_ν:

$$\begin{aligned}\alpha_\nu&=\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\int_0^1 e^{-\pi(\mu+t)^2x-2\pi i\nu(\mu+t)}dt\\&=\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\int_\mu^{\mu+1}e^{-\pi t^2x-2\pi i\nu t}dt\\&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi t^2x-2\pi i\nu t}dt\\&=e^{-(\pi\nu^2/x)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi x(t+(i\nu/x))^2}dt=\frac{e^{-\pi\nu^2/x}}{\sqrt{x}};\end{aligned}$$

这是因为沿平行于实轴的直线 $\mathscr{I}_m t=\nu/x$ 积分 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}dz$ 的值, 和沿实轴的一样, 都是等于 $\sqrt{\pi}$ (若对函数 e^{-z^2} 应用柯西定理, 取线路为以 $-T,+T,+T+i\nu/x$, $-T+i\nu/x$ 为顶点的矩形, 则令 T 趋于无穷时, 在矩形铅垂方向两边上的积分趋于零; 这是因为被积函数一致收敛于零, 而积分路线之长为常数 ν/x). 因此我们有

$$\varphi(y)=\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}e^{-\pi\nu^2/x}e^{2\pi i\nu y},$$

特别地, 当 $y=0$, 就有

$$\theta(x)=\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}e^{-\pi\mu^2x}=\varphi(0)=\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}e^{-\pi\nu^2/x}=\frac{1}{\sqrt{x}}\theta\left(\frac{1}{x}\right).$$

在这里我们把傅里叶展开应用于一个特殊类型的无穷级数变换. 这个例子中的方法在最近用来处理一些出现于数论中的解析函数时, 证明它很是有效.

上面的讨论可导致一非常重要而一般性的无穷级数变换公式, 即所谓**泊松求和公式**. 设 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(2\pi n)$ 为一无穷级数, 其中 $\varphi(x)$ 为 x 的连续且连续可微函数, 而级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(2\pi n+t)$ 和 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\varphi'(2\pi n+t)$对在区间 $0\leqslant t<2\pi$ 内所有的 t 而言绝对并一致收敛. 于是第二个级数是第一个的微商, 而第一个就可以在区间 $0\leqslant t<2\pi$ 内展成一收敛的傅里叶级数:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(2n\pi+t)&=\frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}e^{i\nu t}\int_0^{2\pi}e^{-i\nu\tau}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(2n\pi+\tau)d\tau\\&=\frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}e^{i\nu t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}\varphi(2n\pi+\tau)e^{-i\nu\tau}d\tau.\end{aligned}$$

最后一式中对 n 求和的级数可以这样变换:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}\varphi(2n\pi+\tau)e^{-i\nu\tau}d\tau&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)}\varphi(\tau)e^{-i\nu\tau}d\tau\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau)e^{i\nu\tau}d\tau.\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(2n\pi+t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}e^{i\nu t}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau)e^{i\nu\tau}d\tau.$$

最后, 若令 $t=0$, 我们就得到

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(2\pi n)=\frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau)e^{-i\nu\tau}d\tau.$$

这就是泊松公式. 显然, 当所有在公式中出现的积分存在, 级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(2\pi n+t)$ 在区间 $0\leqslant t<2\pi$ 上一致收敛, 而且该级数表示的函数可以展成傅里叶级数时, 公式就成立.

2.6 傅里叶积分

2.6.1 基本定理

考虑函数 $f(x)$, 它在区间 $-l<x<l$ 内可表为傅里叶级数

$$f(x)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\alpha_\nu e^{i\nu(\pi/l)x},\quad \alpha_\nu=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)e^{-i\nu(\pi/l)t}dt.$$

很自然地, 我们想使 l 趋于 ∞, 因为这样一来不再需要按周期延拓 f, 而我们就有希望得到定义在整个实轴上的非周期函数的表示式. 我们将仍假定 $f(x)$ 在任何有限区间内分断平滑, 而且在间断点上函数之值为其左右极限的算术平均. 此外我们还加上一个假定, 即积分 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ 存在.

若令 $\pi/l=\delta$, 我们就得到

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\delta\int_{-l}^{l}f(t)e^{-i\nu\delta(t-x)}dt.$$

令 $l\to\infty$, 于是 $\delta\to 0$, 我们发现很可能有下列公式

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}du\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{iu(t-x)}dt; \tag{16}$$

只要证明可以这样取极限就行了, 对实函数 $f(x)$ 而言, 这公式又可写为

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}du\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos u(t-x)dt. \tag{17}$$

证明上述"傅里叶积分公式"成立时, 直接验证方程 (16) 或 (17) 比证明极限步骤的合法更为简单.

我们从积分公式

$$\lim_{v\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}f(x+t)\frac{\sin vt}{t}dt=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]=f(x)$$

开始, 其中 a 为任意正数. 这个公式对任意分段平滑的函数皆成立, 是狄利克雷所证明的[1]. 由这公式可得

$$\begin{aligned}\pi f(x)&=\lim_{v\to\infty}\int_{-a}^{a}f(x+t)dt\int_{0}^{v}\cos utdu\\&=\lim_{v\to\infty}\int_{0}^{v}du\int_{-a}^{a}f(x+t)\cos utdu\\&=\int_{0}^{\infty}du\int_{-a}^{a}f(x+t)\cos utdt.\end{aligned}$$

我们说对 t 的积分可扩张为由 $-\infty$ 到 ∞. 因为若 $A>a$, 我们有

$$\int_{0}^{v}\int_{-A}^{A}-\int_{0}^{v}\int_{-a}^{a}=\int_{0}^{v}\int_{-A}^{-a}+\int_{0}^{v}\int_{a}^{A}=\int_{-A}^{-a}\int_{0}^{v}+\int_{a}^{A}\int_{0}^{v},$$

1) 这个公式一般也被用作傅里叶级数论的基础. 其证明可参看微积分教科书, 例如, 见柯朗. 微积分学. 第一卷, 第 450 页.

根据假设, $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx = C$ 存在, 故由上式可得

$$\begin{aligned}\left|\int_0^v\int_{-A}^{A} - \int_0^v\int_{-a}^{a}\right| &\leqslant \left|\int_{-A}^{-a} f(x+t)\frac{\sin\ vt}{t}dt\right| + \left|\int_a^A f(x+t)\frac{\sin\ vt}{t}dt\right| \\ &\leqslant \frac{1}{a}\left(\int_{-A}^{-a}|f(x+t)|dt + \int_a^A |f(x+t)|dt\right) \\ &\leqslant \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+t)|dt = \frac{C}{a}.\end{aligned}$$

现在若固定 v 而令 A 趋于无穷, 就得到

$$\left|\int_0^v\int_{-\infty}^{\infty} - \int_0^v\int_{-a}^{a}\right| \leqslant \frac{C}{a},$$

再令 $v\to\infty$ 求极限, 我们有

$$\left|\lim_{v\to\infty}\int_0^v\int_{-\infty}^{\infty} - \pi f(x)\right| \leqslant \frac{C}{a}.$$

适当选择 a 可使上式右端为任意小, 因此证明了所要的 (17) 式.

因为 $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ \cos\ u(t-x)dt$ 为 u 的偶函数, 上式又可写为

$$\pi f(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} du\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ \cos\ u(t-x)dt.$$

另一方面, $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ \sin\ u(t-x)dt$ 为 u 的奇函数; 所以

$$0 = \frac{1}{2}i\int_{-\infty}^{\infty} du\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ \sin\ u(t-x)dt,$$

只要式中出现的积分收敛[1]. 由前一式中减去最后一式, 我们就得到公式 (16), 它当 $f(x)$ 为连续时恒成立.

2.6.2 把上节结果推广到多元函数的情形

重复应用公式 (16)就可以得出对多元分段平滑的函数类似的公式; 这些公式在分段连续函数的连续点上成立; 即

$$4\pi^2 F(x_1,x_2) = \iiiint F(t_1,t_2)e^{-i[u_1(t_1-x_1)+u_2(t_2-x_2)]}dt_1du_1dt_2du_2,$$

1) 凡使 $f(x)$ 为连续的点 x 上积分就收敛. 在间断点上积分发散, 这由以下函数很容易看出:

$$f(x)=1\quad 当\quad |x|\leqslant 1,\quad f(x)=0\quad 当\quad |x|>1.$$

只要假定积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F(t_1,x_2)|dt_1 \quad \text{和} \quad \int_{-\infty}^{\infty}|F(x_1,t_2)|dt_2$$

存在. 对于 n 个变量的一般情形, 在类似的假设下我们有

$$\begin{aligned}&(2\pi)^n F(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}F(t_1,\cdots,t_2)e^{-i[u_1(t_1-x_1)+\cdots+u_n(t_n-x_n)]}dt_1du_1\cdots dt_ndu_n.\end{aligned}$$

积分的次序由公式中所写微分号的次序所确定.

2.6.3 互逆公式

如果我们令

$$g(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-iut}dt,$$

则傅里叶积分定理 (16) 具有特别优美的形式; 因为它表明了方程

$$g(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-iut}dt, \quad f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(u)e^{iut}du$$

中任一个为另一个的逆. 若假定方程之左方为已知, 则它们乃是一对所谓积分方程, 其中的任一个为另一个的解, 而二者乃是互逆的. 对偶函数或奇函数而言, 我们依次有两组实的方程

$$g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}f(t)\ \cos\ utdt, \quad f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}g(u)\ \cos\ utdu$$

和

$$g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}f(t)\ \sin\ utdt, \quad f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}g(u)\ \sin\ utdu.$$

对多元函数则相应的互逆公式为

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int\cdots\int g(\xi_1,\cdots,\xi_n)e^{i(\xi_1x_1+\cdots+\xi_nx_n)}d\xi_1\cdots d\xi_n,$$

$$g(\xi_1,\cdots,\xi_n)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int\cdots\int f(x_1,\cdots,x_n)e^{-i(\xi_1x_1+\cdots+\xi_nx_n)}dx_1\cdots dx_n,$$

自然是当 f 和 g 在整个空间有直到 $(n+1)$ 阶的微商时上式才成立.

2.7　傅里叶积分的例子

1. 傅里叶积分公式 (17)

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}du\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\ \cos\ u(t-x)dt\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\ uxdu\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\ \cos\ utdt\\&\quad+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\sin\ uxdu\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\ \sin\ utdt,\end{aligned}$$

当 $f(x)$ 为偶函数时化为

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\ uxdu\int_0^{\infty}f(t)\ \cos\ utdt,$$

当 $f(x)$ 为奇函数时化为

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin\ uxdu\int_0^{\infty}f(t)\ \sin\ utdt.$$

2. 现在我们来考虑狄利克雷间断因子：设偶函数 $f(x)$ 如下定义：

$$f(x)=\begin{cases}1, & 当\quad |x|<1,\\ \dfrac{1}{2}, & 当\quad |x|=1,\\ 0, & 当\quad |x|>1;\end{cases}$$

我们可以用傅里叶积分把它表为

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\ uxdu\int_0^{1}\cos\ utdt\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\ u\ \cos\ ux}{u}du.\end{aligned}$$

右方那项叫做“狄利克雷间断因子”, 它在许多问题中都是很有用的.

3. 若对 $x>0$ 的情形, 我们取

$$f(x)=e^{-\beta x}\quad(\beta>0),$$

我们或者有

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\ uxdu\int_0^{\infty}e^{-\beta t}\ \cos\ utdt\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\beta\ \cos\ ux}{\beta^2+u^2}du.\end{aligned}$$

或者有

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin ux du \int_0^\infty e^{-\beta t}\sin ut dt$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{u\sin ux}{\beta^2+u^2}du;$$

当 x 为负时, 按偶函数开拓 $f(x)$, 就得到前一式, 若按奇函数开拓就得到后一式. 在第二种情形我们必须令 $f(0)=0$. 积分

$$\int_0^\infty \frac{\cos\ ux}{\beta^2+u^2}du = \frac{\pi}{2}\frac{e^{-\beta|x|}}{\beta} \quad (\beta>0)$$

有时叫做拉普拉斯积分.

4. 函数

$$f(x) = e^{-x^2/2}$$

是一个特别有启发性的例子. 在这个情形, 互逆的积分方程

$$g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\ \cos\ utdt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2/2}\ \cos\ utdt = e^{-u^2/2}$$

和

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(u)\ \cos\ utdu = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-u^2/2}\ \cos\ utdu = e^{-t^2/2}$$

事实上是等同的.

2.8 勒让德多项式

2.8.1 从幂函数 $1, x, x^2, \cdots$ 的正交化作出勒让德多项式

若将幂函数 $1, x, x^2, \cdots$ 在一给定区间上正交化, 例如在 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 上 (见 2.1 节), 我们就得到一完备正交规一函数组, 它在许多方面甚至于比三角函数组还要简单. 我们按这个步骤所做出的是一串正交规一多项式, 在差一个常因子 ± 1 的限度内它们是唯一确定的. 如果我们再要求每个多项式中 x 的最高幂次的系数为正, 则结果就是唯一的了.

在这里我们可告诉读者在差一个常因子外 (依赖于 n 而不依赖于 x), 这些多项式和多项式

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} \quad (n=1,2,\cdots)$$

等同, 后者即所谓勒让德多项式[1]. 因为很容易看出, 除了差一个常因子外只可能存在一组所有的幂次皆出现于其中的正交多项式, 所以我们只要证明 P_n 为 n 次多项式, 而且 $P_n(x)$ 所作成的这组多项式的确是正交的就够了. $P_n(x)$ 显然是 n 次多项式; 写出来则

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{n-\nu}\binom{n}{\nu}\frac{(2\nu)!}{(2\nu-n)!}x^{2\nu-n}$$
$$= \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{n-\nu}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\nu-1)}{(n-\nu)!(2\nu-n)!2^{n-\nu}}x^{2\nu-n}.$$

上式中有负幂数出现时即可舍去; 为此只要对于所有正整数 r 令 $(-r)! = \infty$, 负幂次就会自行消失. 当 n 为偶数时, 第一项乃是

$$(-1)^{n/2}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots n};$$

n 为奇数时则为

$$(-1)^{(n-1)/2}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots n}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(n-1)}x.$$

前几个勒让德多项式为

$$P_0(x) = 1,\quad P_1(x) = x,\quad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2},$$

$$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x,\quad P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^4 + \frac{3}{8}.$$

证明 $P_n(x)$ 成一正交组时, 我们用 $u_n(x)$ 表示 $(x^2-1)^n$. 于是对非负的整数 $m < n$ 我们就有

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)x^m dx = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} u_n^{(n)}(x)x^m dx = 0.$$

证明这一点时只要继续分部积分以除去因子 x^m, 并注意 $u_n(x)$ 直到 $(n-1)$ 阶的微商在积分区间的两端为零. 由此可得

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0 \quad (m < n),$$

也就是说任意两个不同的勒让德多项式乃是正交的. 为了求出必须知道的规一因

1) A. M. Legendre. Recherches sur l'attraction des sphéroides homogènes. Mém. math. phys. prés. a l'Acad. sc. par divers sav., Vol 10, 1785, 411–434; Recherches sur la figure des planètes. Mém. math. phys., Reg. de l'Acad. sc., 1784, 1787, 370–389.

子, 我们重复用分部积分来计算 $\int_{-1}^{1}[u_n^{(n)}(x)]^2dx$;

$$\int_{-1}^{1}u_n^{(n)}(x)u_n^{(n)}(x)dx=-\int_{-1}^{1}u_n^{(n-1)}u_n^{(n+1)}dx=\int_{-1}^{1}u_n^{(n-2)}u_n^{(n+2)}dx=\cdots$$

$$=(-1)^n\int_{-1}^{1}u_nu_n^{(2n)}dx=(2n)!\int_{-1}^{1}(1-x)^n(1+x)^ndx.$$

但

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^n(1+x)^ndx=\frac{n}{n+1}\int_{-1}^{1}(1-x)^{n-1}(1+x)^{n+1}dx=\cdots$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots1}{(n+1)(n+2)\cdots2n}\int_{-1}^{1}(1+x)^{2n}dx$$

$$=\frac{(n!)^2}{(2n)!(2n+1)}2^{2n+1},$$

因此

$$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx=\frac{2}{2n+1}.$$

所以我们要求的规一化多项式是

$$\varphi_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x)$$

$$=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{1}{2^nn!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

勒让德多项式 $P_n(x)$ 具有性质

$$P_n(1)=1;$$

这一点立刻可以看出, 只要按乘积法则求出 $(x-1)^n(x+1)^n$ 的 n 阶微商, 然后在所得的式子中令 $x=1$.

2.8.2 母函数

勒让德多项式在势论中特别重要, 在那里它们是作为一"母函数"的展开系数出现的. 试考虑平面上两个点, 其一离原点之距离为 1, 另一点离原点的距离为 $u<1$, 并设它们的矢径之间的角为 $\arccos x$. 于是这两点之间的距离为 $\sqrt{1-2ux+u^2}$. 现在假如我们把这段距离的倒数展成 u 的幂次, 则由二项式定理可得

$$\frac{1}{\sqrt{1-2ux+u^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}Q_n(x)u^n,\tag{18}$$

其中 $Q_n(x)$ 为 x 的 n 次多项式, 我们说上式左端的函数"产生"展开系数 $Q^n(x)$. 可以证明 $Q_n(x)$ 就是勒让德多项式 $P_n(x)$, 这只要利用二项式定理算出 $Q_n(x)$ 或者证明多项式 $Q_n(x)$ 遵守和 $P_n(x)$ 一样的正交性关系. 我们现在选择第二条路线.

由定义 (18) 立刻得到

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xu+u^2}}\frac{1}{\sqrt{1-2xv+v^2}}=\sum_{m,n=0}^{\infty}Q_n(x)Q_m(x)u^nv^m.$$

将左端对 x 由 -1 积分到 1, 经过初等的运算我们得到

$$\frac{1}{\sqrt{uv}}\log\frac{1+\sqrt{uv}}{1-\sqrt{uv}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}u^nv^n.$$

将右端逐项积分并令左右两端相应于 u^nv^m 的系数相等, 我们得到

$$\int_{-1}^{1}Q_n(x)Q_m(x)dx=\begin{cases}0, & 当\quad n\neq m,\\ \dfrac{2}{2n+1}, & 当\quad n=m.\end{cases}$$

在方程 (18) 中令 $x=1$, 我们有 $Q_n(1)=1$. 这样就完全证明了 $Q_n(x)$ 和 $P_n(x)$ 的等同性.

2.8.3　勒让德多项式的其他性质

(a) **递推公式**. 将母函数对 u 微分, 我们立刻得到相邻三个勒让德多项式之间的递推公式

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0. \tag{19}$$

(b) **微分方程**. n 阶勒让德多项式

$$y(x)=\frac{1}{2^nn!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

满足线性齐次二阶微分方程

$$(x^2-1)y''+2xy'-n(n+1)y=0 \tag{20}$$

或者

$$[(x^2-1)y']'-n(n+1)y=0. \tag{20'}$$

证明的办法是将方程 $(x^2-1)u'=2nxu$ 微分 $n+1$ 次, 其中 $u=(x^2-1)^n$, $u^{(n)}=2^nn!y$[1].

---

1) 由这方程可知 $P_n(x)$ 之根 (由罗尔定理知所有的根皆实根, 且在 $-1<x<1$ 之间) 皆为单根, 因为在任一重根处 $P_n(x)$ 之二阶及高阶微商将为零.

(c) **最小性**. 若将勒让德多项式 $P_n(x)$ 乘以 x^n 的系数的倒数 C 而使在 $CP_n(x)$ 中 x^n 的系数等于 1, 我们就得到具有以下最小性特征的多项式: 在所有首项系数为 1 的 n 次多项式中这些多项式和原点的平均距离为最小. 证明这一点时注意在积分 $\int_{-1}^{1}(x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0)^2dx$中被积函数可写成 $(CP_n(x)+c_{n-1}P_{n-1}(x)+\cdots+c_0)^2$. 所以积分等于

$$\frac{2C^2}{2n+1}+2\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{c_\nu^2}{2\nu+1},$$

当

$$c_0=c_1=\cdots=c_{n-1}=0$$

时, 上式取最小值.

2.9 其他正交组的例子

2.9.1 导致勒让德多项式的问题的推广

我们现在要把引起我们去定义勒让德多项式的那个问题加以推广.

设在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上给了一个非负的"权函数" $p(x)$, 我们的问题就在于研究将 $\sqrt{p(x)},x\sqrt{p(x)},x^2\sqrt{p(x)},\cdots$ 在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上正交化而得出的函数组.

像幂函数 $1,x,x^2,\cdots$ 一样, 这些函数自然是线性独立的. 在所得的正交函数组中, 显然 $\sqrt{p(x)}$ 前的因子为多项式 $Q_0(x),Q_1(x),\cdots$, 其次数依次为 0,1,$\cdots$. 这些多项式由正交规一条件唯一确定, 我们称之为"*以 $p(x)$ 为权的正交多项式*"[1].

例如, 若

$$a=-1,\quad b=1,\quad p(x)=1,$$

我们就得到勒让德多项式 $P_n(x)$; 若

$$a=-1,\quad b=1,\quad p(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

1) 若将多项式 $Q_0(x),Q_1(x),\cdots$ 乘一适当的因子, 则它们具有像勒让德多项式一样的最小性, 即当积分

$$\int p(x)(x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0)^2dx$$

的被积函数中的多项式为 $CQ_n(x)$ 时积分取最小值. 在这里被积函数中的多项式也可以写成 $Q_i(x)$ 的线性组合, 即 $(CQ_n(x)+c_{n-1}Q_{n-1}(x)+\cdots+c_0)$. 既然 $\sqrt{p(x)}Q_n(x)$ 是正交的 (事实上, 若适当定义 $Q_i(x)$, 它们是正交规一化的), 则积分等于 $C^2+\sum_{\nu=0}^{n-1}c_\nu^2$, 当 $c_0=c_1=\cdots=c_{n-1}=0$ 时积分取最小值.

就得到切比雪夫多项式

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos\,(n \text{ arc } \cos x);$$

若

$$a=-1, \quad b=1, \quad p(x)=\sqrt{1-x^2},$$

得到的是多项式

$$Q_n(x) = \frac{\sin\,[(n+1) \text{ arc } \cos x]}{\sqrt{1-x^2}};$$

若

$$a=0, \quad b=1, \quad p(x)=x^{q-1}(1-x)^{p-q} \quad (q>0, p-q>-1),$$

就得到雅可比多项式或超比多项式; 若

$$a=-\infty, \quad b=\infty, \quad p(x)=e^{-x^2},$$

有埃尔米特多项式; 若

$$a=0, \quad b=\infty, \quad p(x)=e^{-x},$$

就有拉盖尔多项式.

现在我们来更详细地研究切比雪夫、雅可比、埃尔米特和拉盖尔多项式.

2.9.2 切比雪夫多项式[1)]

切比雪夫多项式

$$T_0(x)=1, \quad T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\ \cos\,(n \text{ arc } \cos x) \quad (n \geqslant 1)$$

在区间 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 上以 $p(x)=1/\sqrt{1-x^2}$ 为权作成一组正交多项式[2)], 这是因为

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2^{n+m-2}}\int_0^{\pi} \cos\ n\theta\ \cos\ m\theta d\theta = 0, \quad 当 \quad m \neq n.$$

$T_n(x)$ 在区间 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 上的最大绝对值比任何其他定义在这区间上而首项系数为 1 的多项式的最大绝对值小; 也就是说, 它和零相差最小 (很容易看出, $T_n(x)$ 中 x^n 的系数为 1).

1) P. L. Tchebycheff. Sur les question de minima, qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions. Mém. Acad. sc. Pétersb., Ser. 6, Vol. 7, 1859, 199–291; 全集, 第一卷. 彼得堡: 1899, 271–378 页, 特别是 295–301 页.

2) 这些函数的确是多项式, 因为 $\cos\ n\theta$ 是 $\cos\ \theta$ 的多项式:

$$\cos\ n\theta = \cos^n\theta - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\ \sin^2\ \theta + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\theta\ \sin^4\ \theta - \cdots.$$

证明：令 $\arccos x = \theta$, 并考虑点 $x_k = \cos k\pi/n (k=0,1,\cdots,n)$, 在这些点上 $T_n(x)$ 和零的差度达到最大值. 显然, 当

$$\theta = 0, \quad \frac{\pi}{n}, \quad \frac{2\pi}{n}, \quad \cdots, \quad \pi,$$

我们有

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \frac{-1}{2^{n-1}}, \quad \frac{1}{2^{n-1}}, \cdots, \frac{(-1)^n}{2^{n-1}},$$

一般说来, 即

$$T_n(x_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}}.$$

假设多项式 $R_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots$ 在区间 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 上和零的差度小于 $T_n(x)$ 和零的差度, 则我们将有

$$T_n(x_0) - R_n(x_0) > 0, \quad T_n(x_1) - R_n(x_1) < 0,$$

$$T_n(x_2) - R_n(x_2) > 0, \cdots;$$

也就是说, 有理整函数 (多项式) $T_n(x) - R_n(x)$ 在点 x_k 上依次取正值和负值. 因此这个函数至少有 n 个根; 这是不可能的, 因为它最多只能是 $(n-1)$ 次多项式.

我们可以将 $T_n(x)$ 规一化, 只要除以因子

$$\sqrt{\int_{-1}^{1} T_n^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2^{2n-1}}}.$$

切比雪夫多项式也是一个母函数的展开系数, 即

$$\psi(x,t) = \frac{1-t^2}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)(2t)^n. \tag{21}$$

相邻三个切比雪夫多项式可由一递推公式联贯, 即当 $n \geqslant 2$ 时有

$$T_{n+1}(x) - xT_n(x) + \frac{1}{4}T_{n-1}(x) = 0. \tag{22}$$

当 $n < 2$ 时递推公式的形式稍有不同:

$$T_2 - xT_1 + \frac{1}{4}T_0 = -\frac{1}{4},$$

$$T_1 - xT_0 = 0.$$

切比雪夫多项式满足下列二阶齐次线性微分方程

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0. \tag{23}$$

2.9.3　雅可比多项式[1)]

在 $a=0, b=1$, 而权函数为

$$p(x)=x^{q-1}(1-x)^{p-q} \quad (q>0, p-q>-1)$$

时, 我们得到雅可比多项式 $G_n(p,q,x)$. 这些多项式又可以从超比级数

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\frac{\alpha}{1}\frac{\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{1\cdot 2}\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots \tag{24}$$

得出, 只要以负整数 $-n$ 代 β, $p+n$ 代 α, q 代 γ. 因此它们满足超比微分方程

$$x(1-x)y''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]y'-\alpha\beta y=0 \tag{25}$$

或

$$x(1-x)G_n''(x)+[q-(p+1)x]G_n'(x)+(p+n)nG_n(x)=0, \tag{25'}$$

它们是这个方程仅有的多项式解. 这些雅可比多项式的前几个为

$$\begin{aligned}
G_0(p,q,x)&=1,\\
G_1(p,q,x)&=1-\binom{1}{1}\frac{p+1}{q}x,\\
G_2(p,q,x)&=1-\binom{2}{1}\frac{p+2}{q}x+\binom{2}{2}\frac{(p+2)(p+3)}{q(q+1)}x^2,\\
G_3(p,q,x)&=1-\binom{3}{1}\frac{p+3}{q}x+\binom{3}{2}\frac{(p+3)(p+4)}{q(q+1)}x^2\\
&\quad-\binom{3}{3}\frac{(p+3)(p+4)(p+5)}{q(q+1)(q+2)}x^3,
\end{aligned}$$

或者, 一般地,

$$G_n(p,q,x)=\frac{x^{1-q}(1-x)^{q-p}}{q(q+1)\cdots(q+n-1)}\frac{d^n}{dx^n}[x^{q+n-1}(1-x)^{p+n-q}].$$

由这个式子可以看出雅可比多项式也可以由一母函数按以下关系定义:

$$\frac{(1-x)^{1-q}(1+x)^{q-p}(t-1+\sqrt{1-2tx+t^2})^{q-1}(t+1-\sqrt{1-2tx+t^2})^{p-q}}{t^{p-1}\sqrt{1-2tx+t^2}}$$

---

1) C. G. J. Jaobi. Untersuchungen über die Differentialgleichurgen der hypergeometrischen Reihe. Journ. f. d. reine u. angew. Math., Vol. 56, 1859, 149–165; 全集, 第六卷. 柏林: 1891, 184–202 页.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{q+n-1}{n} G_n\left(p, q, \frac{1-x}{2}\right) t^n.$$

当 $p = q = 1$ 时, 它们化为勒让德多项式

$$P_n(x) = G_n\left(1, 1, \frac{1-x}{2}\right) = F\left(n+1, -n, 1, \frac{1-x}{2}\right); \tag{26}$$

当 $p = 0,\ q = \frac{1}{2}$ 时, 我们事实上得到切比雪夫多项式

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} G_n\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} F\left(n, -n, \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2}\right). \tag{27}$$

2.9.4 埃尔米特多项式 [1)]

埃尔米特多项式 $H_n(x)$ 是区间 $-\infty < x < \infty$ 上以 $p(x) = e^{-x^2}$ 为权的正交多项式. 最方便的办法是用一母函数 $\psi(x,t)$ 来定义它们:

$$\psi(x,t) = e^{-t^2+2tx} = e^{x^2} e^{-(t-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n. \tag{28}$$

由这个方程立刻可得

$$H_n(x) = \left(\frac{\partial^n \psi(x,t)}{\partial t^n}\right)_{t=0} = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}. \tag{29}$$

n 级埃尔米特多项式 $H_n(x)$ 于是等于 $(-1)^n e^{x^2}$ 乘以函数 e^{-x^2} 的 n 阶微商. 由关系 $\partial\psi(x,t)/\partial x = 2t\psi(x,t)$ 可得

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x) \quad (n \geqslant 1); \tag{30}$$

由 $\partial\psi(x,t)/\partial t + 2(t-x)\psi(x,t) = 0$ 我们得到

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0 \quad (n \geqslant 1). \tag{31}$$

结合 (30) 和 (31) 我们得到 $H_n(x)$ 的线性齐次二阶微分方程

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0 \quad (n \geqslant 0). \tag{32}$$

---

1) C. Hermite. Sur un nouveau développement en sèrie de fonctions. C. R. Acad. sc. Paris, Vol. 58, 1864, 93–100, 266–273; 全集, 第二卷. 巴黎: 1908, 293–312 页. Sur quelques développements en série de fonctions de plusieurs variables. C. R., Vol. 60, 1865, 370–377, 432–440, 461–466, 512–518; 全集, 319–346 页.

埃尔米特多项式的前几个为

$$H_0(x)=1, \qquad H_1(x)=2x,$$
$$H_2(x)=4x^2-2, \qquad H_3(x)=8x^3-12x,$$
$$H_4(x)=16x^4-48x^2+12.$$

一般说来, n 级埃尔米特多项式为

$$H_n(x)=(2x)^n-\frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4}-\cdots.$$

当 n 为偶数时末一项为

$$(-1)^{n/2}\frac{n!}{(n/2)!},$$

当 n 为奇数时末一项为

$$(-1)^{(n-1)/2}\frac{n!}{((n-1)/2)!}2x.$$

在 $n>m$ 的情形, 埃尔米特多项式的正交性[1)]可由积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx=(-1)^n\int_{-\infty}^{\infty}H_m(x)\frac{d^ne^{-x^2}}{dx^n}dx$$

连续分部积分得出, 只要记住公式 (30) 并注意 e^{-x^2} 以及其各阶微商当 x 为无穷时皆为零:

$$\int_{-\infty}^{\infty}H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx=(-1)^{n-1}\cdot 2m\int_{-\infty}^{\infty}H_{m-1}(x)\frac{d^{n-1}e^{-x^2}}{dx^{n-1}}dx=\cdots$$
$$=(-1)^{n-m}2^m m!\int_{-\infty}^{\infty}H_0(x)\frac{d^{n-m}e^{-x^2}}{dx^{n-m}}dx=0.$$

将 $H_n(x)$ 正交化时, 我们令 $n=m$, 就有

$$\int_{-\infty}^{\infty}H_n^2(x)e^{-x^2}dx=2^n n!\int_{-\infty}^{\infty}H_0(x)e^{-x^2}dx=2^n n!\sqrt{\pi}.$$

因此正交规一组为

$$\varphi_\nu(x)=\frac{H_\nu(x)e^{-x^2/2}}{\sqrt{2^\nu\nu!\sqrt{\pi}}}\quad(\nu=0,1,2,\cdots).$$

1) 正交性又可以利用母函数得出.

2.9.5 拉盖尔多项式[1)]

拉盖尔多项式 $L_n(x)$ $(a=0,\ b=+\infty,\ p(x)=e^{-x})$ 是函数 x^ne^{-x} 的 n 级微商中 e^{-x} 前的因子：

$$\begin{aligned}L_n(x)&=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})\\&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)n(n-1)\cdots(k+1)x^k\\&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}\\&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{[n(n-1)\cdots(n-k+1)]^2}{k!}x^{n-k}\\&=(-1)^n\left(x^n-\frac{n^2}{1!}x^{n-1}+\frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2}-\cdots+(-1)^nn!\right);\end{aligned}$$

例如,

$$\begin{aligned}&L_0(x)=1, && L_1(x)=-x+1,\\&L_2(x)=x^4-4x+2, && L_3(x)=-x^3+9x^2-18x+6,\\&L_4(x)=x^4-16x^3+72x^2-96x+24.\end{aligned}$$

由关系

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(t)}{n!}t^n&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)\frac{1}{k!}x^kt^n\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kx^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)t^n\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kx^k}{k!}\frac{t^k}{(1-t)^{k+1}}=\frac{e^{-xt/(1-t)}}{(1-t)},\end{aligned}$$

知拉盖尔多项式具有母函数如下：

$$\psi(x,t)=\frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t}.$$

关系式

$$(1-t)^2\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=(1-t-x)\psi(x,t)$$

1) E. Laguerre. Sur l'intégrale $\int_x^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}dx$, Bull. Soc . Math. France, Vol. 7, 1879, 72–81; 全集, 第一卷. 巴黎, 1898, 428–437 页.

可导致递推公式

$$L_{n+1}(x) - (2n+1-x)L_n(x) + n^2 L_{n-1}(x) = 0 \quad (n \geqslant 1). \tag{33}$$

由关系

$$(1-t)\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} = -t\psi(x,t) \quad (n \geqslant 1)$$

可得公式

$$L_n'(x) - nL_{n-1}'(x) = -nL_{n-1}(x) \quad (n \geqslant 1), \tag{34}$$

结合 (33) 和 (34) 可以得出公式

$$xL_n'(x) = nL_n(x) - n^2 L_{n-1}(x) \quad (n \geqslant 1), \tag{35}$$

这样就得到拉盖尔多项式 $L_n(x)$ 所满足的线性齐次二阶微分方程

$$xy'' - (1-x)y' + ny = 0. \tag{36}$$

由式子

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x}x^k L_n(x)dx &= \int_0^\infty x^k \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})dx \\ &= -k\int_0^\infty x^{k-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^n e^{-x})dx \\ &= k(k-1)\int_0^\infty x^{k-2}\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^n e^{-x})dx = \cdots \\ &= (-1)^k k!\int_0^\infty \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x^n e^{-x})dx = 0 \quad (n > k),\end{aligned}$$

可得正交性关系

$$\int_0^\infty e^{-x}L_n(x)L_m(x)dx = 0 \quad (n > m).$$

规一化因子则为

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x}L_n^2(x)dx &= \int_0^\infty (-1)^n x^n \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})dx \\ &= n!\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = (n!)^2;\end{aligned}$$

所以函数

$$\varphi_\nu(x) = \frac{e^{-x/2}L_\nu(x)}{\nu!} \quad (\nu = 0, 1, 2\cdots)$$

作成一正交规一组[1].

---

1) 正交关系在这里也可以利用母函数得出.

PDG

2.9.6 拉盖尔函数和埃尔米特函数的完备性

拉盖尔函数和埃尔米特函数的完备性还有待讨论, 因为到现在为止完备性只是对有限区间才是证明了的. 我们称一函数组在区间 $0 \leqslant x < \infty$ 上是完备的, 假如任意一个使积分 $\int_0^\infty f^2(x)dx$ 存在的分段连续函数 $f(x)$ 皆可用这些函数的线性组合以任意准确度平均逼近.

证明拉盖尔函数的完备性[1)]时, 我们以 $e^{-x/2}$ 乘恒等式

$$\psi(x,t) = \frac{1}{1-t}e^{-tx/(1-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} L_n(x)$$

的两端而得到相应于正交规一化的拉盖尔函数

$$\varphi_n(x) = e^{-x/2}\frac{L_n(x)}{n!}$$

的恒等式

$$g(x,t) = \frac{1}{1-t}e^{-\frac{1}{2}[(1+t)/(1-t)]x} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \varphi_n(x).$$

无穷级数 $\sum_{n=0}^{\infty} t^n \varphi_n(x)$ 当 $|t| < 1$ 时平均收敛于母函数 $g(x,t)$. 这一点由估计

$$\int_0^\infty \left(g(x,t) - \sum_{n=0}^{N} t^n \varphi_n(x)\right)^2 dx = \frac{1}{1-t^2} - \sum_{n=0}^{N} t^{2n}$$

可以立刻看出, 以上估计则可由关系式

$$\int_0^\infty g^2(x,t)dt = \frac{1}{1-t^2},$$

和

$$\int_0^\infty g(x,t)\varphi_n(x)dt = t^n$$

导出.

因为当 t 由 -1 到 $+1$ 时, $\alpha = \frac{1}{2}(1+t)/(1-t)$ 可取 0 到 ∞ 之间的所有各值, 所以凡形如 $e^{-\alpha x}$ 的函数皆可在区间 $0 \leqslant x < \infty$ 上用拉盖尔函数的线性组合以任意准确度平均逼近. 设函数 $f(x)$ 在这区间上分段连续并平方可积. 令 $e^{-x} = \xi$, 则 $f(x)$ 变为在区间 $0 < \xi \leqslant 1$ 上的分段连续函数 $k(\xi)$. 此外, 函数 $k(\xi)/\sqrt{\xi}$ 为平方可

1) 这个证明是冯 · 诺伊曼在一次谈话中指出的.

积, 故可用闭区间 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上的分段连续函数 $G(\xi)$ 平均逼近 (例如, 可取 $G(\xi)$ 在原点一充分小的邻域内恒等于零, 而在区间 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 其他各处等于 $k(\xi)/\sqrt{\xi}$). 函数 $G(\xi)$, 也就是 $k(\xi)/\sqrt{\xi}$, 可用多项式

$$h_n(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \cdots + a_n\xi^n$$

平均逼近. 因此 $f(x)$ 可在区间 $0 \leqslant x < \infty$ 上用如下形状的式子平均逼近:

$$\sqrt{\xi}h_n(\xi) = e^{-x/2}(a_0 + a_1e^{-x} + a_2e^{-2x} + \cdots + a_ne^{-nx}),$$

所以也就可以用拉盖尔函数的组合平均逼近. 这个事实和完备性关系

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu^2 = \int_0^\infty f^2(x)dx$$

的成立是等当的, 其中 c_ν 表示展开系数 $c_\nu = \displaystyle\int_0^\infty f(x)\varphi_\nu(x)dx$.

埃尔米特函数的完备性可根据拉盖尔函数的完备性加以证明. 任一平方可积的函数 $f(x)$ 为一偶函数 f_1 和一奇函数 f_2 的和 $f_1(x) + f_2(x)$. 对这二函数中的任一个而言, 可用代换 $x^2 = u$ 把要证的完备性关系化为拉盖尔函数的完备性关系. 证明的详细步骤从略.

2.10 补充材料和问题

2.10.1 等周问题的赫尔维茨解[1)]

“等周问题”乃是求一给定周长的简单平面闭曲线而使它包含的面积为最大的问题. 问题的解已知为一圆. 我们只限于考虑分段平滑的曲线. 赫尔维茨是按以下方法解决这问题的:

设

$$x = x(s), \quad y = y(s), 0 \leqslant s < L$$

为一分段平滑的连续闭曲线的参数表示式, 曲线的周长为 L, 面积为 F. 参数 s 为弧长. 我们引进一个新参数 $t = 2\pi s/L$ 以代替 s, 当 s 由 0 变到 L 时, t 由 0 变到 2π. 依次用 a_ν, b_ν 和 c_ν, d_ν 表示 x 和 y 的傅里叶系数; 于是 $\dfrac{dx}{dt}$ 和 $\dfrac{dy}{dt}$ 的傅里叶系数为 νb_ν, $-\nu a_\nu$ 和 νd_ν, $-\nu c_\nu$. 于是关系式

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2,$$

1) A. Hurwitz. Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier. Ann. Éc. Norm., Ser. 3, Vol. 19, 1902, 357–408, esp. 392–397.

$$F=\int_0^{2\pi} x\frac{dy}{dt}dt$$

和完备性关系 (9) 及 (9′) 导致

$$2\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}dt=\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^2(a_\nu^2+b_\nu^2+c_\nu^2+d_\nu^2),$$

$$\frac{F}{\pi}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\frac{dy}{dt}dt=\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu(a_\nu d_\nu-b_\nu c_\nu).$$

由此可得

$$L^2-4\pi F=2\pi^2\sum_{\nu=1}^{\infty}[(\nu a_\nu-d_\nu)^2+(\nu b_\nu+c_\nu)^2+(\nu^2-1)(c_\nu^2+d_\nu^2)]\geqslant 0.$$

显然只有当

$$b_1+c_1=0,\quad a_1-d_1=0,$$

$$a_\nu=b_\nu=c_\nu=d_\nu=0\quad(\nu=2,3,\cdots)$$

时等式才能成立, 也就是说须有

$$x=\frac{1}{2}a_0+a_1\ \cos\ t+b_1\ \sin\ t,$$
$$y=\frac{1}{2}c_0-b_1\ \cos\ t+a_1\ \sin\ t.$$

这是圆的参数方程. 由此可见, 所有分段平滑的连续闭曲线满足"等周不等式"

$$L^2-4\pi F\geqslant 0,\tag{37}$$

其中 L 为周长, F 为面积. 当且仅当曲线为一圆时等式才成立. 这就证明了圆为等周问题的解.

2.10.2 互逆公式

设

$$\int_0^1 g(u)du=0,\quad \int_0^1 f(t)dt=0,$$

而且

$$g(u+1)=g(u),\quad f(t+1)=f(t),$$

试证明以下二公式相等当[1]：

$$f(t)=\int_0^1 g(u)\ \cot\ \pi(t-u)du,$$

$$-g(u)=\int_0^1 f(t)\ \cot\ \pi(u-t)dt.$$

这里积分取“柯西主值”. 证明时可用傅里叶级数论或柯西积分定理.

2.10.3　傅里叶积分和平均收敛性

用 2.5 节中处理傅里叶级数理论的方法也可以得出傅里叶积分的理论; 我们仍从平均收敛和完备性的概念出发.

设实的或复的函数 $f(x)$ 在每一有限区间内分段连续, 并设积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx,\quad \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx$$

存在. 我们试图求出函数 $f(x)$ 的, 以积分形式

$$\int_{-T}^{T}\varphi(t)e^{ixt}dt$$

表达的最佳平均近似; 也就是说, 对于一定的 T 值我们试图使积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)-\int_{-T}^{T}\varphi(t)e^{ixt}dt\right|^2dx$$

尽可能的小. 不难证明

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)-\int_{-T}^{T}\varphi(t)e^{ixt}dt\right|^2dx\\=&\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx+2\pi\int_{-T}^{T}|\varphi(x)-g(x)|^2dx-2\pi\int_{-T}^{T}|g(x)|^2dx,\end{aligned}$$

其中

$$g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{ix\xi}d\xi,$$

所以当

$$\varphi(t)=g(t)$$

时积分取最小值. 此外, 令 $T\to\infty$, 求极限可得完备性关系

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^2dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx.$$

我们不在这里证明这个事实, 也不再进一步作导致傅里叶积分定理的讨论.

---

1) 试参看 Hilbert. Integralgleichungen. 75 页.

PDG

2.10.4 由傅里叶级数和积分所得的谱分解

凡是当我们要把一种给定的现象或函数表示成一些周期现象或函数的叠加时,我们就会碰到傅里叶级数或积分. 这样的表示就是所谓该给定函数的**谱分解**. 如果在区间 $-l \leqslant x \leqslant l$ 上函数 $f(x)$ 的傅里叶级数为 $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \alpha_\nu e^{i\pi\nu x/l}$, 则称函数 $f(x)$"分解"为有"断续频率" $\nu\pi/l(\nu = 0, 1, \cdots)$ 及"振幅"

$$|\alpha_\nu| = \left| \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) e^{-i\pi\nu x/l} dx \right|$$

的一些周期函数. 如果考虑的是无限区间 $-\infty < x < \infty$, 则称函数 $f(x)$ 分解为"连续谱", 其"谱强度"在频率 u 为

$$g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iux} dx.$$

一个在物理学中极被重视的例子[1]是函数

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{i\omega x}, \quad 当 \quad |x| < l, \\ f(x) &= 0, \qquad 当 \quad |x| > l, \end{aligned}$$

这相当于包含着 $n = l\omega/\pi$ 个波的有限的一段正余弦波列, 它的谱分解乃是

$$g(u) = \int_{-l}^{l} e^{i(\omega-u)x} dx = \frac{2 \ \sin\,(\omega - u)l}{\omega - u}.$$

函数 $|g(u)|$ 当 $u = \omega$ 时有极大, 当该波列中波的个数 n 变大时这一点表现得尤为显著. 当 n 很大时, 在一任意小的区间 $\omega - \delta \leqslant u \leqslant \omega + \delta$ 之外谱的强度比之于其极大值可为任意小.

2.10.5 稠密函数组

一函数组称为是稠密的[2], 假如它具有这样的性质: 凡可以由该函数组中有限个函数的组合任意平均逼近的 $f(x)$ 皆可由该函数组任一无限子集中的函数平均逼近. 所含各函数皆相等的函数组是平庸的稠密组的一个例子. 非平庸稠密函数组存在这一重要的事实很容易根据以下定理[3]得到证实: 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$ 为随 n 的增大而

1) 这个例子在光学中是很有意义的; 因为有限长的正余弦波列不相应于一条鲜明的谱线而相应于一段宽度有限的谱, 它当波列变长时越变越窄且越变越强.

2) 这里我们用的是赫 · 明兹的定义.

3) G. Szegö. Über dichte Funktionenfamilien, Berichte der sächs. Akad. d. Wiss. zu Leipzig, Vol. 78, 1926, 373–380.

趋于无穷的正数, 则函数

$$\frac{1}{x+\lambda_1},\quad \frac{1}{x+\lambda_2},\quad \cdots,\quad \frac{1}{x+\lambda_n},\quad \cdots$$

在任一有限区间内作成一完备组.

由这条定理立刻可知上述函数组是稠密的, 因为 $\{\lambda_n\}$ 的任意子序列依然满足定理的要求.

因为有魏尔斯特拉斯定理, 所以只要证明任一幂函数 x^m 可由函数 $1/(x+\lambda_n)$ 一致地逼近就可以了. 有理函数

$$x^m\frac{\lambda_p\lambda_{p+1}\cdots\lambda_q}{(x+\lambda_p)(x+\lambda_{p+1})\cdots(x+\lambda_q)}$$

当 p 和 $q\,(q\geqslant p)$ 增加时趋近于 x^m, 而且在任一有限正区间内是一致趋近的. 假如我们恒取 $q-p\geqslant m$, 则因我们可以假设所有的 λ_n 彼此皆不相等, 这个有理函数总可以分解为部分分数而写为

$$\frac{A_p}{x+\lambda_p}+\frac{A_{p+1}}{x+\lambda_{p+1}}+\cdots+\frac{A_q}{x+\lambda_q},$$

其中, $A_p, A_{p+1},\cdots,A_q$ 为常数. 可是这就是所考虑的函数组中一些函数的线性组合.

赫 · 明兹还给出了稠密函数组的其他例子[1].

2.10.6　赫 · 明兹关于幂函数完备性的一个定理

明兹[2]证明了以下有趣的定理: 幂函数 $1, x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2},\cdots$ 的无限序列, 其中幂次是正的且趋于无穷, 在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 内完备的充要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}$ 发散.

2.10.7　费耶求和定理

由魏尔斯特拉斯逼近定理, 我们的结论是凡连续的周期函数皆可用三角多项式一致逼近. 根据以下由费耶[3]发现的定理, 这些用来作逼近的三角多项式很容易造出来, *设 $f(x)$ 为连续的周期函数, 并设 $s_n(x)$ 为其傅里叶级数的第 n 个部分和, 则算术*

1) H. Müntz. Umkehrung bestimmter Integrale und absolute Approximation. Ch. II, Dichte Funktionensysteme, Math. Zeitschr., Vol. 21, 1924, 104–110.

2) H. Müntz. Über den Approximationssatz von Weierstrass. Festschr. H. A. Schwarz. Berlin: Jalius Springer, 1914, 303; O. Szász. Über die Approximation stetiger Funktionen durch Lineare Aggregate von Potenzen. Math. Ann., Vol. 77, 1916, 482–496.

3) L. Fejér. Untersuchungen über Fouriersche Reihen. Math. Ann., Vol. 58, 1904, 51–69.

平均

$$S_n(x) = \frac{s_1(x) + s_2(x) + \cdots + s_n(x)}{n}$$

$$= \frac{2}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left(\frac{\sin \dfrac{nt}{2}}{2 \sin \dfrac{t}{2}} \right)^2 dt$$

的序列一致收敛于$f(x)$.

对傅里叶积分也有类似定理: 设 $f(x)$ 在任一有限区间上连续, 并设 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$ 存在. 令

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-ix\xi} d\xi$$

以及

$$s_T(x) = \int_{-T}^{T} g(t) e^{ixt} dt.$$

则算术平均

$$S_T(x) = \frac{1}{T} \int_0^T s_T(x) dT = \frac{2}{\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) \left(\frac{\sin \dfrac{Tt}{2}}{t} \right)^2 dt$$

的序列在任一有限区间上一致收敛于 $f(x)$. 特别地, 若 $f(x)$ 在整个区间 $-\infty < x < \infty$ 上一致连续, 则 $S_T(x)$ 在整个区间上一致收敛.

2.10.8 梅林反演公式 [1)]

定理 1 令 $s = \sigma + t_i$ 为一复变数. 设函数 $f(s)$ 在条形 $\alpha < \sigma < \beta$ 内正规, 并设 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(\sigma + ti)| dt$ 在条形内收敛. 此外, 又令函数 $f(s)$ 在条形 $\alpha + \delta \leqslant \sigma \leqslant \beta - \delta (\delta > 0$ 为任意定数) 内随 $|t|$ 的增加而一致趋于零. 若对正实数 x 和固定的 σ 我们定义

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - \infty i}^{\sigma + \infty i} x^{-s} f(s) ds, \tag{38}$$

---

1) H. Mellin. Über den Zusammenhang zwischen den linearen Differentialund Differenzengleichungen. Acta Math., Vol. 25, 1902, 139–164, esp. 156–162; M. Fujiwara. Über Abelsche erzeugende Funktionen und Darstellbarkeitsbedingungen von Funktionen durch Dirichletsche Reihen. Tohoku math. J., Vol. 17, 1920, 363–383, esp. 379–383; H. Hamburger. Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion(Erste Mitteilung). Math. Zeitschr., Vol. 10, 1921, 240–254; esp. 242–247.

则在条形 $\alpha<\sigma<\beta$ 内

$$f(s)=\int_0^\infty x^{s-1}g(x)dx. \tag{39}$$

证明：因为根据假设，对 $\alpha+\delta\leqslant\sigma\leqslant\beta-\delta$ 当 $|t|\to\infty$ 时 $f(s)$ 一致收敛于零，(38) 中的积分路线可以平行于它自己而移动，只要保持在条形 $\alpha<\sigma<\beta$ 之内；因此 $g(x)$ 不依赖于 σ. 假如选两个横标 σ_1 和 σ_2，其中 $\alpha<\sigma_1<\sigma<\sigma_2<\beta$，则

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^{s-1}g(x)dx=&\int_0^1 x^{s-1}dx\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1-\infty i}^{\sigma_1+\infty i}x^{-s_1}f(s_1)ds_1\\&+\int_1^\infty x^{s-1}dx\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_2-\infty i}^{\sigma_2+\infty i}x^{-s_2}f(s_2)ds_2=J_1+J_2.\end{aligned}$$

在这些积分中，积分的次序可以互换，因为对互换后的积分我们有估计

$$|J_1|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty|f(\sigma_1+ti)|dt\int_0^1 x^{-1+(\sigma-\sigma_1)}dx<\infty,$$

$$|J_2|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty|f(\sigma_2+ti)|dt\int_1^\infty x^{-1+(\sigma-\sigma_2)}dx<\infty.$$

因此我们得到

$$\int_0^\infty x^{s-1}g(x)dx=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_2-\infty i}^{\sigma_2+\infty i}\frac{f(s_2)}{s_2-s}ds_2-\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1-\infty i}^{\sigma_1+\infty i}\frac{f(s_1)}{s_1-s}ds_1.$$

根据柯西积分公式，上式右端的差等于 $f(s)$，因为在连接铅垂线 $s=\sigma_2$ 和 $s=\sigma_1$ 的二水平线段上的积分当 $|t|\to\infty$ 时趋于零 (因为 $f(s)\to 0$).

定理 2 *设 $g(x)$ 当 $x>0$ 时分段平滑，并设 $\int_0^\infty x^{\sigma-1}g(x)dx$ 当 $\alpha<\sigma<\beta$ 时绝对收敛，则反演公式 (38) 为 (39) 之推论.*

证明：令 $x=e^u$. 我们于是有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i}x^{-s}f(s)ds&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{-u(\sigma+ti)}dt\int_{-\infty}^\infty e^{v(\sigma+ti)}g(e^v)dv\\&=\frac{e^{-u\sigma}}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty dt\int_{-\infty}^\infty e^{it(v-u)}e^{v\sigma}g(e^v)dv.\end{aligned}$$

由傅里叶积分定理 (16)，最后一式等于 $e^{-u\sigma}e^{u\sigma}g(e^u)=g(x)$；所以定理得证.

梅林积分变换的例子：

(a) 令

$$g(x)=\begin{cases}1, & 当\quad 0<x<1,\\ \dfrac{1}{2}, & 当\quad x=1,\\ 0, & 当\quad x>1;\end{cases}$$

因为积分 $\int_0^\infty x^{\sigma-1}g(x)dx$ 当 $\sigma>0$ 时绝对收敛, 我们有

$$f(s)=\int_0^\infty x^{s-1}g(x)dx=\frac{1}{s}\quad(\sigma>0).$$

由此可得

$$g(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i}\frac{x^{-s}}{s}ds\quad(\sigma>0).$$

这个公式在狄利克雷级数论中很重要.

(b) 由 Γ 函数的定义

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx\quad(\sigma>0)$$

可得

$$e^{-x}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i}x^{-s}\Gamma(s)ds\quad(\sigma>0).$$

(c) 公式

$$\Gamma(s)\zeta(s)=\int_0^\infty\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx,\quad(\sigma>1)$$

(其中 $\zeta(s)$ 表示黎曼 zeta 函数) 可得

$$\frac{1}{e^x-1}=\int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i}x^{-s}\Gamma(s)\zeta(s)ds\quad(\sigma>1).$$

(d) 下式

$$\begin{aligned}\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)&=\int_0^\infty x^{s-1}\sum_{\nu=1}^\infty e^{-\pi\nu^2x}dx\\&=\int_0^\infty x^{s-1}\frac{\theta(x)-1}{2}dx\quad(\sigma>1)\end{aligned}$$

的反演为

$$\theta(x)=1+\frac{1}{\pi i}\int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i}x^{-s}\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)ds\quad(\sigma>1).$$

梅林变换是分析数论中重要的工具, 也常会在其他分析的问题中遇到.

2.10.9 吉布斯现象

假如我们绘出一分段平滑的函数 $f(x)$ 的图形以及其傅里叶级数的部分和近似式的图形, 那么我们可以看出部分和的图形在任一不包含 $f(x)$ 的间断点的区间内逼近于 $f(x)$ 的图形. 可是在跳断点的邻近 (那里, 傅里叶级数不一致收敛), 部分和

的图形表现出摆动, 这些摆动当部分和中所取的项数增加时越来越集中而且离间断点越来越近, 可是近似曲线的总摆动并不趋近于 $f(x)$ 的跳跃. 这就是所谓吉布斯现象[1]. 为了更进一步研究这个现象, 按 2.5 节, 我们可以限于考虑特殊的傅里叶级数

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin\ \nu x}{\nu}\quad(0<x<2\pi).$$

利用公式

$$s_n(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\sin\ \nu x}{\nu}=-\frac{x}{2}+\int_0^x\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\ \sin\ \frac{1}{2}t}dt,$$

我们可以把级数的余项写为

$$r_n(x)=\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{\sin\ \nu x}{\nu}=\frac{\pi}{2}-\int_0^x\frac{\sin\ \left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\ \sin\ \frac{1}{2}t}dt$$

或者

$$r_n(x)=\frac{\pi}{2}-\int_0^{(n+\frac{1}{2})x}\frac{\sin\ tdt}{t}+\rho_n(x),$$

其中

$$\rho_n(x)=\int_0^x\frac{2\ \sin\ \frac{t}{2}-t}{2t\ \sin\ \frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt.$$

由微分可见近似最坏之点为

$$x_k=\frac{2k\pi}{2n+1}\quad(k=1,2,\cdots,n),$$

在这些点上余项有极大或极小值. 在 x_k 它的值为

$$r_n(x_k)=\frac{\pi}{2}-\int_0^{k\pi}\frac{\sin\ x}{x}dx+\rho_n\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right).$$

当 k 固定而 n 增大时, $\rho_n(2k\pi/(2n+1))$ 趋于零. 由此可见余项 $r_n(x)$, 也就是说 $\frac{1}{2}(\pi-x)$ 在 x_k 点与其近似式的差度 (x_k 趋近于间断点), 趋近于极限

$$\lim_{n\to\infty}r_n(x_k)=\frac{\pi}{2}-\int_0^{k\pi}\frac{\sin\ x}{x}dx.$$

1) 这个事实初时是吉布斯从经验上发现的. J. W. Gibbs. Fourier's series. Nature, Vol. 59, 1898–1899, 200 和 606; Papers. Vol. 2. Longmans, Green and Co., London, New York, and Bombay, 1906, 258–260.

特别地 $\lim r_n(x_1) \approx -0.2811$; 也就是说近似曲线越过 $f(x)$ 曲线的程度约为断点跳跃的百分之九[1].

可以指出的是当用费耶的算术平均作近似时吉布斯现象不复出现.

2.10.10 关于格拉姆行列式的一个定理

设 G' 为基本区域 G 的一个子区域, $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 为 G 上的分段平滑函数, 又设 Γ 是它们对区域 G 的格拉姆行列式而 Γ' 是对区域 G' 的格拉姆行列式, 则

$$\Gamma' \leqslant \Gamma.$$

证明可立刻由本征值的极大–极小性得出. 因为 Γ 为二次型

$$K(t,t) = \int_G (t_1\varphi_1 + \cdots + t_n\varphi_n)^2 dG$$

诸本征值的积, 而 Γ' 则为

$$K'(t,t) = \int_{G'} (t_1\varphi_1 + \cdots + t_n\varphi_n)^2 dG$$

诸本征值的积. 由于显然有

$$K'(t,t) \leqslant K(t,t),$$

故立刻可得 $K'(t,t)$ 的任一本征值皆小于或等于 $K(t,t)$ 的相应本征值.

另一证明可由以下格拉姆行列式的表示得出, 为简短计, 我们只限于考虑基本区域 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上的一个变量 x:

$$\begin{aligned}\Gamma &= \left|\int_0^1 \varphi_i\varphi_k dx\right| \\ &= \frac{1}{n!}\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \cdots & \varphi_1(x_n) \\ \varphi_2(x_1) & \varphi_2(x_2) & \cdots & \varphi_2(x_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_n(x_1) & \varphi_n(x_2) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}^2 dx_1 dx_2 \cdots dx_n.\end{aligned}$$

这个表示式完全和第 1 章的公式 (45) 相当[2].

---

1) M. Bôcher. Introduction to the theory of Fourier's series. Ann. Math., Ser, 2, Vol. 7, 1906, 81–152, esp. 123–132; C. Runge. Theorie und Praxis der Reihen. Göschen, Leipzig, 1904, 170–182. 关于吉布斯现象之推广于其他正交组, 特别是多元的正交组, 可参看 H. Weyl. Die Gibbssche Erscheinung in der Theorie der Kugelfunktionen. Rend. Circ. mat. Palermo, Vol. 29, 1910, 308–323. Über die Gibbssche Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene, ibid, Vol. 30, 1910, 377–407.

2) 可比较 A. Kneser. Zur Theorie der Determinanten. Festschr. H. A. Schwarz. Berlin: Julius Springer, 1914, 177–191; Gerhard W. H. Kowalewski. Einführung in die Determinantentheorie einschliesslich der unendlichen und der Fredholmschen Determinanten. Leipzig: Veit, 1909.

2.10.11 勒贝格积分的应用

假如我们以勒贝格积分代替较初等的黎曼积分，则本章中所讨论的许多项目可变得更为美好. 所采取的函数集或“空间”这时候须扩大使包含所有在勒贝格意义下可积的函数，同时必须应用勒贝格理论中的方法.

勒贝格理论的基础是关于一个点集 $\mathfrak{M}$ 的测度的概念，这点集中所有的点可假设在一给定的有限区间之内. 假设 $\mathfrak{M}$ 的点皆包含在一组可数个区间中；这些区间一般说来可相叠. 设 m 为这些区间的长度之和的下界，此外设 m' 为 $\mathfrak{M}$ 的补集 $\mathfrak{M}'$ 的下界 (所谓补集即所给区间中不属于 $\mathfrak{M}$ 的点的集合). 若 $m+m'$ 等于区间之长，则集合 $\mathfrak{M}$ 称为*可测的*，而称 m 为其*测度*. 按照这个定义，凡可数集的测度为零；这种集合称为“零集”.

考虑定义在区间 $G(a \leqslant x \leqslant b)$ 上的有界函数 $f(x)$，其值位于一区间 J 之内. 试分 J 为子区间 $J_1, J_2, \cdots, J_n$. 假如对任一这样的子区间 J_j, G 中使 $f(x)$ 的值在 J_j 内的点集为可测，则称函数 $f(x)$ 在 G 内*可测*. 在这种情形，若 m_j 表示 G 中使 $f(x)$ 的值在 J_j 内的点集的测度，则和数 $\sum_{j=1}^{n} m_j f_j$(f_j 为在 J_j 中 f 的任意值) 当 J 的分割加细而且子区间 J_j 的长度一致趋于零时是收敛的. 这个和数的极限叫做函数 $f(x)$ 的*勒贝格积分*或简称积分. 它是通常黎曼积分的自然推广而用同样的符号表示. 只在零集的点上不为零的函数，其积分为零. 因此可在一零集上，例如有理点集上，任意改变一函数的值而不影响其积分的值. 显然，可积函数的范围由这新的定义而大大地扩大. 在勒贝格意义下的可积函数称为是*可和的*.

勒贝格积分的概念也可用于在所给区域上为无界的函数，只要先在使函数满足 $-M < f(x) < N$ 的子区域上积分，然后令 M 和 N 独立地无限增大. 假如积分的极限存在，它就叫做在整个区域上的勒贝格积分.

由这些概念可以导出以下重要的定理：

(a) *勒贝格收敛定理*. 设给定一串在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上的可和函数 $f_1(x)$, $f_2(x), \cdots$，并设对区间中的任一 x，函数 $f_n(x)$ 随 n 的增加而收敛于函数 $F(x)$，则当所有的函数 $f_n(x)$ 的绝对值在一固定而不依赖于 n 和 x 的上界之下时，关系式

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)dx = \int F(x)dx$$

成立 (即使收敛不一致).

事实上，只要不等式

$$|f_n(x)| < \varphi(x)$$

成立即可，其中 $\varphi(x)$ 为一固定不依赖于 n 的可和函数.

这些定理使我们在许多不一致收敛的情形中可以把无穷级数逐项积分.

(b) **平均收敛**. 设函数 $f_1(x), f_2(x), \cdots$ 及其平方为可积, 并设

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}\int(f_n-f_m)^2dx=0.$$

则称函数序列 $f_n(x)$**平均收敛**. 以下定理成立: 对任意这样的函数序列, 可以挑出一个子序列 f_{n_i}, 它除了在一个零集的点上外在各处皆收敛于一可和函数 $f(x)$.

(c) **里斯 - 费希儿定理**[1]. 这条定理可以用两种相等当的方式来表述.

费希儿的表述: 设函数 $f_1(x), f_2(x), \cdots$ 及其平方可和, 并设 $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}\int(f_n-f_m)^2dx = 0$. 则存在一平方可积函数 $f(x)$, 使有

$$\lim_{n\to\infty}\int(f_n-f)^2dx=0.$$

里斯的表述: 设 $\omega_1(x), \omega_2(x), \cdots$ 为一任意给的正交函数组, 并设 $a_1, a_2, \cdots$ 为任意使 $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}a_\nu^2$ 收敛的实数, 则存在一可和函数 $f(x)$, 其平方可积, 而 $a_\nu=(f,\omega_\nu)$.

假如积分及函数的概念在所讨论的意义下获得推广, 则以上定理在平方可积函数和坐标 a_ν(其平方和收敛) 之间建立了一个一一对应的关系.

(d) **函数组的完备性和封闭性**. 我们称一函数组为**封闭的**, 假如不存在与组内所有的函数皆正交的规一化函数; 我们假设这些函数及其平方皆可积. 以下定理成立: 凡封闭函数组皆完备, 反之亦然. 事实上, 设 $f(x)$ 在一正测度的集合上不为零, 同时并正交于正交组中所有的函数, 则 $0=\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(f,\omega_\nu)^2<\int f^2dx$; 所以函数组不是完备的. 另一方面, 设函数组不完备, 则存在一函数 $f(x)$ 使得 $\int f^2dx-\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}a_\nu^2>0$, 其中 $a_\nu=(f,\omega_\nu)$; 因此, 由里斯–费希儿定理的费希儿表述, 函数 $f_n=f-\sum\limits_{\nu=1}^{n}a_\nu\omega_\nu$ 平均收敛于函数 $\varphi(x)$, $\varphi(x)$ 和所有的函数 ω_ν 正交. 所以该函数组不可能是封闭的.

参考文献

教本

Borel, E.: Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes. Gauthier-Villars, Paris, 1905.

1) F. Riesz. Sur les systèmes orthogonaux de fonctions. C. R. Acad, sc. Paris, Vol. 144, 1907, 615–619; Über orthogonale Funktionensysteme. Nachr. Ges. Göttingen (math.-phys. KI.)1907, 116–122; E. Fischer. Sur la convergence en moyenn. C. R. Acad. sc. Paris, Vol. 144, 1907, 1022–1024.

Carslaw, H. S.: Introduction to the theory of Fourier's series and integrals. 2nd edition. Macmillan, London, 1921.

Heine, E.: Handbuch der Kugelfunktionen, 1 and 2. 2nd edition. G. Reimer, Berlin, 1878 and 1881.

Hilbert, D.: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. B. G. Teubner, Leipzig, 1912 (Cited as "Integralgleichungen.")

Hobson, E. W.: The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series. Cambridge University Press, Cambridge, 1907.

Lebesgue, H.: Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives. Gauthier Villars, Paris, 1904. Leçons sur les séries trigonométriques. Gauthier-Villars, Paris, 1906.

Whittaker, E. T., and Watson, G. N.: A course of modern analysis. 3rd edition. Cambridge University Press, Cambridge, 1920.

专刊及散篇论文

Bôcher, M.: Introduction to the theory of Fourier's seres. Ann. Math., ser. 2, Vol. 7, 1906, pp. 81–152.

Courant, R.: Über die Lösungen der Differentialgleichungen der Physik. Math. Ann., Vol. 85, 1922, pp. 280–325. Zur Theorie der linearen Integralgleichungen. Ibid., Vol. 89, 1923, pp. 161–178.

Hilbert, D.: Über das Dirichletsche Prinzip. Festschr. Ges. Göttingen 1901, Berlin 1901; reprinted Math. Ann., Vol. 59, 1904, pp. 161–186.

Montel, P.: Sur les suites infinies de fonctions. Ann. Éc Norm., ser. 3, Vol. 24, 1907, pp. 233–334.

Szegö, G.: Beitrag zur Theorie der Polynome von Laguerre und Jacobi. Math. Zeitschr., Vol. 1, 1918, pp. 341–356. Über Orthogonalsysteme von Polynomen. Ibid., Vol. 4, 1919, pp. 139–157. Über die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Polynomen eines Orthogonalsystems. Ibid., Vol. 12, 1922, pp. 61–94.

第 3 章　线性积分方程

3.1　引　　论

3.1.1　符号和基本概念

设 $K(s,t)$ 为两个变数 s 和 t 的函数, 定义在区域 $a \leqslant s \leqslant b$, $a \leqslant t \leqslant b$ 上, 并在该区域上连续; 又设 λ 为一参数. 此外, 设 $f(s)$ 和 $\varphi(s)$ 为变数 s 的两个函数, 在区间 $a \leqslant s \leqslant b$ 上连续, 并由函数方程

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int K(s,t)\varphi(t)dt \tag{1}$$

相连 (除非另作声明, 所有积分的积分区域都了解为上面所定义的“基本区域”). 函数方程 (1) 叫做*以 $K(s,t)$ 为核的第二类线性积分方程*. 任何一个连续函数 $\varphi(s)$ 都通过 (1) 而变换为另一连续函数 $f(s)$; 这个变换是线性的, 因为与 $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$ 相应的是类似的组合 $c_1 f_1 + c_2 f_2$. 我们所主要要讨论的是解这个积分方程的问题, 也就是说, 当 $f(s)$ 为已知时决定 $\varphi(s)$ 的问题, 或者说, *求线性积分变换*(1) 的反演的问题. 除非另作声明, 我们将假定问题中所有的量都是实的.

若函数 $f(s)$ 恒等于零, 则我们所处理的是一个*齐次积分方程*. 若齐次积分方程除解 $\varphi = 0$ 之外还另有一解, 则因这解乘上任意一常数因子后仍为解, 所以可以假定它是规一化了的. 若 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_h$ 为齐次方程的解, 则所有的线性组合 $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \cdots + c_h\varphi_h$ 也都是解. 所以假如已有线性独立的若干个解, 我们可以假定它们是正交规一的; 因为如其不然, 就可以用第 2 章 2.1 节中的步骤把它们正交化而得到的仍旧是解. 往后我们就假定一齐次积分方程诸线性独立的解是正交规一的. 凡能使齐次方程具有非平凡解的 λ 值 (可能是复的) 叫做它的核的*本征值*[1]; 相应的解 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_h$(假定已规一化并互相正交) 叫做与此本征值 λ 相应的该核的*本征函数*. 相应于每一个本征值的本征函数的个数是有限的. 因为, 对核 $K(s,t)$ 及正交规一函数组 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_h$ 应用贝塞尔不等式 (第 2 章, 2.1 节), 我们有

$$\lambda^2 \int [K(s,t)]^2 dt \geqslant \lambda^2 \sum_{i=1}^{h} \left[\int K(s,t)\varphi_i(t)dt \right]^2 = \sum_{i=1}^{h} \varphi_i(s)^2;$$

对 s 积分得

$$\lambda^2 \iint [K(s,t)]^2 dsdt \geqslant h.$$

---

1) 这些本征值事实上相当于第 1 章中所谓的本征值的倒数.

这就确定了 h 有一上界. 由此可见, **每一个本征值皆具有有限的重数**(也就是说, 具有有限个线性独立的本征函数).

在 3.6 节中我们将会看到, 积分方程乃是第 1 章 1.2 节中所处理的线性代数问题的推广. 积分方程在数学分析上的意义, 在于它使我们能够从一个统一的观点来考虑数学分析中形形色色不同的问题.

3.1.2　以积分表示的函数

联系方程 (1), 很自然会追问可以表示积分形式

$$g(s) = \int K(s,t)h(t)dt \tag{2}$$

的函数 $g(s)$ 的性质. (2) 中的 $g(s)$ 叫做 $h(s)$ 的**积分变换**.

若 $h(t)$ 是分段连续的, 则 $g(s)$ 自然是连续的. 此外, 若 $\int [h(t)]^2 dt \leqslant M$, 其中 M 为一确定上界, 则由 (2) 所定义的函数集事实上是同等连续的; 也就是说, 对任意正数 ε 而言, 存在一个不依赖于个别函数 h 的正数 $\delta(\varepsilon)$, 使得当 $|\eta| < \delta$ 时就有 $|g(s+\eta) - g(s)| < \varepsilon$(试和第 2 章 2.2 节比较). 因为, 由施瓦茨不等式我们有

$$|g(s+\eta) - g(s)|^2 \leqslant M \int [K(s+\eta,t) - K(s,t)]^2 dt.$$

由于核是一致连续的, 所以对于任意小的 σ, 只要 η 充分小, 不等式

$$|K(s+\eta,t) - K(s,t)| < \sigma$$

就不依赖于 t 而成立, 我们的论断也就得证.

此外, 若给了一串核 K_n, 并且

$$\lim_{n\to\infty} K_n(s,t) = K(s,t)$$

一致成立, 则对一给定的 $h(t)$ 而言, 关系

$$g(s) = \lim_{n\to\infty} \int K_n(s,t)h(t)dt$$

成立; 而且对 s 说来收敛是一致的, 因为我们可以在积分号下取极限. 由此可见, 对于一切的 $h(t)$, 所有形如

$$g_n(s) = \int K_n(s,t)h(t)dt, \quad g(s) = \int K(s,t)h(t)dt$$

的函数形成一同等连续的函数组, 只要 h 满足条件 $\int h^2 dt \leqslant M$. 这些函数也是一

致有界的, 也就是说, 它们的绝对值在一共同上界之下. 这一点可由施瓦茨不等式得出:

$$|g_n(s)|^2 \leqslant M\int [K_n(s,t)]^2dt; \quad |g(s)|^2 \leqslant M\int [K(s,t)]^2dt.$$

3.1.3 退化核

假如一个核可以写成有限多项的和而其中每一项皆为一 s 的函数与一 t 的函数之乘积, 这样的核

$$A(s,t) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i(s)\beta_i(t) \tag{3}$$

叫做*退化核*. 在这里我们可以假定函数 $\alpha_i(s)$ 为线性独立的, 函数 $\beta_i(t)$ 也一样. 因为不然的话, 这些函数中的某一个就可以写成其他函数的线性组合, 而 $A(s,t)$ 就可以写成项数少于 p 的退化核. 连续函数 $K(s,t)$ 可以用多项式来一致逼近 (第 2 章, 2.4 节) 意味着核 $K(s,t)$ 可以用退化核来一致逼近, 因为 s 和 t 的任意多项式显然表示一退化核.

我们可以把退化核 $A(s,t)$ 变换为另一种较为方便的形式. 假定 s 的 $2p$ 个函数 $\alpha_1(s),\alpha_2(s),\cdots,\alpha_p(s)$; $\beta_1(s),\beta_2(s),\cdots,\beta_p(s)$ 皆已用 q 个正交规一函数 $\omega_1(s)$, $\omega_2(s),\cdots,\omega_q(s)$ 的线性组合表示出来, 这一点只要将所给函数正交化总可以办到. 于是 $A(s,t)$ 可写成一个双重和

$$A(s,t) = \sum_{i,j=1}^{q} c_{ij}\omega_i(s)\omega_j(t). \tag{4}$$

乘积 $\omega_i(s)\omega_j(t)$ 形成一组 q^2 个 s 和 t 的函数, 它们定义在方形 $a \leqslant s \leqslant b,\ a \leqslant t \leqslant b$ 上, 并在这方形上互相正交, 因此是线性独立的. 假如 $A(s,t)$ 是*对称的*, 也就是说假如 $A(s,t)$ 恒等于 $A(t,s)$, 则

$$\sum_{i,j=1}^{q} (c_{ij} - c_{ji})\omega_i(s)\omega_j(t) = 0;$$

由于乘积 $\omega_i(s)\omega_j(t)$ 是线性独立的, 故 $c_{ij} = c_{ji}$.

一对称核 $K(s,t)$ 总可以用对称的退化核 $A(s,t)$ 一致迫近, 要看出这一点只需以 $\frac{1}{2}[A(s,t)+A(t,s)]$ 代替 $A(s,t)$, 如果 $A(s,t)$ 迫近对称核 $K(s,t)$, 则 $\frac{1}{2}[A(s,t)+A(t,s)]$ 也迫近 $K(s,t)$.

3.2 退化核的弗雷德霍姆定理

积分方程一般理论中的基本定理是由弗雷德霍姆[1]第一个证明的, 它们和线性

1) I. Fredholm. Sur une classe d'équations fonctionnelles. Acta Math., Vol. 27, 1903, 365–390.

方程论中的基本定理相当. 这些定理可以按以下方式叙述:

积分方程 (1)

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int K(s,t)\varphi(t)dt$$

当 λ 一定时, 或则对任意连续函数 $f(s)$ 而言皆有唯一的连续解 $\varphi(s)$, 特别地, 当 $f=0$ 时, $\varphi=0$; 或则这一论断不成立, 于是相关的齐次方程

$$\psi(s) = \lambda \int K(s,t)\psi(t)dt \tag{5}$$

必具有 r 个线性独立的解 (其中 r 为有限正数)$\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_r$. 在前一种情形, 和 (1) 相关的"转置"积分方程

$$g(s) = \varphi(s) - \lambda \int K(t,s)\varphi(t)dt \tag{6}$$

也对每一个 g 而言皆具有唯一的解. 在后一种情形, 转置齐次方程

$$\chi(s) = \lambda \int K(t,s)\chi(t)dt \tag{7}$$

也有 r 个线性独立的解 $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_r$; 而非齐次积分方程 (1) 有解的充分和必要条件为所给的函数 $f(s)$ 满足 r 个条件

$$(f, \chi_i) = \int f(s)\chi_i(s)ds = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, r). \tag{8}$$

在这些条件满足时, (1) 的解在差一个线性组合 $c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \cdots + c_r\psi_r$ 的限度下是确定的; 而在附加条件

$$(\varphi, \psi_i) = \int \varphi(s)\psi_i(s)ds = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, r)$$

之下它可以唯一地确定.

我们先对方程 (3) 所表示的退化核的情形来证明这些定理. 在这种情形下, 我们的积分方程的理论几乎立刻可以化为关于 p 个未知量的一组 p 个线性方程的理论. 试将积分方程写成以下的形式:

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \sum_{i=1}^{p} \alpha_i(s) \int \beta_i(t)\varphi(t)dt. \tag{9}$$

现在令 $x_i = (\beta_i, \varphi)$, 以 $\beta_j(s)$ 乘 (9) 式并对 s 积分, 我们就得到包含未知量 x_i 的方程组

$$f_j = x_j - \lambda \sum_{i=1}^{p} c_{ji}x_i \quad (j = 1, 2, \cdots, p), \tag{10}$$

其中 $f_j=(\beta_j,f)$, $c_{ji}=(\beta_j,\alpha_i)$. 假如这个方程组有唯一的一组解 $x_1,x_2,\cdots,x_p$, 则函数

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\sum_{i=1}^{p}x_i\alpha_i(s)$$

自然是积分方程的一个解. 要验证这一点, 可将上式代入积分方程并利用方程组 (10). 又, 这时转置方程组

$$g_j=y_j-\lambda\sum_{i=1}^{p}c_{ij}y_i \tag{11}$$

也具有唯一的解 $y_1,y_2,\cdots,y_p$, 而

$$\varphi(s)=g(s)+\lambda\sum_{i=1}^{p}y_i\beta_i(s)$$

则为转置积分方程 (6) 的一个解.

假如情况不是如此, 而是齐次方程组

$$0=x_j-\lambda\sum_{i=1}^{p}c_{ji}x_i\quad(j=1,2,\cdots,p) \tag{12}$$

具有一组非平庸解 $x_1,x_2,\cdots,x_p$, 则

$$\psi(s)=\lambda\sum_{i=1}^{p}x_i\alpha_i(s)$$

为齐次积分方程 (5) 的一个非平庸解. (12) 的两组线性独立解 $x_1,x_2,\cdots,x_p$ 和 $x_1',x_2',\cdots,x_p'$ 显然给出 (5) 的两个线性独立的解 $\psi(s)=\lambda\sum\limits_{i=1}^{p}x_i\alpha_i(s)$ 和 $\psi'(s)=\lambda\sum\limits_{i=1}^{p}x_i'\alpha_i(s)$, 反之亦然.

若 (5) 具有 r 个线性独立的解 $\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_r$, 因之 (12) 亦具有 r 组线性独立的解, 则转置方程

$$g_j=y_j-\lambda\sum_{i=1}^{p}c_{ij}y_i\quad(j=1,2,\cdots,p) \tag{13}$$

亦有同样多组线性独立的解 $y_{k1},y_{k2},\cdots,y_{kp}$ $(k=1,2,\cdots,r)$(其中 $g_j=0$), 而转置齐次积分方程 (7) 也就有 r 个线性独立的解

$$\chi_1(s),\chi_2(s),\cdots,\chi_r(s);$$

这里

$$\chi_k(s) = \lambda \sum_{j=1}^{p} y_{kj}\beta_j(s). \tag{14}$$

根据线性方程的理论, 方程 (10), 也就是 (13) 和 (6), 在 $r=0$ 时具有唯一的解; 而当 $r>0$ 时, 非齐次方程 (10), 也就是积分方程 (5) 有解的充分和必要条件为 f 满足

$$\sum_{j=1}^{p} f_j y_{kj} = 0 \quad (k=1,2,\cdots,r). \tag{15}$$

由 y_{kj} 和 f_j 的定义知以上条件和

$$(f, \chi_k) = 0 \quad (k=1,2,\cdots,r) \tag{16}$$

等当.

这就完成了在退化核的情形弗雷德霍姆定理的证明.

3.3 对任意核的弗雷德霍姆定理

为了利用上一节的结果来处理具有任意核 $K(s,t)$ 的积分方程的问题, 我们应用第 2 章 2.2 节的收敛定理.

我们假设 $K(s,t)$ 由一串退化核 $A_1(s,t), A_2(s,t), \cdots, A_n(s,t), \cdots$ 一致逼近, 并在积分方程 (1) 之外我们还考虑其近似积分方程

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int A_n(s,t)\varphi(t)dt. \tag{17}$$

假如 λ 固定, 则存在两种可能的情形.

情形 I. 对无穷多个下标 n, 方程 (17) 对任一 $f(s)$ 都有一解 $\rho_n(s)$, 而且所有这些解都满足 $(\rho_n, \rho_n) = c_n^2 \leqslant M$, 其中 M 为不依赖于 n 的上界. 在这种情形中, 我们可以弃却所有不合适的 n 值, 而将核 A_n 重新编号; 因此我们可以假定上述条件对所有的 n 都满足而不致丧失一般性.

情形 II. 上面的话不成立. 于是对某个特殊的 $f(s)$ 而言, 可能是:

(a) 对无穷多个 n, 解 $\rho_n(s)$ 都存在 (和上面一样, 我们可以假定, 对所有的 n, 解都存在), 可是当 $n\to\infty$ 时 $(\rho_n, \rho_n) = c_n^2 \to \infty$;

(b) 只对有限多个 n 的值有解存在 (因此, 我们可以假定, 对所有的 n, 解皆不存在), 于是根据退化核的弗雷德霍姆定理, 齐次积分方程

$$0 = \varphi(s) - \lambda \int A_n(s,t)\varphi(t)dt \tag{18}$$

对所有的 n 皆有一规一化的解 $\sigma_n(s)$.

在情形 I 中, 函数 $\rho_n(s)-f(s)$ 为 $\rho_n(s)$ 的以 $A_n(s,t)$ 为核的积分变换; 根据 3.1 节, 它们形成一同等连续并一致有界的函数组. 所以按第 2 章 2.2 节的收敛定理, 存在 $\rho_n(s)$ 的一个子序列, 它一致收敛于一极限函数 $\varphi(s)$. 在积分方程 (17) 中取极限 (这是许可的), 我们可以看出这极限函数满足积分方程 (1). 所以在情形 I 方程 (1) 对任一 $f(s)$ 皆有解.

在情形 II (a) 中, 我们令 $\varphi=\rho_n$ 而将积分方程 (17) 除以 c_n 并令 $\rho_n/c_n=\sigma_n$ 而得到方程

$$\frac{f(s)}{c_n}=\sigma_n(s)-\lambda\int A_n(s,t)\sigma_n(t)dt;$$

在情形 II (b) 中我们注意方程 (18) 当 $\varphi=\sigma_n$ 时成立. 对这两种情形 σ_n 都是规一的; 因之, 相应积分换式的序列 $\sigma_n(s)-f(s)/c_n$ 和 $\sigma_n(s)$ 是同等连续并一致有界的. 所以这些序列具有一致收敛于极限函数 $\psi(s)$ 的子序列, $\psi(s)$ 必然满足齐次积分方程 (5)

$$\psi(s)=\lambda\int K(s,t)\psi(t)dt,$$

而且是规一的. 由此可见, 在情形 II 齐次方程具有非平庸解, 我们称之为零解或本征函数.

为了从上面的讨论得出 3.2 节中所叙述的弗雷德霍姆定理, 可回忆 3.1 节中所证明的一个事实, 那就是, 对 λ 的每一个值只能存在有限的 r 个线性独立的本征函数. 假如 $r=0$, 那么情形 II 不可能产生, 因为在这种情形中 (5) 总有一规一的解, 所以我们所处理的仍是情形 I; 也就是说积分方程 (1) 对任意 $f(s)$ 都有解. 这个解是唯一的, 因为两个解的不为零的差将是 (5) 的非平庸解, 这和 $r=0$, 即不存在这种解的假定相矛盾. 弗雷德霍姆第一定理因此得到证明.

现在考虑 $r>0$. 令 $\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_r$ 为 (5) 的 r 个互相正交的规一解. 于是由于 $A_n\Rightarrow K$[1], 函数

$$\delta_{ni}(s)=\psi_i(s)-\lambda\int A_n(s,t)\psi_i(t)dt\quad(i=1,2,\cdots,r;\ n=1,2,3,\cdots)$$

当 $n\to\infty$ 时满足 $\delta_{ni}(s)\Rightarrow 0$.

现在我们定义 $A'_n(s,t)$ 为

$$A'_n(s,t)=A_n(s,t)+\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{r}\delta_{ni}(s)\psi_i(t),$$

则 $A'_n(s,t)$ 是退化核, 它们一致逼近核 $K(s,t)$. 很容易看出, 所有这些核 $A'_n(s,t)$ 都具有 r 个本征函数 $\psi_i(s)$.

1) 箭头 $\to$ 常用来表示收敛. 我们用空心箭头 $\Rightarrow$ 表示一致收敛.

当 n 充分大时也不可能有 r 个以上线性独立的本征函数. 因为若 $\psi_{r+1,n}(s)$ 为一串另外的本征函数, 我们可以假定它们和 $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_r$ 正交并为规一的, 因此按收敛原理将存在 (5) 的一个本征函数, 它和 $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_r$ 正交, 因此和它们是互相线性独立的; 这就和 (5) 恰有 r 个线性独立的本征函数这个假定相矛盾.

因为弗雷德霍姆定理对退化核而言是成立的, 转置积分方程

$$\chi(s) = \lambda \int A'_n(t,s)\chi(t)dt \tag{19}$$

当 n 充分大时也恰有 r 个线性独立的本征函数 $\chi_{in}(s)$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$. 我们可以取这些解为正交规一的. 既然退化核 $A'_n(t,s)$ 一致收敛于核 $K(t,s)$, 我们也就可以得到这个核的 r 个互相正交的本征函数 $\chi_1(s), \chi_2(s), \cdots, \chi_r(s)$, 这里我们只要利用函数集 $\chi_{i,n}(s)$ 的一致有界及同等连续性, 应用收敛原理, 取极限就行了. 转置方程

$$\chi(s) = \lambda \int K(t,s)\chi(t)dt \tag{20}$$

不能有 r 个以上互相独立的解, 否则作逆推论就可以证明 (5) 也将必然会有 r 个以上的解.

最后, 我们注意

$$(f, \chi_i) = \int f(s)\chi_i(s)ds = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, r) \tag{21}$$

是积分方程 (1) 在 $r > 0$ 时有解的必要条件. 只要用 $\chi_i(s)$ 乘 (1), 求积分, 再更换积分次序并利用 (20), 就立刻可以得知这一点. 为了看出条件 (21) 也是充分的, 我们限于考虑这样的下标 n, 对它们说来有 $\lim\limits_{n\to\infty} \chi_{i,n}(s) = \chi_i(s)$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$. 由 (21) 知当 n 增大时 $\varepsilon_{in} = (f, \chi_{i,n})$ 收敛于零. 现在我们造函数

$$f_n(s) = f(s) - \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_{in}\chi_{i,n}(s);$$

这些函数满足 $(f_n, \chi_{i,n}) = 0$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$. 所以积分方程

$$f_n(s) = \varphi(s) - \lambda \int A'_n(s,t)\varphi(t)dt \tag{22}$$

具有和 $\psi_1(s), \psi_2(s), \cdots, \psi_r(s)$ 正交的解 $\rho_n(s)$, 因为对退化核而言弗雷德霍姆定理成立. 这些解 $\rho_n(s)$ 的存在意味着我们所处理的是情形 I; 否则它们将给出 (5) 的一个和 $\psi_1(s), \psi_2(s), \cdots, \psi_r(s)$ 正交的解, 而按假设这是不可能的. 于是我们又可以根据收敛原理在积分方程中取极限. 由于 $f_n(s) \rightrightarrows f(s)$, 我们断言 (1) 有一个解. 这样就完成了关于任意核 $K(s,t)$ 的全部弗雷德霍姆定理的证明.

齐次方程具有非平庸解的例的确存在, 这在下一节中可以看到.

3.4 对称核及其本征值

像第 1 章中双线型的理论一样, 积分方程的理论是核 $K(s,t)$ 为对称的情形, 也就是说, 当核满足关系

$$K(s,t)=K(t,s) \tag{23}$$

时, 可以获得详尽的处理. 在这种情形中, 积分方程与其转置方程等同. 我们将给出一套对称积分方程的理论, 这个理论与上一节的内容无关.

我们的主要问题是求出参数 λ 的这样一些值, 对于这些值齐次积分方程 (5) 具有非平庸解 (规一的). 前面已经说过, 这些值 $\lambda=\lambda_i$ 以及相应的解分别称为核 $K(s,t)$ 的本征值和本征函数. 现在我们要证明一条类似于第 1 章 1.3 节中讲过的定理: 凡不恒等于零的连续对称核皆具有本征值和本征函数; 只要核不是退化的, 本征值和本征函数就有可数无穷多个, 反之亦然. 而且实对称核所有的本征值都是实的.

3.4.1 对称核的本征值的存在性

我们首先证明至少存在一个本征值. 为此我们考虑“二次积分型”

$$J(\varphi,\varphi)=\iint K(s,t)\varphi(s)\varphi(t)dsdt, \tag{24}$$

它相当于第 1 章中的二次型; φ 为基本区域上连续或分段连续的任何函数. 用施瓦茨不等式得关系

$$|J(\varphi,\varphi)|^2 \leqslant (\varphi,\varphi)^2 \iint K^2(s,t)dsdt.$$

所以只要加上条件

$$(\varphi,\varphi)=1, \tag{25}$$

$J(\varphi,\varphi)$ 的绝对值就是有界的. 积分型对任何可取函数 φ 而言都等于零的充分和必要条件是核本身恒等于零. 为了看出这一点, 我们引进“双线积分型”

$$J(\varphi,\psi)=J(\psi,\varphi)=\iint K(s,t)\varphi(s)\psi(t)dsdt \tag{26}$$

并注意关系

$$J(\varphi+\psi,\varphi+\psi)=J(\varphi,\varphi)+2J(\varphi,\psi)+J(\psi,\psi). \tag{27}$$

显然, 若二次型恒等于零则双线型亦然. 在 (26) 中取 $\psi(t)=\int K(s,t)\varphi(s)ds$, 我们得到

$$\int\left(\int K(s,t)\varphi(s)\cdot ds\right)^2 dt=0;$$

所以对任意 φ 有 $\int K(s,t)\varphi(s)ds = 0$. 现在假如对某一特殊的 t 值取 φ 等于 $K(s,t)$, 我们就得到所要的恒等式 $K(s,t)=0$.

假如核有这样的性质, 它使 $J(\varphi,\varphi)$ 只能取正值或负值 (φ 恒等于零除外), 那么我们称它为*正定*或*负定的*; 否则称它为*不定的*.

现在假定 $J(\varphi,\varphi)$ 可以取正值. 我们来考虑这样的问题: 求一规一化函数 φ 使 $J(\varphi,\varphi)$ 取可能中的最大值. 既然 $J(\varphi,\varphi)$ 是有界的, 自然存在 $J(\varphi,\varphi)$ 值的一个最小上界 $K_1 = 1/\lambda_1$; 我们现在要证明有一适当的函数 $\varphi(s)$ 存在使 $J(\varphi,\varphi)$ 的值的确达到这个最小正上界. 我们假定核 $K(s,t)$ 为一串形式同 3.1 节之末所描述的退化对称核

$$A_n(s,t) = \sum_{i,k=1}^{q_n} c_{ik}^{(n)}\omega_i(s)\omega_k(t), \quad c_{ik}^{(n)} = c_{ki}^{(n)}$$

所一致逼近, 可以看出, 积分型 $J_n(\varphi,\varphi) = \iint A_n(s,t)\varphi(s)\varphi(t)dsdt$ 在附加条件 (25) 下的最大值问题同一 q_n 个变数的二次型的最大值问题等当. 事实上, 令

$$(\varphi,\omega_i) = x_i \quad (i=1,2,\cdots,q_n),$$

即得

$$J_n(\varphi,\varphi) = \sum_{i,k=1}^{q_n} c_{ik}^{(n)} x_i x_k. \tag{28}$$

这个式子把 $J_n(\varphi,\varphi)$ 表为 $x_1,x_2,\cdots,x_{q_n}$ 的二次型, 我们要在条件 (25) 之下求其极大. 现在将第 2 章 2.1.3 小节中的贝塞尔不等式用于函数 $\varphi(s)$ 和正交函数组 $\omega_1(s)$, $\omega_2(s),\cdots,\omega_{q_n}(s)$, 就有

$$(\varphi,\varphi) \geqslant \sum_{i=1}^{q_n} x_i^2;$$

因此二次型 (28) 中的变数必须满足条件 $\sum_{i=1}^{q_n} x_i^2 \leqslant 1$. 这个二次型的极大值必在 $\sum_{i=1}^{q_n} x_i^2 = 1$ 时达到, 因为否则只要乘一适当的因子就可以再增加 $J_n(\varphi,\varphi)$ 的值. 由此可见, 我们所面对的乃是第 1 章 1.3 节中处理过的主轴变换的问题. 因此, 使 $J_n(\varphi,\varphi)$ 达到极大的一组值 $x_1,x_2,\cdots,x_{q_n}$ 满足方程

$$\sum_{k=1}^{q_n} c_{ik}^{(n)} x_k = \kappa_{1n} x_i \quad (i=1,2,\cdots,q_n), \tag{29}$$

而且比例因子 κ_{1n} 正等于 $J_n(\varphi,\varphi)$ 的极大值, 要验证这一点, 我们以 x_i 乘 (29) 式

并求和, 注意右端得出 κ_{1n}(因为 $\sum x_i^2 = 1$), 而左端即为 $J_n(\varphi, \varphi)$. 现在令

$$\varphi_n(s) = x_1\omega_1(s) + x_2\omega_2(s) + \cdots + x_{q_n}\omega_{q_n}(s),$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_{q_n}$ 为使 $J_n(\varphi, \varphi)$ 取极大值的一组数值. 由于 ω_r 的正交性, 以及 $\sum_{i=1}^{q_n} x_i^2 = 1$, 这个函数是规一的. 从方程 (29) 可得关系

$$\varphi_n(s) = \frac{1}{\kappa_{1n}} \int A_n(s,t)\varphi_n(t)dt, \tag{30}$$

反之亦然. 这是因为如果以 $\omega_i(s)$ 乘 (29), 求和并注意 $x_i = (\varphi_n, \omega_i)$ 就得到 (30); 另一方面如果以 $\omega_i(s)$ 乘 (30) 并积分即得 (29). 因此函数 $\varphi_n(s)$ 为 $A_n(s,t)$ 的本征函数, 其本征值为 $\mu_{1n} = 1/\kappa_{1n}$; 也就是说

$$\varphi_n(s) = \mu_{1n} \int A_n(s,t)\varphi_n(t)dt. \tag{31}$$

现在我们令 n 无限增大. κ_{1n} 必须收敛于一个数 κ_1, 即 $J(\varphi, \varphi)$ 的相应正上界; 因为由关系

$$|K(s,t) - A_n(s,t)| < \varepsilon$$

和施瓦茨不等式得知, 当 $(\varphi, \varphi) \leqslant 1$ 时,

$$|J(\varphi, \varphi) - J_n(\varphi, \varphi)|^2 \leqslant \varepsilon^2(b-a)^2,$$

其中 a 及 b 为积分限; 因此当 n 充分大时, $J_n(\varphi, \varphi)$ 的数值范围和 $J(\varphi, \varphi)$ 的数值范围可任意准确地重合, 这两个数值范围的上界也必须如此; 所以 $\lim_{n\to\infty} \kappa_{1n} = \kappa_1$ 存在而所有的 κ_{1n} 均小于一固定的界. 由 (31) 及 3.1 节中的讨论知道, 对所有的 n, $\varphi_n(s)$ 都一致有界并形成一同等连续函数组. 按收敛定理可从中选出一子序列 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ 一致收敛于一极限函数 $\psi_1(s)$. 在方程 (30) 及关系式 $J_n(\varphi_n, \varphi_n) = \kappa_{1n}$ 和 $(\varphi_n, \varphi_n) = 1$ 中取极限, 我们得到方程

$$\kappa_1\psi_1(s) = \int K(s,t)\psi_1(t)dt, \quad (\psi_1, \psi_1) = 1 \tag{32}$$

以及

$$J(\psi_1, \psi_1) = \kappa_1. \tag{33}$$

由此可见函数 $\psi_1(s)$ 是二次积分型 $J(\varphi, \varphi)$ 最大值问题的解; 它是核 $K(s,t)$ 的一个本征函数. 因为我们已假定 $J(\varphi, \varphi)$ 可取正值, κ_1 不能等于零. 所以对任意一函数 ψ 我们有不等式

$$J(\psi, \psi) \leqslant \kappa_1(\psi, \psi), \tag{34}$$

这一点在 ψ 规一化后立刻可以看出 (这一证明方法应归功于霍姆格伦).

3.4.2 本征函数和本征值的全体

为求出其他的本征值和本征函数, 我们要这样来做:

我们要在条件 $(\varphi,\varphi)=1$ 之外再加上条件

$$(\varphi,\psi_1)=0,$$

这样来考虑求积分 $J(\varphi,\varphi)$ 的最大值的问题. 我们假定在这些条件之下 $J(\varphi,\varphi)$ 仍旧可以取正值. 由于第二个附加条件, 积分型 $J(\varphi,\varphi)$ 取值的范围在现在的最大值问题中比在前一个问题中窄; 因此最大值 $\kappa_2=1/\mu_2$ 不能大于以前的最大值 κ_1, 也就是说 $\kappa_2\leqslant\kappa_1$ 而 $\mu_2\geqslant\mu_1$. 在这里像在第一个最大值问题中一样, 解的存在可通过化为二次型及取极限加以证明. 可是若直接把问题化为确定另一个核的第一本征值问题, 则更为方便.

我们作对称核

$$K_{(1)}(s,t)=K(s,t)-\frac{\psi_1(s)\psi_1(t)}{\mu_1}. \tag{35}$$

按照上面的结果. 在条件 $(\varphi,\varphi)=1$ 下的最大值问题

$$J_{(1)}(\varphi,\varphi)=\iint K_{(1)}(s,t)\varphi(s)\varphi(t)dsdt=\max.=\kappa_2=1/\mu_2 \tag{36}$$

可以有一个解 $\psi_2(s)$, 它满足齐次积分方程

$$\psi_2(s)=\mu_2\int K_{(1)}(s,t)\psi_2(t)dt. \tag{37}$$

因为这里假定 $J_{(1)}(\varphi,\varphi)$ 依然可取正值, 故 $\kappa_2>0$. 我们把方程 (37) 写成

$$\psi_2(s)=\mu_2\int K(s,t)\psi_2(t)dt-\mu_2\frac{\psi_1(s)}{\mu_1}(\psi_2,\psi_1),$$

乘以 $\psi_1(s)$, 对 s 积分, 积分时更换重积分的次序, 并注意 $(\psi_1,\psi_1)=1$. 这样式子之右端为零, 而有

$$(\psi_1,\psi_2)=0; \tag{38}$$

也就是说, 本征函数 ψ_2 和本征函数 ψ_1 正交. 所以我们又有

$$\int K(s,t)\psi_2(t)dt=\int K_{(1)}(s,t)\psi_2(t)dt; \tag{39}$$

因此 $\psi_2(s)$ 是 $K(s,t)$ 的本征函数, 而 μ_2 是相应的本征值.

$$\psi_2(s)=\mu_2\int K(s,t)\psi_2(t)dt. \tag{40}$$

由于关系 $(\psi_2, \psi_1) = 0$, 我们可以认为 κ_2 是在条件 $(\phi, \psi_1) = 0$ 之下, 积分型 $J_{(1)}(\varphi, \varphi)$ 的最大值; 可是在这条件下有 $J_{(1)}(\varphi, \varphi) = J(\varphi, \varphi)$, 所以函数 ψ_2 是本节开始时所叙述的最大值问题的解.

我们可以这样继续作核

$$K_{(2)}(s,t) = K_{(1)}(s,t) - \frac{\psi_2(s)\psi_2(t)}{\mu_2}$$

$$= K(s,t) - \frac{\psi_1(s)\psi_1(t)}{\mu_1} - \frac{\psi_2(s)\psi_2(t)}{\mu_2}, \tag{41}$$

及其积分型

$$J_{(2)}(\varphi, \varphi) = \iint K_{(2)}(s,t)\varphi(s)\varphi(t)dsdt, \tag{42}$$

只要上列积分型仍旧可取正值, 我们就可以再求它的最大值. 和上面一样, 我们得到的是和 ψ_1 及 ψ_2 正交的规一化的解以及最大值 $\kappa_3 = 1/\mu_3$, 它们满足齐次积分方程

$$\psi_3(s) = \mu_3 \int K(s,t)\psi_3(t)dt.$$

同样我们也可以找正交于 ψ_1 和 ψ_2 的函数并使原先的积分型取最大值而求出这个解. 和上面一样, 可以看出 $\mu_2 \leqslant \mu_3$.

这个步骤可以无限地继续做下去, 只要由核 $K_{(1)}, K_{(2)}, \cdots$ 所得出的积分型仍旧可以取正值. 假如相反地在这一串核中碰到第一个

$$K_{(m)}(s,t) = K(s,t) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\psi_i(s)\psi_i(t)}{\mu_i}, \tag{43}$$

对它说来, 无论 φ 为何皆有 $J_{(m)}(\varphi_1\varphi) \leqslant 0$, 那么我们的序列就在本征函数 $\psi_m(s)$ 和本征值 μ_m 处中断.

无论哪种情形, 我们都有这样的结果: 核 $K(s,t)$ 的最小的本征值 μ_1 是在附加条件 $(\varphi, \varphi) = 1$ 下积分型 $J(\varphi, \varphi)$ 所取的最大值 κ_1 的逆. 当 φ 为核 $K(s,t)$ 的第一本征函数 ψ_1 时 J 达到这个最大值. 本征值 $\mu_h (h = 2, 3, \cdots)$ 的增序列则可以依次这样来确定, 即 μ_h 为在附加条件

$$(\varphi, \varphi) = 1, \quad (\varphi, \psi_\nu) = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots, h-1)$$

之下 $J(\varphi, \varphi)$ 所取的最大值 κ_h 的逆. 当 φ 等于 ψ_h, 即等于第 h 个本征函数时 J 达到这个最大值 κ_h.

如果在这串最大值问题中遇到 $J(\varphi, \varphi)$ 不能取正值时, 则正本征值序列中断.

按类似的方式, 我们可以得出一串负本征值 $\mu_{-1}, \mu_{-2}, \cdots$ 及其相应的本征函数 $\psi_{-1}(s), \psi_{-2}(s), \cdots$, 只要积分型 $J(\varphi, \varphi)$ 可以取负值. 这里相当于上面的最大值

问题, 我们只需考虑一串最小值问题. 于是我们得到一串无穷多个或有限多个非增的负本征值

$$\mu_{-1} \geqslant \mu_{-2} \geqslant \mu_{-3} \geqslant \cdots \tag{44}$$

以及相应的互相正交的本征函数 $\psi_{-1}(s), \psi_{-2}(s), \cdots$.

本征函数 $\psi_h(s)(h>0)$ 和本征函数 $\psi_{-k}(s)(k>0)$ 正交. 这一事实可由下列二方程得出:

$$\kappa_h \psi_h(s) = \int K(s,t)\psi_h(t)dt,$$

$$\kappa_{-k}\psi_{-k}(s) = \int K(s,t)\psi_{-k}(t)dt;$$

只要以 $\psi_{-k}(s)$ 乘第一式, $\psi_h(s)$ 乘第二式, 相减后再积分, 并注意 $K(s,t)=K(t,s)$, 就可以得到 $(\kappa_h - \kappa_{-k})(\psi_h, \psi_{-k}) = 0$, 因为 $\kappa_h \neq \kappa_{-k}$, 所以 ψ_h, ψ_{-k} 正交.

以上的步骤使我们得到一串本征值, 它们可以是正负交错的. 我们把这些本征值按其绝对值的大小加以排列并记作 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$; 因此有 $|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \cdots$. 我们用 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ 来表示相应的本征函数; 这些本征函数成一正交函数组.

假如核 $K(s,t)$ 只具有有限多个本征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则它必定是退化的而可以表为

$$K(s,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(s)\varphi_i(t)}{\lambda_i}. \tag{45}$$

因为按照第 103 页的讨论, 核

$$K(s,t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(s)\varphi_i(t)}{\lambda_i} = \overline{K}(s,t)$$

必须恒等于零, 这是由于相应的积分型

$$\bar{J}(\varphi,\varphi) = \iint \overline{K}(s,t)\varphi(s)\varphi(t)dsdt$$

的最大及最小值皆等于零的原故. 由此可见*具有有限多个本征值和本征函数的核乃是退化的. 反过来, 一个退化核只能有有限多个本征值和本征函数*. 事实上, 在前面我们已经看到, 决定退化核本征值的问题和一个二次型的本征值问题等当, 而一个二次型是只有有限多个本征值的 (见第 1 章).

按 3.1 节的定义, 一个本征值称为*重复*或*退化的*, 或者说得更确切些是 r 重退化的, 假如和它相应的有 r 个并且不多于 r 个线性独立的本征函数 (可取为互相正交的). 每一个本征值都只能有有限的重数或退化度. 这个在 3.1 节中证明了的定理可以按以下方式得出: 把贝塞尔不等式用于正交函数组 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$, 可得

$$\int [K(s,t)]^2 dt \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int K(s,t)\varphi_i(t)dt \right)^2 \tag{46}$$

或者

$$\int [K(s,t)]^2 dt \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[\varphi_i(s)]^2}{\lambda_i^2}. \tag{47}$$

由此可以得到两个结论：第一, 正项级数

$$T(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[\varphi_i(s)]^2}{\lambda_i^2} \tag{48}$$

是绝对收敛的. 第二, 我们只要对 s 积分并注意 $(\varphi_i, \varphi_i) = 1$, 就可以得到*

$$\iint [K(s,t)]^2 ds dt \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2}. \tag{49}$$

因此*本征值平方的倒数之和收敛*. 所以本征值不能有有限的聚点; 假如本征值的数目为无限, 它们的绝对值必须无限增大, 而且彼此相等的只能有有限多个.

由此我们将断定上面依次由极值问题所定义的本征值 λ_i 和本征函数 φ_i 乃是全部的实本征值和本征函数 (下面将证明不可能有复的本征值). 设 χ 为一与 φ_i 线性独立的本征函数, 其相应的本征值为 σ(可以取作正的). 于是由上面的论据, χ 必须正交于所有相应于本征值 $\lambda_i \neq \sigma$ 的本征函数. 此外, 设 $\sigma = \mu_h$ 是上面所定义的一个 r 重本征值, 也就是说, 设 $\mu_{h-1} < \mu_h = \mu_{h+1} = \cdots = \mu_{h+r-1} < \mu_{\mu+r}$(即“退化情形”), 则由于已假定 χ 和其他的本征函数 $\psi_h, \psi_{h+1}, \cdots, \psi_{h+r-1}$ 线性独立, 我们可以用一个同这些函数正交的 $\overline{\chi} = \chi + c_0\psi_h + \cdots + c_{r-1}\psi_{h+r-1}$ 来代替 χ. 为简单计, 我们仍旧用 χ 来表示这个函数, 因此, 无论在上面考虑的哪一种情形, χ 都正交于所有的本征函数 ψ_i. 所以对任意使 μ_{n+1} 为正的 n 而言, 关系

$$J(\chi,\chi) = \iint K(s,t)\chi(s)\chi(t) ds dt = \frac{1}{\sigma}(\chi,\chi) \leqslant \frac{1}{\mu_{n+1}}$$

皆成立, 这是由于本征值的最大性的原故. 因此若存在无穷多个正本征值 μ_n, 则由 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = \infty$ 可以推出 $(\chi,\chi) = 0$, 也就是说 χ 恒等于零. 另一方面, 若只存在有限多 n 个正本征值, 则 $J(\chi,\chi)$ 在附加条件 $(\chi,\psi_i) = 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$ 之下不能取正值; 同样我们也得出 $(\chi,\chi) = 0$, 因此 $\chi = 0$.

这个证明对负的 σ 而言同样也对. 所以凡正交于所有 ψ_i 的本征函数必须恒等于零, 这就证明了我们所说 ψ_i 乃是全部可能的本征函数这一论断.

由这一事实可以得出以后有用的有趣的结论.

假定 $\eta_1(s), \eta_2(s), \cdots$ 和 $\zeta_1(s), \zeta_2(s), \cdots$ 为两串连续 (或分段连续) 的函数, 它们的范数在一确定上界 M 之下, 则关系

$$\lim_{n\to\infty} J_n'(\eta_n, \zeta_n) = \lim_{n\to\infty} \iint K_{(n)}'(s,t)\eta_n(s)\zeta_n(t) ds dt = 0 \tag{50}$$

* 事实上是在 (47) 中先令 ∞ 为 N, 积分后再令 $N \to \infty$. —— 译者

一致成立, 其中核

$$K'_{(n)}(s,t) = K(s,t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(s)\varphi_i(t)}{\lambda_i};$$

也就是说, 对给定的 M 说来, 左端的量小的程度只依赖于 n.

事实上, 由本征值和本征函数的最大性, 我们有

$$|J'_{(n)}(\eta_n+\zeta_n,\ \eta_n+\zeta_n)| \leqslant \frac{1}{|\lambda_{n+1}|} N(\eta_n+\zeta_n) \leqslant \frac{4M}{|\lambda_{n+1}|},$$ [1)]

$$|J'_{(n)}(\eta_n,\eta_n)| \leqslant \frac{M}{|\lambda_{n+1}|}, \quad |J'_{(n)}(\zeta_n+\zeta_n)| \leqslant \frac{M}{|\lambda_{n+1}|},$$

由于 $|\lambda_n| \to \infty$ 以及

$$J'_{(n)}(\eta+\zeta,\eta+\zeta) = J'_{(n)}(\eta,\eta) + J'_{(n)}(\zeta,\zeta) + 2J'_{(n)}(\eta,\zeta),$$

立刻得出我们的论断.

此外, *一核为正定当且仅当它所有的本征值皆为正*. 因为在且仅在这种情形, 积分型 $J(\varphi,\varphi)$ 对规一化的 φ 而言的最小值为正, 而 $J(\varphi,\varphi)$ 不能取负值.

最后应指出, *实对称核所有的本征值都是实的*. 虽然这个事实在 3.5 节中将是显然的, 我们这里用另一种更为直接的方法来证明这条定理. 定理说明不存在复数 $\lambda = p + iq$(其中 $q \neq 0$)以及一相应的复函数 $\varphi(s) = \psi(s) + i\chi(s)$($\psi$ 和 χ 为实函数, 其中至少有一个不恒等于零) 使有 $\varphi(s) = \lambda \int K(s,t)\varphi(t)dt$. 因为设不然则对共轭的复数量 $\overline{\varphi}$ 和 $\overline{\lambda}$ 而言将有关系 $\overline{\varphi}(s) = \overline{\lambda} \int K(s,t)\overline{\varphi}(t)dt$, 而和前面一样可得

$$0 = (\lambda - \overline{\lambda}) \int \varphi(s)\overline{\varphi}(s)ds = 2iq \int (\psi^2 + \chi^2)ds;$$

也就是说 $q = 0$, 这证明了 λ 为实的.

3.4.3 本征值的极大–极小性质

像二次型的情形一样 (第 1 章), 对称核的每一个本征值 λ_n 及相关于它的本征函数可以直接由一个极大–极小问题来表征, 而不必涉及它前面的本征值及本征函数.

---

1) 由施瓦茨不等式立刻可得

$$N(\eta_n+\zeta_n) = (\eta_n,\eta_n) + (\zeta_n,\zeta_n) + 2(\eta_n,\zeta_n) \leqslant 4M.$$

试首先考虑核 $K(s,t)$ 的正本征值 μ_n 并假设至少有 n 个这样的本征值. 我们提出这样的问题：求 $J(\varphi,\varphi)$ 的最大值, φ 须满足条件 $(\varphi,\varphi)=1$ 以及另外的 $n-1$ 个限制.

$$(\varphi, v_i)=0 \quad (i=1,2,\cdots,n-1). \tag{51}$$

其中 $v_1,v_2,\cdots,v_{n-1}$ 为任意给的连续函数. 我们要问, $J(\varphi,\varphi)$ 的上界是否在取某个可采纳的函数 φ 时的确可以达到. 这个上界必以某种方式依赖于函数 $v_1,v_2,\cdots,v_{n-1}$ 的选择; 所以我们可以用 $\kappa_n\{v_1,v_2,\cdots,v_{n-1}\}$ 来表示它, 或者简写为 $\kappa_n\{v_i\}$. 特别地, 当 $v_i=\psi_i$ 时根据上一节的定理我们有 $\kappa_n\{v_i\}=\kappa_n$; 而这个上界是当 $\varphi=\psi_n(s)$ 时达到的. 现在我们说, 对任何一组函数 $v_1,v_2,\cdots,v_{n-1}$ 而言有

$$\kappa_n\{v_i\}\geqslant\kappa_n.$$

要证明这一点时我们造一个可采纳的函数 $\varphi(s)=c_1\psi_1(s)+c_2\psi_2(s)+\cdots+c_n\psi_n(s)$, 这是本征函数 $\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n$ 的线性组合. 于是条件 $(\varphi,\varphi)=1$ 和条件 (51) 取形式

$$\sum_{i=1}^{n}c_i^2=1,\quad \sum_{i=1}^{n}c_i(\psi_i,v_h)=0\quad (h=1,2,\cdots,n-1).$$

这是以 n 个 c_i 为未知数的一组 $n-1$ 个齐次线性方程, 并附有规一化条件; 这样的方程组总是有解的. 假如把由此得出的 φ 代入 $J(\varphi,\varphi)$, 我们得到

$$J(\varphi,\varphi)=\sum_{i,k=1}^{n}c_ic_kJ(\psi_i,\psi_k).$$

因为 $J(\psi_i,\psi_i)=1/\mu_i$ 而当 $i\neq k$ 时 $J(\psi_i,\psi_k)=0$, 所以有

$$J(\varphi,\varphi)=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i^2}{\mu_i}=\sum_{i=1}^{n}c_i^2k_i\geqslant\kappa_n\sum_{i=1}^{n}c_i^2=\kappa_n.$$

因此 $J(\varphi,\varphi)$ 的最大值一定至少等于 κ_n, 而我们得到这样的结果：$K(s,t)$ 的第 n 个正本征值 λ_n 是 κ_n 的逆, 其中 κ_n 是当函数 v_i 变更时 $\kappa_n\{v_i\}$ 所达到的极小值：$\kappa_n\{v_i\}$ 的定义是 $J(\varphi,\varphi)$ 在 $\varphi(s)$ 为规一的并满足另外 $n-1$ 个条件 (51) 时所取的极大值 (或者是最小上界). 这个极大值中的极小值当

$$v_1=\psi_1,\ v_2=\psi_2,\cdots,v_{n-1}=\psi_{n-1}\ \text{及}\ \varphi=\psi_n$$

时达到.

同样我们可以定义负本征值以及相关于它的本征函数 $\psi_{-n}(n>0)$, 而用到的是在相应条件下 $J(\varphi,\varphi)$ 的极小值中的极大值.

在上述结果的许多应用中, 我们提出以下的定理, 它可由本征值的极大 - 极小性质得出: 假如在一核 $K(s,t)$ 上加一正定核 $K^+(s,t)$(或一负定核 $K^-(s,t)$), 则和 $K+K^+$(或 $K+K^-$) 的正 (或负) 本征值之逆不小于 (或不大于) 核 K 的相应本征值之逆[1]. 其证明与第 1 章 1.4 节中相应定理的证明类似.

3.5 展开定理及其应用

3.5.1 展开定理

假如类比于二次型的主轴变换，我们知道核可以展成级数

$$K(s,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(s)\varphi_i(t)}{\lambda_i}, \tag{52}$$

而这个级数对每个变数说来都是一致收敛的话, 那么就可以得出结论: 任一分段连续函数 $h(t)$ 的积分变换函数

$$g(s)=\int K(s,t)h(t)dt \tag{53}$$

皆能展成级数

$$g(s)=\sum_{i=1}^{\infty}g_i\varphi_i(s),\quad g_i=(g,\varphi_i)=\frac{(h,\varphi_i)}{\lambda_i}.$$

可是关系 (52) 一般并不成立; 所以我们必须采用另一种不同的方法来判断 $g(s)$ 的展开. 令 $h_i=(h,\varphi_i)$ 为 h 对正交组 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots$ 的展开系数, 令 $g(s)$ 为方程 (53) 所定义的以 $K(s,t)$ 为核的 $h(t)$ 的积分换式, 又令

$$g_i=(g,\varphi_i)=\frac{h_i}{\lambda_i}$$

为 g 的展开系数; 按贝塞尔不等式, 级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}h_i^2$ 收敛. 由方程 (47) 及 (49) 知和

$$T(s)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{[\varphi_i(s)]^2}{\lambda_i^2}\right)$$

对 s 一致*收敛并一致有界; 根据施瓦茨不等式, 有

$$\left[\frac{h_n\varphi_n(s)}{\lambda_n}+\cdots+\frac{h_m\varphi_m(s)}{\lambda_m}\right]^2\leqslant(h_n^2+\cdots+h_m^2)\left(\frac{[\varphi_n(s)]^2}{\lambda_n^2}+\cdots+\frac{[\varphi_m(s)]^2}{\lambda_m^2}\right).$$

1) 见 H. Weyl. Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung). Math. Ann., Vol. 71, 1912, 441–479.

* 收敛的一致性在下面可证明, 此处用不着. —— 译者

既然余项 $h_n^2+h_{n+1}^2+\cdots+h_m^2$ 当 n 充分大时为任意小, 而 $[\varphi_n(s)]^2/\lambda_n^2+\cdots+[\varphi_m(s)]^2/\lambda_m^2$ 又恒小于一不依赖于 s 之上界, 可知级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} g_i\varphi_i(s)=\sum_{i=1}^{\infty}(h_i/\lambda_i)\varphi_i(s)$$

绝对并一致收敛. 其和

$$\gamma(s)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g_i\varphi_i(s)=\lim_{n\to\infty}\gamma_n(s)$$

为一 s 之连续函数. 剩下来要证明 $\gamma(s)$ 就是 $g(s)$. 为此目的我们造核

$$K_{(n)}(s,t)=K(s,t)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i(s)\varphi_i(t)}{\lambda_i}\,†$$

使有

$$g(s)-\gamma_n(s)=\int K_{(n)}(s,t)h(t)dt;$$

我们把这个方程乘以一任意连续函数 $w(s)$ 并对 s 积分. 由于关系 (50), 所得式子

$$\int w(s)(g(s)-\gamma_n(s))ds=\iint K_n(s,t)h(t)w(s)dsdt$$

的右端趋于零而我们得到

$$\int w(s)(g(s)-\gamma(s))ds=0,$$

这是因为 $\gamma_n(s)\Rightarrow\gamma(s)$ 的原故. 以上式子对任意函数 $w(s)$ 皆成立, 特别地, 对 $w(s)=g(s)-\gamma(s)$ 成立. 因为 $g(s)-\gamma(s)$ 是连续的, 关系 $(g-\gamma,g-\gamma)=0$ 只有当 $g(s)-\gamma(s)$ 恒等于零时才成立, 这就是我们所要证的. 因此, 我们得到了下述基本展开定理:

凡是像 (53) 中所给的连续函数 $g(s)$, 即分段连续函数 $h(t)$ 以 $K(s,t)$ 为核的积分换式, 皆可用 $K(s,t)$ 的本征函数展为一级数; 这个级数一致并绝对收敛.

3.5.2 非齐次线性积分方程的解

作为上述定理的应用, 我们来推导一个非齐次积分方程 (1) 的解的公式:

$$f(s)=\varphi(s)-\lambda\int K(s,t)\varphi(t)dt.$$

---

† 今后我们将用此函数表示前面第 110 页上写作 $K'_{(n)}$ 的函数.

首先我们假定参数 λ 不等于任何本征值 λ_i. 假如以 (φ, φ_i) 为展开系数的连续函数 φ 为积分方程的解, 则应用展开定理于 $h(t) = \lambda\varphi(t)$, 函数 $\varphi(s) - f(s) = g(s)$ 可由一致并绝对收敛的级数

$$g(s) = \varphi(s) - f(s) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i\varphi_i(s) = \lambda \int K(s,t)\varphi(t)dt \tag{54}$$

给出, 其中 $c_i = (g, \varphi_i)$. 可是由于 (54) 式, 我们必须有

$$\begin{aligned} c_i = (g, \varphi_i) &= \lambda \iint K(s,t)\varphi_i(s)\varphi(t)dsdt \\ &= \frac{\lambda}{\lambda_i}(\varphi_i, \varphi) = \frac{\lambda}{\lambda_i}(\varphi_i, f) + \frac{\lambda}{\lambda_i}(\varphi_i, g), \end{aligned}$$

由此可得

$$c_i = f_i \frac{\lambda}{\lambda_i - \lambda} \quad (f_i = (\varphi_i, f)). \tag{55}$$

因此我们得到 φ 的级数展开

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i}{\lambda_i - \lambda}\varphi_i(s), \tag{56}$$

它必为 (1) 的解. 这个事实的真实性, 也就是说 (56) 的确是 (1) 的解, 很容易看出. 首先, 这个级数绝对并一致收敛. 证明这一点时我们只须注意当 i 充分大时, 对于任意给定的 λ, 关系 $|\lambda_i - \lambda| > |\lambda_i|/2$ 必定成立. 因此除去有限多项外, 级数 $2|\lambda| \times \sum_{i=1}^{\infty} |f_i||\varphi_i(s)|/|\lambda_i|$ 为原级数之长函数; 这个长函数的一致收敛性我们已经证明. 现在假如我们把级数 (56) 代入 (1), 就立刻可以验证它满足方程 (1).

和 3.3 节中的理论一致, 仅当 $\lambda = \lambda_i$ 为一本征值时这个解不复成立; 但即使在这种情形, 只要 $f(s)$ 与属于本征值 λ_i 的所有本征函数 φ_i 正交, 那么这个解还是成立的.

因为根据 3.3 节, 只有当 λ 为本征值时, 积分方程 (1) 才对某些函数 $f(s)$ 而言没有解, 所以我们的核除了 λ_i 这些值之外不能有其他本征值. 在第 110 页中证明的, 实对称核所有的本征值皆为实的这一论断, 现在看来是不证自明的.

3.5.3　累次核的双线公式

令 $h(\sigma) = K(\sigma, t)$, 我们得到展开定理的另一个应用. 这时, 对"累次核"

$$K^{(2)}(s,t) = \int K(s,\sigma)K(\sigma,t)d\sigma$$

我们有展开式

$$K^{(2)}(s,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)}{\lambda_i} \int K(\sigma,t)\varphi_i(\sigma)d\sigma$$

或者有

$$K^{(2)}(s,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)\varphi_i(t)}{\lambda_i^2} \tag{57}$$

同样, 相继的累次核

$$\begin{aligned} K^{(3)}(s,t) &= \int K^{(2)}(s,\sigma)K(\sigma,t)d\sigma \\ &= \iint K(s,\sigma_1)K(\sigma_1,\sigma_2)K(\sigma_2,t)d\sigma_1 d\sigma_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ K^{(n)}(s,t) &= \int K^{(n-1)}(s,\sigma)K(\sigma,t)d\sigma \\ &= \int \cdots \int K(s,\sigma_1)K(\sigma_1,\sigma_2)\cdots K(\sigma_{n-1},t)d\sigma_1\cdots d\sigma_{n-1} \end{aligned}$$

可有展开式

$$K^{(n)}(s,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)\varphi_i(t)}{\lambda_i^n} \quad (n = 2,3,\cdots), \tag{58}$$

所有这些级数都对 s 和对 t 绝对并一致收敛, 而且对 s 和 t 二者一起一致收敛 (见第 3.5.4 小节).

由 (57) 可得

$$K^{(2)}(s,s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[\varphi_i(s)]^2}{\lambda_i^2};$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ K^{(2)}(s,s) - \sum_{i=1}^{n} \frac{[\varphi_i(s)]^2}{\lambda_i^2} \right\} = 0.$$

可是这就等于说

$$\lim_{n\to\infty} \int \left[K(s,t) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(s)\varphi_i(t)}{\lambda_i} \right]^2 dt = 0; \tag{59}$$

也就是说级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \varphi_i(s)\varphi_i(t)/\lambda_i$ 平均收敛于 $K(s,t)$. 假如 s 固定时, 这个级数对 t 一致收敛, 因此它代表一个 t 的连续函数 $L(s,t)$, 我们就一定有 $K = L$. 因为这时候我们可以把 (59) 中的极限取在积分号下, 而得 $\int [K(s,t) - L(s,t)]^2 = 0$, 所以 $K - L = 0$.

3.5.4 Mercer 定理[1)]

当 $n>1$ 时, 我们有相当于方程 (52) 的公式 (58), 而方程 (52) 是不能一般地来证明的. 可是对某种特殊情形, 我们有以下定理: 设 $K(s,t)$ 为一定号连续对称核, 或者设它只有有限多个负的或正的本征值, 则展开式 (52) 成立, 而且它绝对并一致收敛.

在证明中我们先假定 $K(s,t)$ 为正定, 也就是说, 所有的本征值 λ_i 皆为正. 我们首先注意, 对每一正定核 $H(s,t)$ 不等式 $H(s,s)\geqslant 0$ 皆成立. 因为设 $H(s_0,s_0)<0$, 则将有点 $s=s_0, t=s_0$ 的一个邻域 $|s-s_0|<\varepsilon, |t-s_0|<\varepsilon$ 存在, 使在这个区域中到处有 $H(s,t)<0$. 于是我们可以定义函数 $\varphi(s)$: 当 $|s-s_0|\leqslant\varepsilon$ 时令 $\varphi(s)=1$, 在其他各处 $\varphi(s)=0$. 对这个函数而言我们有

$$\iint H(s,t)\varphi(s)\varphi(t)dsdt<0,$$

这和 H 为正定的假设相矛盾. 现在假如把这个结果用于正定核

$$H=K(s,t)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i(s)\varphi_i(t)}{\lambda_i},$$

我们就得到

$$K(s,s)-\sum_{i=1}^{n}\frac{[\varphi_i(s)]^2}{\lambda_i}\geqslant 0.$$

所以正项级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{[\varphi_i(s)]^2}{\lambda_i}$$

对各个 s 的值而言皆收敛. 由关系

$$\left(\frac{\varphi_n(s)}{\sqrt{\lambda_n}}\frac{\varphi_n(t)}{\sqrt{\lambda_n}}+\cdots+\frac{\varphi_m(s)}{\sqrt{\lambda_m}}\frac{\varphi_m(t)}{\sqrt{\lambda_m}}\right)^2$$
$$\leqslant\left(\frac{[\varphi_n(s)]^2}{\sqrt{\lambda_n}}+\cdots+\frac{[\varphi_m(s)]^2}{\lambda_m}\right)\left(\frac{[\varphi_n(t)]^2}{\lambda_n}+\cdots+\frac{[\varphi_m(t)]^2}{\lambda_m}\right)$$

(施瓦茨不等式)知级数 $\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(s)\varphi_i(t)/\lambda_i$ 也绝对收敛; 而且当 s 或 t 为固定时它对 t 或 s 一致收敛. 因此这个级数所定义的函数当 t 固定时对 s 是连续的, 反之亦然. 因此按第 3.5.3 小节它等于核 K.

1) T. Mercer. Functions of positive and negative type and their connection with the theory of integral equations. Trans. Lond. Phil. Soc. (A), Vol. 209, 1909, 415–446.

最后我们证明这个级数同时也对两个变数而言一致收敛; 因为有了上面的不等式, 我们只需验证级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{[\varphi_i(s)]^2}{\lambda_i}$$

的一致收敛性. 可是按照刚才证明的事实, 这个级数等于连续函数 $K(s,s)$, 同时我们又知道有这样一条定理[1]: 设单变数的连续正值函数级数收敛于一连续函数, 则在问题的区间中该级数的收敛是一致的。

有限多个负本征值的存在不会更改级数 (52) 的收敛性, 因为我们可以减去属于负本征值的项 $\varphi_i(s)\varphi_i(t)/\lambda_i$ 而使这个核成为正定的. 这样就完全证明了我们的定理.

3.6 诺伊曼级数和预解核

前面关于积分方程的理论给我们一个法则, 能够任意准确地实际算出方程的解来. 可是它并不像第 1 章中线性方程的理论那样给出形式美好而简洁的解. 要找出较明晰的解, 我们用类似于第 1 章中所用的方法. 我们把积分方程 (1) 改写为 $\varphi(s) = f(s) + \lambda \int K(s,t)\varphi(t)dt$, 并把这样得到的表示式代换积分号下的 $\varphi(t)$. 不断地重复这个步骤, 我们就可以借助累次核把 (1) 写为

$$\begin{aligned}
\varphi(s) &= f(s) + \lambda \int K(s,t)f(t)dt + \lambda^2 \int K^{(2)}(s,t)\varphi(t)dt \\
&= f(s) + \lambda \int K(s,t)f(t)dt + \lambda^2 \int K^{(2)}(s,t)f(t)dt \\
&\quad + \lambda^3 \int K^{(3)}(s,t)\varphi(t)dt \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

而且可以看出, 和第 1 章中一样, 积分方程的解由无穷级数

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int K(s,t)f(t)dt + \lambda^2 \int K^{(2)}(s,t)f(t)dt + \cdots \tag{60}$$

给出, 只要这个级数是一致收敛的. 如果此外我们还假定级数

$$K(s,t) = K(s,t) + \lambda K^{(2)}(s,t) + \lambda^2 K^{(3)}(s,t) + \cdots \tag{61}$$

---

1) 试比较第 48 页的脚注.

一致收敛, 则积分方程 (1)

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int K(s,t)\varphi(t)dt$$

的解可由下列"*逆积分方程*"表示:

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int K(s,t)f(t)dt. \tag{62}$$

函数 $K(s,t) = K(s,t;\lambda)$ 因此叫做*逆核*或*预解核*.

级数 (60) 和 (61) 叫做*诺伊曼级数*. 当 $|\lambda|$ 充分小时, 它们显然是收敛的, 例如可取 $|\lambda| < 1/M$, 其中 M 为 $K(s,t)$ 的绝对值的上界. 由此可见, 当 $|\lambda|$ 充分小时, 预解核是 λ 的解析函数. 它还满足关系

$$K(s,t;\lambda) = K(s,t) + \lambda \int K(s,\sigma)K(\sigma,t;\lambda)d\sigma,$$

$$K(s,t;\lambda) = K(s,t) + \lambda \int K(\sigma,t)K(s,\sigma;\lambda)d\sigma, \tag{63}$$

$$K(s,t;\lambda) - K(s,t;\lambda') = (\lambda - \lambda') \int K(s,\sigma;\lambda)K(\sigma,t;\lambda')d\sigma;$$

可以由直接代入而立刻证明.

假如核 $K(s,t)$ 是对称的, 我们可以求出预解核的一个值得注意的表示式, 这个式子表现出解析函数 K 如何依赖于 λ. 假设 $|\lambda|$ 充分小, 我们利用对称核 $K^{(2)}(s,t)$, $K^{(3)}(s,t), \cdots$ 的级数展开 (58), 并求出在 (61) 中出现的几何级数的和; 这样立刻得到

$$K = K(s,t) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(s)\varphi_i(t)}{\lambda_i(\lambda_i - \lambda)}. \tag{64}$$

按 3.5.1 小节和 3.5.2 小节中的作法, 我们看出右端的级数对凡不为本征值的 λ 值皆收敛, 而且收敛对 s 和 t 是一致的.

关系 (64) 迄今只是对充分小的 $|\lambda|$ 有了证明, 它给出预解核 $K(s,t;\lambda)$ 在整个复 λ 平面上的解析开拓, 而本征值 λ_i 为其一阶极点. 因此 (64) 代表预解式的部分分式分解. 我们可以把所得的结果表述如下: *对称核的预解式为λ的半纯函数, 它在积分方程的本征值处具有一阶极点.* 它在极点 λ_i 的留数给出属于这本征值的本征函数. 由诺伊曼级数和表示式 (64) 知诺伊曼级数的收敛半径等于平方最小的本征值之绝对值.

按照函数论的一般理论, 预解式 $K(s,t;\lambda)$ 既然是一半纯函数, 就可以表为两个整超越函数的商; 预期这两函数中的每一个皆可展为到处收敛的幂级数, 而幂级数的系数可以直接由所给的核求得. 在代数方程的情形, 第 1 章 1.2 节中的公式给出

了这种表示. 很自然地我们会想到在这里也可以得到类似的公式. 此外, 我们还可以期望这些公式并不只限于对称核才有, 而是对任意连续的非对称核皆成立. 这样的表示式是由弗雷德霍姆所得到的, 他利用这些公式作为积分方程理论的起点. 在下一节我们将要推导弗雷德霍姆公式, 推导时同样是用退化核 $A_n(s,t)$ 来一致逼近所给的核然后令 $n\to\infty$ 取极限[1].

3.7 弗雷德霍姆公式

因为以后不会用到弗雷德霍姆公式，我们将省去包含行列式计算的某些中间步骤[2].

在这里我们主要运用同第 1 章 1.2 节中一样的步骤和用语. 对一退化核

$$K(s,t)=A(s,t)=\sum_{p=1}^{n}\alpha_p(s)\beta_p(t)$$

而言, 如果我们如前令 $x_p=(\varphi,\beta_p)$, 则积分方程 (1) 化为

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\sum_{p=1}^{n}x_p\alpha_p(s)=f(s)+\lambda E(x,\alpha(s)). \tag{65}$$

利用符号 $y_p=(f,\beta_p)$, $k_{pq}=(\alpha_p,\beta_q)$, 我们得到 x_p 的一个方程组

$$y_p=x_p-\lambda\sum_{q=1}^{n}k_{pq}x_q. \tag{66}$$

这个方程组的解由下式给出:

$$E(u,x)=-\frac{\Delta(u,y;\lambda)}{\Delta(\lambda)},$$

因此 (1) 之解为

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda E(\alpha(s),x)=f(s)-\lambda\frac{\Delta(\alpha(s),y;\lambda)}{\Delta(\lambda)}; \tag{67}$$

在 (67) 中, 我们有

$$\Delta(u,y;\lambda)=\Delta_1(u,y)-\lambda\Delta_2(u,y)+\cdots+(-1)^{n-1}\lambda^{n-1}\Delta_n(u,y),$$

---

1) 这个方法首次为辜萨所用. Sur un cas élémentaire de l'équation de Fredholm. Bull. Soc. math. France, Vol. 35, 1907, 163–173. 还可以参照 H. Lebesgue. Sur la méthode de M. Goursat pour la résolution de l'équation de Fredholm. ibid., Vol. 36, 1909, 3–19.

2) 参看 G. Kowalewski. Einführung in die Determinantentheorie. Leipzig: Veit, 1909.

$$\Delta(\lambda) = 1 - \lambda\Delta_1 + \cdots + (-1)^n \lambda^n \Delta_n; \tag{68}$$

其中

$$\Delta_h(u,y) = \sum \begin{vmatrix} 0 & u_{p_1} & u_{p_2} & \cdots & u_{p_h} \\ y_{p_1} & k_{p_1p_1} & k_{p_1p_2} & \cdots & k_{p_1p_h} \\ y_{p_2} & k_{p_2p_1} & k_{p_2p_2} & \cdots & k_{p_2p_h} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{p_h} & k_{p_hp_1} & k_{p_hp_2} & \cdots & k_{p_hp_h} \end{vmatrix} \tag{69}$$

$$\Delta_h = \sum \begin{vmatrix} k_{p_1p_1} & k_{p_1p_2} & \cdots & k_{p_1p_h} \\ k_{p_2p_1} & k_{p_2p_2} & \cdots & k_{p_2p_h} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{p_hp_1} & k_{p_hp_2} & \cdots & k_{p_hp_h} \end{vmatrix}$$

在 (69) 中求和下标 $p_1, p_2, \cdots, p_h$ 独立地由 1 变到 n, 而 $p_1 < p_2 < \cdots < p_h$.

行列式 $\Delta_h(\alpha(s), y)$ 显然可写成积分形式 $\int \Delta_h[\alpha(s), \beta(t)] f(t) dt$, 故积分方程的解可表为

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int K(s,t;\lambda) f(t) dt, \tag{62'}$$

其中预解式

$$K(s,t;\lambda) = -\frac{\Delta(\alpha(s), \beta(t); \lambda)}{\Delta(\lambda)} = -\frac{D(s,t;\lambda)}{D(\lambda)}. \tag{70}$$

在公式 (69) 中可以不对所有 $p_1 < p_2 < \cdots < p_h$ 的下标求和而对所有可能的 $p_1, p_2, \cdots, p_h$ 的组合求和, 把得到的结果除以 $h!$. 利用这个事实及 k_{pq} 的定义, 并运用关于行列式的一些简单的定理, 我们得到公式

$$\begin{aligned} D(s,t;\lambda) &= \Delta(\alpha(s), \beta(t); \lambda) \\ &= D_0(s,t) - \frac{1}{1!} D_1(s,t)\lambda + \frac{1}{2!} D_2(s,t)\lambda^2 - \cdots \\ &\quad + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} D_{n-1}(s,t)\lambda^{n-1}, \end{aligned} \tag{71}$$

$$D(\lambda) = \Delta(\lambda) = 1 - \frac{1}{1!} D_1 \lambda + \frac{1}{2!} D_2 \lambda^2 - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} D_n \lambda^n,$$

在这里我们用了简写符号

$$D_h(s,t)=\iint\cdots\int\begin{vmatrix}A(s,t) & A(s,s_1) & \cdots & A(s,s_h)\\ A(s_1,t) & A(s_1,s_1) & \cdots & A(s_1,s_h)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A(s_h,t) & A(s_h,s_1) & \cdots & A(s_h,s_h)\end{vmatrix}ds_1ds_2\cdots ds_h,$$

$$D_h=\iint\cdots\int\begin{vmatrix}A(s_1,s_1) & A(s_1,s_2) & \cdots & A(s_1,s_h)\\ A(s_2,s_1) & A(s_2,s_2) & \cdots & A(s_2,s_h)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A(s_h,s_1) & A(s_h,s_2) & \cdots & A(s_h,s_h)\end{vmatrix}ds_1ds_2\cdots ds_h, \tag{72}$$

其中 $h=1,2,\cdots,n$, 而 $D_0(s,t)=A(s,t)$.

因此 λ 的有理整函数 $D(s,t;\lambda)$ 和 $D(\lambda)$ 已用所给的核显明地写出. 级数 (71) 可以形式地继续写下去而成一无穷级数, 因为当 $h>n$ 或 $h>n-1$ 时, 按 (72) 的定义, D_h 或 $D_h(s,t)$ 这些量对退化核 $A(s,t)=\sum\limits_{p=1}^{n}\alpha_p(s)\beta_p(t)$ 而言皆等于零.

现在假如我们用一串退化核来一致逼近任意的连续核 $K(s,t)$, 则相应的一串式子 (72) 收敛于与核 $K(s,t)$ 相应的行列式. 无穷级数

$$D(s,t;\lambda)=D_0(s,t)-\frac{\lambda}{1!}D_1(s,t)+\cdots,$$
$$D(\lambda)=1-\frac{\lambda}{1!}D_1+\frac{\lambda^2}{2!}D_2-\cdots \tag{73}$$

(此处将 (72) 中的 A 换为 K) 在非退化核的情形表示一 λ 的超越整函数. 要看出这一点, 只需证明级数对任一 λ 的值而言皆收敛. 设对所有的 s 和 t 有 $|K(s,t)|\leqslant M$, 则由行列式的阿达马不等式 (第 1 章, 1.5.2 小节) 有

$$|D_h(s,t)|\leqslant\sqrt{(h+1)^{h+1}}M^{h+1}(b-a)^h,$$

$$|D_h|\leqslant\sqrt{h^h}M^h(b-a)^h.$$

现在知级数

$$\sum_{h=0}^{\infty}\sqrt{(h+1)^{h+1}}M^{h+1}(b-a)^h\frac{\lambda^h}{h!},\quad 1+\sum_{h=1}^{\infty}\sqrt{h^h}M^h(b-a)^h\frac{\lambda^h}{h!}$$

对任一 λ 的值而言皆收敛[1), 它们又是 (73) 的绝对值级数的长函数. 因此就证明了我们的论断. 随之, 对任一 λ 的值而言, 收敛关系

$$\lim_{n\to\infty}D_n(s,t;\lambda)=D(s,t;\lambda),\quad \lim_{n\to\infty}D_n(\lambda)=D(\lambda)$$

1) 首先有 $1/h!<e^h/h^h$ 这一事实, 因为 $h^h/h!$ 乃是 e^h 展式中出现的一项. 因此右边级数中 λ^h 的系数的 h 次根小于 $M(b-a)e/h^{1/2}$, 故当 $h\to\infty$ 时它趋于零; 对另一级数也一样.

对 s 和 t 一致成立, 这里以 n 为下标的量属于第 n 次近似退化核 $A_n(s,t)$, 没有下标量属于 $K(s,t)$. 所以只要 λ 不是 $D(\lambda)$ 的零点 λ_i, 对核 $K(s,t)$ 的预解核而言我们有

$$K(s,t;\lambda)=\frac{D_0(s,t)-\dfrac{\lambda}{1!}D_1(s,\lambda)+\cdots}{1-\dfrac{\lambda}{1!}D_1+\dfrac{\lambda^2}{2!}D_2-\cdots}=\lim_{n\to\infty}K_n(s,t;\lambda); \tag{74}$$

因此, 解任意核 $K(s,t)$ 的积分方程时我们有公式

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int K(s,t;\lambda)f(t)dt. \tag{75}$$

上面这些公式, 为了纪念它们的发现人, 称为*弗雷德霍姆公式*. 显然关系

$$D_h=\int D_{h-1}(s,s)ds \tag{76}$$

成立. 此外我们还有[1)]

$$D'(\lambda)=-\int D(s,s;\lambda)ds, \tag{77}$$

而 m 级微商则由下式给出:

$$D^{(m)}(\lambda)=(-1)^m\iint\cdots\int D\left(\begin{matrix}s_1,s_2,\cdots,s_m\\ s_1,s_2,\cdots,s_m\end{matrix}\middle|\lambda\right)ds_1ds_2\cdots ds_m, \tag{78}$$

其中

$$D\left(\begin{matrix}s_1,s_2,\cdots,s_m\\ t_1,t_2,\cdots,t_m\end{matrix}\middle|\lambda\right)=\sum_{h=1}^{\infty}\frac{(-\lambda)^h}{h!}D_h\left(\begin{matrix}s_1,s_2,\cdots,s_m\\ t_1,t_2,\cdots,t_m\end{matrix}\right), \tag{79}$$

而

$$D_h\left(\begin{matrix}s_1,s_2,\cdots,s_m\\ t_1,t_2,\cdots,t_m\end{matrix}\right)$$
$$=\iint\cdots\int\begin{vmatrix}K(s_1,t_1) & \cdots & K(s_1,t_m) & K(s_1,\sigma_1) & \cdots & K(s_1,\sigma_h)\\ K(s_2,t_1) & \cdots & K(s_2,t_m) & K(s_2,\sigma_1) & \cdots & K(s_2,\sigma_h)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ K(s_m,t_1) & \cdots & K(s_m,t_m) & K(s_m,\sigma_1) & \cdots & K(s_m,\sigma_h)\\ K(\sigma_1,t_1) & \cdots & K(\sigma_1,t_m) & K(\sigma_1,\sigma_1) & \cdots & K(\sigma_1,\sigma_h)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ K(\sigma_h,t_1) & \cdots & K(\sigma_h,t_m) & K(\sigma_h,\sigma_1) & \cdots & K(\sigma_h,\sigma_h)\end{vmatrix}d\sigma_1\cdots d\sigma_h. \tag{80}$$

1) 见前面所引 Fredholm 的论文.

最后我们附带说明, 当 $\lambda=\lambda_i$ 为 $D(\lambda)$ 的零点, 而为预解式 $K(s,t;\lambda)$ 的一阶极点时, 可以从 $K(s,t;\lambda)$ 在这些点的留数求得本征函数. 这一点很容易用我们的公式来证明[1].

3.8 积分方程理论的另一推导

上面所叙述的积分方程一般理论是以这样的事实为基础的：我们可以从近似积分方程的一族解中选出一个序列来, 它一致收敛于所给方程的一个解. 可是在第 2 章, 2.3 节中所引进的 —— 函数序列的独立性测度和渐近维数的概念, 使我们可以把积分方程的理论建立在一个略为不同的基础上. 因为这个步骤能给我们关于这个理论的另一些启发, 所以把它写在这里.

3.8.1 一个引理

设$\psi_1(s),\psi_2(s),\cdots$为一串函数, 其范数皆在一一定上界$M$之下, 且关系

$$\psi_n(s)-\lambda\int K(s,t)\psi_n(t)dt\Rightarrow 0 \tag{81}$$

在一致收敛的意义下成立, 则函数$\psi_n(s)$形成一个具有渐近维数 r 的平滑函数序列.

证明时注意若将 (81) 中的 $\psi_n(x)$ 换为函数 $\chi_n(s)=x_1\psi_{n1}+x_2\psi_{n2}+\cdots+x_p\psi_{np}$, 则该关系仍然成立. 此处设系数 $x_1,x_2,\cdots,x_p$ 的绝对值是有界的, 而函数

$$\psi_{n_1},\psi_{n_2},\cdots,\psi_{n_p}$$

为序列 ψ_n 中的任意 p 个函数, 当 n 趋于无穷时它们的下标 n_i 也趋于无穷. 若在函数 $\psi_n(s)$ 中存在一串 r 个的函数组, 其中每个的下标 n 皆可为任意大, 而每一组的独立性测度皆在一定下界 α 之上, 换句话说, 若原序列的渐近维数至少为 r, 那么我们可以把这些组内的函数正交化; 在正交化过程中所出现的系数将都小于上界 $1/\sqrt{\alpha}$(第 2 章, 2.3.1 小节). 因此我们得到一串 r 个互相正交的函数 $\omega_{n,i}(s)(i=1,2,\cdots,r;n=1,2,\cdots)$, 对它们说来极限方程

$$\lim_{n\to\infty}\left(\omega_{n,i}(s)-\lambda\int K(s,t)\omega_{n,i}(t)dt\right)=0 \tag{82}$$

对 s 一致成立. 对每一 n 而言, 通常利用贝塞尔不等式[2]的论据使我们得到结果

$$\iint[K(s,t)]^2dsdt\geqslant\sum_{i=1}^{r}\int\left[\int K(s,t)\omega_{n,i}(t)dt\right]^2ds;$$

---

1) 关于弗雷德霍姆理论的形式处理的详细讨论, 可参看 G. Kowalewski. Einführung in die Determinantentheorie. Leipzig; Veit, 1909.

2) 见本章 3.4.2 小节.

由上式及方程 (82) 可得

$$\iint [K(s,t)]^2 \geqslant \frac{r}{\lambda^2}.$$

因此我们找到原序列的渐近维数的一个上界; 至于这个序列是平滑的这一点, 可立刻从 (82) 得出. 因为若 ε_n 表示一随 n 之增大而趋于零之数, 则由施瓦茨不等式有

$$[\psi_n(s)]^2 \leqslant M\lambda^2 \int [K(s,t)]^2 dt + \varepsilon_n,$$

这就是说 $\psi_n(s)$ 是一致有界的; 同样, 由 $\int (x_1\psi_{n_1} + \cdots + x_p\psi_{n_p})^2 ds < \varepsilon$ 可得关系

$$(x_1\psi_{n_1} + \cdots + x_p\psi_{n_p})^2 \leqslant \varepsilon\lambda^2 \int [K(s,t)]^2 dt + \varepsilon_n.$$

所以序列是光滑的.

3.8.2 对称核的本征函数

我们将用刚才证明的引理来得出对称核 $K(s,t)$ 的本征函数, 我们用一串退化对称核 $A_n(s,t)$ 来一致逼近 $K(s,t)$. 像前面一样, 令 $\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \cdots$ 及 $\mu_{-1}^{(n)}, \mu_{-2}^{(n)}, \cdots$ 依次表示 $A_n(s,t)$ 的正本征值和负本征值, 令其相应的本征函数为 $\psi_1^{(n)}(s), \psi_2^{(n)}(s), \cdots, \psi_{-1}^{(n)}(s), \psi_{-2}^{(n)}(s), \cdots$. 这里我们假定重本征值须重复写适当的次数. 令

$$J_n(\varphi,\varphi) = \iint A_n(s,t)\varphi(s)\varphi(t)dsdt$$

以及

$$J(\varphi,\varphi) = \iint K(s,t)\varphi(s)\varphi(t)dsdt$$

依次为关于 A_n 和 K 的积分型, 并假设 $J(\varphi,\varphi)$ 可取正值, 这一点是可以的. 这样 $\kappa_1^{(n)} = 1/\mu_1^{(n)}$ 就是当 φ 为规一化函数时 $J_n(\varphi,\varphi)$ 的最大值; 令 $\kappa_1 = 1/\mu_1$ 为同样规一化条件下 $J(\varphi,\varphi)$ 的上界. 由于当 n 充分大时, $J(\varphi,\varphi)$ 和 $J_n(\varphi,\varphi)$ 的值相差可小于任意给定的正数, 我们有 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_1^{(n)} = \mu_1$. 所以由 $\psi_1^{(n)}(s) - \mu_1^{(n)} \int A_n(s,t)\psi_1^{(n)}(t)dt = 0$ 可得关系

$$\psi_1^{(n)}(s) - \mu_1 \int K(s,t)\psi_1^{(n)}(t)dt \Rightarrow 0, \tag{83}$$

这是因为 $A_n(s,t) \Rightarrow K(s,t)$ 之故. 因此利用引理, 函数 $\psi_1^{(n)}$ 成一具有有限正维数 r 的平滑序列 (r 若为零则和函数 $\psi_1^{(n)}$ 规一化的性质相矛盾). 按照第 2 章 2.3 节, 这些函数确定一线性函数空间, 其正交规一分量为 $\psi_{1,1}(s), \psi_{1,2}(s), \cdots, \psi_{1,r}(s)$, 这些函数必然是齐次积分方程

$$\psi_{1,i}(s) = \mu_1 \int K(s,t)\psi_{1,i}(t)dt \quad (i = 1, 2, \cdots, r)$$

的解, 因此函数 $\psi_{1,i}$ 为 $K(s,t)$ 的属于本征值 μ_1 的本征函数.

完全用同样的方式我们可以得出 $K(s,t)$ 的其余本征值和本征函数. 例如, $\kappa_h^{(n)} = 1/\mu_h^{(n)}$ 为条件 $(\varphi,\varphi)=1$ 及 $(\varphi,v_i)=0$ $(i=1,2,\cdots,h-1)$ 下 $J_n(\varphi,\varphi)$ 的极大值中的极小值 (变动 $v_1(s),v_2(s),\cdots,v_{h-1}(s)$).

假如我们类似地定义 $\kappa_h = 1/\mu_h$ 为 $J(\varphi,\varphi)$ 的上界的下界 (变 v_1), 由于 $J_n(\varphi,\varphi)$ 和 $J(\varphi,\varphi)$ 的值相接近, 我们就又有 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_h^{(n)} = \mu_h$. 由此得出关系

$$\psi_h^{(n)}(s) - \mu_h \int K(s,t)\psi_h^{(n)}(t)dt \Rightarrow 0,$$

而其他的论据如前. 要得到负本征值及相应的本征函数, 我们必须考虑相应的最小-最大问题. 假如某种符号的本征值只有有限多个, 则在若干个步骤后终止就行了.

3.8.3 非对称核

上述方法同样也简化了非对称积分方程 (1) 的处理. 我们只需扼要地述叙一二; 我们采用和前面一样的记号. 在情形 I, 可设 ρ_n 及 c_n 如此使对所有的 n 而言范数 c_n^2 皆在上界 M 之下. 于是差 $\rho_n - \rho_m = \zeta_{nm}$ 的范数有界 ——$4M$. 此外

$$\lim_{n,m\to\infty}\left[\zeta_{nm}(s) - \lambda\int K(s,t)\zeta_{nm}(t)dt\right] = 0,$$

本式对 s 一致成立. 所以按引理, 重序列 ζ_{nm} 的任一子序列只要 n 和 m 都趋于无穷, 它就具有有界的渐近维数 r, 而且 r 的上界只依赖于 $K(s,t)$ 和 λ. 因此通过极限过程, 我们的重序列 ζ_{nm} 确定一线性函数空间 (见第 2 章, 2.3 节). 只要不是每一个子序列的渐近维数都为零, 也就是说只要不是 $\zeta_{nm}\Rightarrow 0$, 那么这个空间就具有有限 r 个正交分量 $\psi_1(s),\psi_2(s),\cdots,\psi_r(s)$. 在 $\zeta_{nm}\Rightarrow 0$ 的情形 $\rho_n(s)$ 直接就一致收敛于积分方程 (1) 的一个解. 在 $r>0$ 的情形 $\psi_i(s)$ 是齐次方程的解. 我们用函数

$$\eta_n(s) = \rho_n(s) + x_1\psi_1(s) + \cdots + x_r\psi_r(s)$$

来代替 ρ_n, 这个函数和 $\psi_1(s),\psi_2(s),\cdots,\psi_r(s)$ 正交. 对这些函数说来必然有关系

$$\left[\eta_n(s) - \lambda\int K(s,t)\eta_n(t)dt\right] - f(s) \Rightarrow 0.$$

和上面一样, 现在可以对差 $\eta_n - \eta_m = \zeta_{mn}$ 应用引理; 我们很容易得到这样的结论, 就是这个序列的任一子序列的维数必为零, 也就是说函数 $\eta_n(s)$ 一致收敛于一个与函数 $\psi_i(s)$ 正交的积分方程的解.

同样, 在情形 II 利用引理, 我们得到一个齐次积分方程的解组成的线性空间, 它是序列 $\sigma_n(s) = \rho_n(s)/c_n$ 的极限集.

这样, 我们的第二种处理方法就对在这里出现的收敛情况提供了更精确的说明. 特别地, 我们看到, 考虑以 $A_n(s,t)$ 为核的近似积分方程, 原齐次方程或非齐次方程的解就可以得到随意的近似.

3.8.4　本征值和本征函数对核的连续依赖性

在考虑积分方程的解如何随着核改变的问题时, 我们限于讨论对称核 $K(s,t)$ 的本征值问题. 设核 $K(s,t)$ 是一串对称核 $K_n(s,t)(n=1,2,\cdots)$ 的一致极限. 假如我们考虑满足条件 $(\varphi,\varphi)\leqslant M$ 的函数 φ, 则以 K_n 和 K 为核的二次积分型 $J_n(\varphi,\varphi)$ 和 $J(\varphi,\varphi)$ 的值当 n 充分大时相差为任意小. 所以在条件 $(\varphi,\varphi)=1,(\varphi,v_i)=0$ 下这两个二次型的最大及最小值的差也是如此, 因此这些最大中的最小值和最小中的最大值也一样. 换句话说: *第 h 个正本征值及第 h 个负本征值随其核连续地改变*. 关于本征函数, 由于可以差符号及出现重本征值, 我们不能期望有严格的连续性. 可是, 以下的事实却是成立的: 令 λ_h 为核 $K(s,t)$ 的 r 重本征值, 也就是令

$$\lambda_h=\lim\lambda_h^{(n)}=\lim\lambda_{h+1}^{(n)}=\cdots=\lim\lambda_{h+r-1}^{(n)},$$

我们假设对 $\lambda_{h-1}^{(n)}$ 及 $\lambda_{h+r}^{(n)}$ 而言以上关系不成立. 则当 n 增大时, 核 $K_n(s,t)$ 的本征函数 $\psi_h^{(n)}(s),\psi_{h+1}^{(n)}(s),\cdots,\psi_{h+r-1}^{(n)}(s)$ 所张的线性空间一致收敛[1]于 $K(s,t)$ 的对应于本征值 λ_n 的诸本征函数所张的线性空间.

这条定理是本征函数连续性的完备表述. 根据引理几乎立刻就可以得到证明, 只要注意对本征函数序列 $\psi_{h+k}^{(n)}(s)(0\leqslant k<r)$ 而言, 极限关系

$$\left[\psi_{h+k}^{(n)}(s)-\lambda_h\int K(s,t)\psi_{h+k}^{(n)}(t)dt\right]\Rightarrow 0$$

成立, 并且这个序列一定有渐近维数 r.

3.9　本理论的推广

由 3.1 节到 3.6 节以及 3.8 节中所展开的讨论可以在两个方面作有效的推广.

首先, 若考虑的是多个自变数 (例如 m 个) 函数的积分方程, 则所有的论据仍然成立. 因此, 设 $f(s)$ 和 $\varphi(s)$ 为变数 $s_1,s_2,\cdots,s_m$ 在固定有限区域 G 上的连续函数; 又设 $K(s,t)$ 为变数 $s_1,s_2,\cdots,s_m$ 和 $t_1,t_2,\cdots,t_m$ 的连续函数, 每一组变数皆以区域 G 为范; 令 ds 表示 G 的体积元素 $ds_1ds_2\cdots ds_m$, 而 dt 表示相应的体积元素 $dt_1dt_2\cdots dt_m$, 所有积分皆了解为在区域 G 上积, 于是积分方程

$$f(s)=\varphi(s)-\lambda\int K(s,t)\varphi(t)dt$$

1) 关于线性族收敛的概念可参看第 2 章, 2.3.2 小节.

PDG

为 m 个变数的函数 $\varphi(s)$ 的积分方程, 其核 $K(s,t)$ 为一 $2m$ 个变数的函数; 这样, 我们的整个理论将一定成立.

其次, 核为连续的这一条件实不必要. 这个条件可以放宽而不影响结果, 我们不企图得出使我们的理论成立的最普遍的条件; 我们只把理论加以扩充使它足够去处理一些最重要的应用. 我们先考虑核 $K(s,t)$ 为两个变数的函数. 对分段连续的核而言, 除了 Mercer 定理外, 我们以前的论断仍成立, 所加的只是些不关紧要的修改, 因为在第 2 章中已指出, 任意分段连续的函数可用连续函数随意平均逼近. 此外, 对在有些点上为无穷的核, 我们的论据也能加以证明, 只要积分

$$\iint [K(s,t)]^2 ds dt, \quad \int [K(s,t)]^2 ds, \quad \int [K(s,t)]^2 dt$$

存在,而后两个积分作为 t 和 s 的函数在一定上界之下即可. 例如核在 $s=t$ 点趋于无穷但小于 $\frac{1}{2}$ 级, 也就是说如果 $K(s,t)$ 可表为 $K(s,t)=H(s,t)|s-t|^{-\alpha}$ 的形式, 其中 $0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2}$, $H(s,t)$ 到处连续, 则两条件即满足. 要证明对这样的核说来我们所得的定理成立, 只需用连续退化核 $A_n(s,t)$ 来逼近这个核而使下述条件成立即可: $\int [K(s,t)-A_n(s,t)]^2 dt$ 当 $n \to \infty$ 时一致趋于零且 $\int [A_n(s+\eta,t)-A_n(s,t)]^2 dt$ 当 $|\eta|$ 趋于零时对 s 和 n 而言一致趋于零. 这样就可以作出我们所有的论断. 同样, 在两个自变数的情形, 若当 $s_1=t_1$, $s_2=t_2$ 时核为小于一级的无穷, 则所有我们的定理皆成立, 因为在这种情形积分 $\iint [K(s_1,s_2;t_1,t_2)]^2 ds_1 ds_2$的收敛性不受影响. 类似地, 在三个自变数的情形, 我们可以允许有小于 3/2 级的奇点, 一般说来对 n 个自变数而言允许 K 有小于 $n/2$ 级的奇点.

最后, 我们不加证明地指出, 我们的理论不难推广到只满足前面关于 $K^2(s,t)$ 的可积性所作假定的积分方程. 这并不需要再附加像核的连续性这类要求.

3.10 补充材料和问题

3.10.1 问题

证明:

(a) 核

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\ ns\ \sin\ nt}{n} = \frac{1}{2}\log\left|\sin\frac{s+t}{2} \Big/ \sin\frac{s-t}{2}\right| \quad (0 \leqslant s,t \leqslant \pi)$$

的本征值为 $\lambda_n = 2n/\pi$, 本征函数为 $\sin nt$.

(b) 对称核

$$\frac{1}{2\pi}\frac{1-h^2}{1-2h\ \cos\ (s-t)+h^2}\quad (0\leqslant s,t\leqslant 2\pi)$$

当 $|h|<1$ 时本征函数为 1, $\sin\ ns$, $\cos\ ns$, 相应的本征值为 1, $1/h^n$, $1/h^n$.

(c) 对称核

$$K(s,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{(s^2+t^2)/2}\int_{-\infty}^{s}e^{-\tau^2}d\tau\int_{t}^{\infty}e^{-\tau^2}d\tau\quad (s\leqslant t)$$

的本征函数为埃尔米特正交函数 $e^{s^2/2}(d^n e^{-s^2}/ds^n)$, 其本征值为 $\lambda_n=2n+2$.

(d) 对称核

$$K(s,t)=e^{(s+t)/2}\int_{t}^{\infty}\frac{e^{-\tau}}{\tau}d\tau\quad (0\leqslant s\leqslant t)$$

的本征函数为拉盖尔正交函数

$$e^{-s/2}\frac{\partial^n}{\partial h^n}\frac{e^{-sh/(1-h)}}{1-h}\bigg|_{h=0};$$

相应的本征值为 $\lambda_n=n+1$[1].

3.10.2　奇异积分方程

假如核具有过分高级的奇点, 或者当基本区域为无限时, 核在无穷趋于零不够快, 则上述普遍理论可以不成立 (前一节所考虑的核是收敛得够快的).

现在我们要来给出一些积分方程的例子, 其本征值的重数为无穷.

积分公式

$$\int_{0}^{\infty}\ \sin\ st\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-at}+\frac{t}{a^2+t^2}\right)dt=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-as}+\frac{s}{a^2+s^2}$$

对 a 说来是恒成立的. 所以在基本区域 $0\leqslant s,\ t<\infty$ 上, 对应于本征值 $\lambda=1$ 核 $\sin\ st$ 有无穷多个本征函数.

埃尔米特正交函数为核 e^{ist} 的本征函数, 其本征值为 $i^{-n}/\sqrt{2\pi}$. 因此 $\pm 1/\sqrt{2\pi}$, $\pm i/\sqrt{2\pi}$ 四个数中的任一个都是这个核的本征值, 而重数为无穷.

在有限区间内含无穷多个本征值的积分方程[2]可由下面的例子给出:

$$\varphi(s)=\lambda\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|s-t|}\varphi(t)dt;$$

---

1) 见 R. Neumann. Die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Hermiteschen und Laguerreschen Orthogonalfunltionen usw.. Dissertation, Breslau, 1912.

2) 与此有关的积分方程曾由霍普夫处理过. E. Hopf. Über lineare Integralgleichungen mit positivem Kern. Sitzungsber. Akad. Berlin(math. phys. KI.), 1928, 233–275. 又可参看在此文中所引的 U. Wegner, G. H. Hardy 和 E. C. Titchmarsh 的论文.

它的解是 $e^{\alpha is}$, 而本征值为 $\lambda=\frac{1}{2}(1+\alpha^2)$. 因此任一 $\lambda>\frac{1}{2}$ 皆为本征值.

3.10.3 依·施密特关于弗雷德霍姆定理的推导[1)]

试取 $\lambda=1$ 并将核 $K(s,t)$ 写成

$$K(s,t)=\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu(s)\beta_\nu(t)+k(s,t),$$

其中 $\iint[k(s,t)]^2dsdt<1$. 按 3.6 节, $k(s,t)$ 的诺伊曼级数在 $\lambda=1$ 收敛, 所以它代表核 $k(s,t)$ 的预解式 $\kappa(s,t)$. 将积分方程 (1) 写为

$$f_1(s)=\varphi(s)-\int k(s,t)\varphi(t)dt,$$

其中

$$f_1(s)=f(s)+\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu\alpha_\nu(s)\quad(x_\nu=(\varphi,\beta_\nu)),$$

于是我们有公式

$$\varphi(s)=f(s)+\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu\alpha_\nu(s)+\int\kappa(s,t)\left[f(t)+\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu\alpha_\nu(t)\right]dt$$

或者

$$\begin{aligned}f_2(s)&=f(s)+\int\kappa(s,t)f(t)dt\\&=\varphi(s)-\int\left[\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu(s)\beta_\nu(t)+\gamma_\nu(s)\beta_\nu(t)\right]\varphi(t)dt,\end{aligned}$$

其中

$$\gamma_\nu(s)=\int\kappa(s,\tau)\alpha_\nu(\tau)d\tau.$$

这样, 所给的积分方程一步就化为一具有退化核的方程.

3.10.4 解对称积分方程的恩斯库格法[2)]

我们考虑一正定核 $K(s,t)$, 其第一个本征值大于 1, 也就是说对这个核说来不等式

$$\int[\varphi(s)]^2ds-\iint K(s,t)\varphi(s)\varphi(t)dsdt>0$$

---

1) E. Schmidt. Zur Theorie der linearen und nicht linearen Integralgleichungen. Part II. Auflösung der allgemeinen linearen Integralgleichung, Math. Ann., Vol. 64, 1907, 161–174.

2) D. Enskog. Kinetische Theorie der Vorgänge in mässig verdünuten Gasen. Uppsala: Dissertation, 1917.

对所有的 φ 皆成立. 积分方程 (1)(设 $\lambda=1$) 可以写成 $f(s)=J(\varphi)$, 其中

$$J(\varphi)=\varphi(s)-\iint K(s,t)\varphi(t)dt.$$

从任一完备函数组 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots$ 我们现在用类似于第 2 章中所讲的正交化步骤来造出一组函数 $v_1(s),v_2(s),\cdots$, 它具有性质 $\int v_iJ(v_k)ds=\delta_{ik}$[1]. 这样的函数组叫做一"对核 $K(s,t)$ 而言的极性完备组". 假如我们令 $a_\nu=\iint \varphi J(v_\nu)ds=\int v_\nu f ds$, 则只要级数一致收敛, 立刻可以得到 $\varphi(s)=\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}a_\nu v_\nu(s)$. 又, 无论选择哪一个分段连续函数 $\varphi(s)$, 函数 v_ν 都满足"完备性关系"

$$\int \varphi(s)J[\varphi(s)]ds=\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu^2.$$

3.10.5　决定本征函数的凯洛格法[2]

由一个任意的规一化函数 $\varphi_0(s)$ 出发, 我们从关系式 $\varphi_{\nu+1}(s)=\lambda_{\nu+1}\int K(s,t)\times\varphi_\nu(t)dt$, $N\varphi_\nu=1$, 定出函数 $\varphi_\nu(s)$ 和数 λ_ν. 通过取极限可得出核或其累次核的一个本征值及相应的本征函数.

读者可建立本方法和渐近维数法间的关系并从这一观点出发来推导.

3.10.6　核的形式函数及其本征值

对于和一给定核相联的积分算子而言, 存在类似于第 1 章中关于矩阵的谱关系. 特别地, 让我们考虑一有理整函数 $f(u)=\sum\limits_{\nu=1}^{n}a_\nu u^\nu$, 它在 $u=0$ 时为零; 我们用对称核 $K(s,t)$ 的相应累次核来代替 u 的方次, 就可以得到核

$$H(s,t)=f[K]=\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu K^{(\nu)}(s,t).$$

于是下述定理成立: *H 的本征函数 φ_i 和 K 的本征函数等同, 而 H 的相应本征值之逆 η_i 与 K 的本征值之逆 κ_i 间有下列的关系:*

$$\eta_i=j(\kappa_i).$$

1) δ_{ik} 为"克罗内克数", 其定义为 $\delta_{ii}=1$; 当 $i\neq k$, $\delta_{ik}=0$.

2) O. D. Kellogg. On the existence and closure of sets of characteristic functions. Math. Ann., Vol. 86, 1922, 14-17.

事实上，我们可以直接验证 K 的对应于本征值 $\lambda_i = 1/\kappa_i$ 的每一个本征函数 φ_i 也是 H 的本征函数, 相应本征值为 $1/f(\kappa_i)$. 因为关系

$$\iint [H(s,t)]^2 dsdt = \sum_{i=1}^{\infty} [f(\kappa_i)]^2$$

成立, 我们看出 H 不再有其他的本征值和本征函数.

3.10.7 没有本征函数的一个非对称核例子

核

$$K(s,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin\ \nu s\ \sin\ (\nu+1)t}{\nu^2}$$

在区域 $0 \leqslant s,\ t \leqslant 2\pi$ 中没有本征函数. 这是因为累次核为

$$K^{(n)}(s,t) = \pi^{n-1} \sum_{\nu} \frac{\sin\ \nu s\ \sin(\nu+n)t}{\nu^2(\nu+1)^2\cdots(\nu+n-1)^2},$$

因此诺伊曼级数对所有的 λ 值而言皆收敛. 又可以证明对这个核来说对应于 K 的 $D(\lambda)$ 为一常数而能得到同样的结论[1].

3.10.8 沃尔泰拉积分方程[2]

若当 $s < t$ 时 $K(s,t) = 0$, 则积分方程可以写成

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^s K(s,t)\varphi(t)dt.$$

这一类型的积分方程特别由沃尔泰拉处理过. 读者可以证明这个方程的预解式是 λ 的整超越函数, 所以沃尔泰拉积分方程对每一个 λ 而言具有唯一的一个解, 因此, 无论 λ 为何皆无本征函数而诺伊曼级数恒收敛.

3.10.9 阿贝尔积分方程[3]

阿贝尔研究了一种特殊的沃尔泰拉型的积分方程, 这种方程在许多应用上极为重要. 这方程是为了要解以下问题而引起的; 设质量为 m 的质点在重力的影响下沿一在铅垂平面内的平滑曲线运动. 设质点沿曲线由高度 x 运动到曲线的最低点所需要的时间 t 为一给定的 x 的函数, 曲线的方程为何? 这个问题导致积分方程

$$f(x) = \int_0^x \frac{\varphi(t)dt}{\sqrt{2g(x-t)}}.$$

1) 在 Goursat: Cours d'analyse (见参考书目录) 一书中可以找到类似的核.

2) V. Volterra. Leçons sur les équations intègrales et les équations intégrodifférentielles. Chapter II. Paris: Gautier-Villars, 1913.

3) Abel. Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies. Christiania, Works, 1881, I, 11-27; Bôcher. Integral Equations. Cambridge: Cambridge University Press, 1909, 8.

如果设 $f(x)$ 为当 $x=0$ 时为零的连续可微函数, 则积分方程的解为

$$\varphi(x)=\frac{\sqrt{2g}}{\pi}\int_0^x\frac{f'(t)dt}{\sqrt{x-t}},$$

其中 g 为重力加速度; 曲线的方程则为

$$y=\int_0^x\sqrt{|\varphi^2(t)-1|}dt.$$

更一般地, 我们可以研究方程

$$f(x)=\int_a^x\frac{\varphi(s)ds}{(s-x)^\alpha}\quad(0<\alpha<1),$$

当 $f(x)$ 连续可微时, 它的解是

$$\varphi(x)=\frac{\sin\ \alpha\pi}{\pi}\frac{f(a)}{(x-a)^{1-\alpha}}+\frac{\sin\ \alpha\pi}{\pi}\int_a^x\frac{f'(s)ds}{(s-x)^{1-\alpha}}.$$

3.10.10 属于一非对称核的共轭正交组[1)]

我们可以从一个非对称核 $K(s,t)$ 造出两个对称核 $K'(s,t)=\int K(s,\sigma)K(t,\sigma)d\sigma$ 和 $K''(s,t)=\int K(\sigma,s)K(\sigma,t)d\sigma$. 于是存在一串函数对及相应的 λ 值使有

$$\varphi_\nu(s)=\lambda_\nu\int K(s,t)\psi_\nu(t)dt,\quad \psi_\nu(s)=\lambda_\nu\int K(t,s)\varphi_\nu(t)dt,$$

$$\varphi_\nu(s)=\lambda_\nu^2\int K'(s,t)\varphi_\nu(t)dt,\quad \psi_\nu(s)=\lambda_\nu^2\int K''(s,t)\psi_\nu(t)dt.$$

凡可写成 $\int K(s,t)h(t)dt$ 的函数皆可用正交组 φ_ν 展成一绝对并一致收敛的函数级数; 同样, 凡形如 $\int K(t,s)h(t)dt$ 的函数可用函数 ψ_ν 展成级数. 关系式 $K(s,t)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\varphi_\nu(s)\psi_\nu(t)/\lambda_\nu$ 成立. 只要右端的级数对每一变数而言一致收敛. 核 K 由值 λ_ν 及两个独立的正交组唯一确定.

3.10.11 第一类积分方程

第一类积分方程是具有下列形式的积分方程:

$$f(s)=\int K(s,t)\varphi(t)dt. \tag{84}$$

1) E. Schmidt. Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I. Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener. Math. Ann. Vol. 63, 1907, 433–476.

PDG

例如在前面我们就看到过这类方程: 假如第一类积分方程 (53) 的解存在, 那么其中的函数 $g(s)$ 就可以用核的本征函数展成级数. 别的例子有傅里叶积分变换和梅林积分变换 (第 2 章 2.10.8 小节). 第一类积分方程的理论中独特的困难是由于以下事实引起的: 对连续核 $K(s,t)$ 而言, 方程 (84) 把所有分段连续函数 $\varphi(s)$ 的流形变换为一较为窄的流形, 因为凡由变换所得的函数 $f(s)$ 必然是连续的. 若 $K(s,t)$ 可微, 则每一分段连续的函数 (事实上是每一可积函数) 皆变换为一可微函数. 因此, 一般说来, $f(s)$ 为连续的积分方程不能以连续函数 φ 为解. 对较广的函数类 $f(s)$ 而言, 也只有当 $K(s,t)$ 具有某种不正规性时才能期望 (84) 可解. 读者可以从这一观点来考虑前前后后这类积分方程的例子; 无限区域的作用与核的异点相当.

核为对称时, 我们可以试求形如 $\varphi(s)=\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu x_\nu \varphi_\nu(s)$ 的解, 其中 $x_\nu=(f,\varphi_\nu)$ 为 f 对核的本征函数组 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots$ 的傅里叶系数. 假如这个级数一致收敛 —— 由于 ν 增大时 λ_ν 亦增大, 这个条件给了 $f(s)$ 以限制 —— 那么它的确给出了 (84) 的解.

一般的情形全包括在皮卡[1] 的一条定理之内. 这定理给出任意 (可为非对称的) 核 K 的第一类积分方程$f(s)=\int K(s,t)\varphi(t)dt$ 有平方可积分的解 $\varphi(s)$ 的充要条件: 若 φ_i,ψ_i 为本章第 10 小节中所定义的属于 $K(s,t)$ 的共轭函数对, λ_i 为相应的本征值, 则上述积分方程当且仅当级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^2\left(\int f(s)\varphi_i(s)ds\right)^2$$

收敛时可解.

3.10.12 无穷多变数法

若 $\omega_1(s),\omega_2(s),\cdots$ 为一基本域上的完备正交组, 若定义 $x_i=(\varphi,\omega_i)$, $f_i=(f,\omega_i)$, $k_{pq}=\iint K(s,t)\omega_p(s)\omega_q(t)dsdt$, 则积分方程 (1) 立刻导致无穷多个变数的线性代数方程组

$$f_i=x_i-\lambda\sum_{j=1}^{\infty}k_{ij}x_j \quad (i=1,2,\cdots),$$

其中包括无穷多个未知量 $x_1,x_2,\cdots$. 级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_i^2,\sum\limits_{i=1}^{\infty}f_i^2$ 及 $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty}k_{ij}^2$ 的收敛性可由

1) E. Picard. Sur un théorème général relatif aux équations intégrales de première espèce et sur quelques problèmes de physique mathématique. Rend. Ciro. math. Palermo, V. 29, 1910, 79–97.

贝塞尔不等式导出. 于是这一方程组的求解理论就导致关于积分方程 (1) 的定理.

3.10.13 本征函数的极小性

一对称核的本征函数 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$, 或一非对称核的两正交组 φ_i 和 ψ_i 及其相应的本征值 λ_i, 皆可由以下极小问题得出: 用退化核 $A_n(s,t) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(s)\Psi_i(t)/\Lambda_i$ 来逼近核 $K(s,t)$, 使得 $\iint (K - A_n)^2 dsdt$ 为任意小. 读者可证明 $\Phi_i = \varphi_i, \Psi_i = \psi_i, \Lambda_i = \lambda_i$ 为问题的解.

3.10.14 极性积分方程

对形如 $K(s,t) = A(s)S(s,t)$ 的核而言, 其中 $S(s,t)$ 对称而 $A(s)$ 除了有限多个跳跃点之外连续, 我们可以导出类似对称核情形中所得的那些结果. $S(s,t)$ 为正定或负定的情形, 也就是说核只有正 (或只有负) 本征值的情形, 已经充分地研究过. 在这种曾为希尔伯特[1]和加贝[2]处理过的情形中, 我们称积分方程为*极性的*或*第三类的*. 像对称核的情形一样, 预解式只有一阶的实极点, 相应的留数给出"极性本征函数". 对这些本征函数而言, 类似于希尔伯特关于对称核的展开定理成立. 特别地, 若累次核 $K^{(2)}(s,t)$ 不恒等于零, 则至少存在一个本征值. 此外, 只要假定 $S(s,t)$ 为正, 则预解式只有一阶实极点的定理成立. 又当 $S(s,t)$ 为正而 $K^{(2)}(s,t)$ 不恒等于零时, 至少存在一个本征值的另一定理亦成立[3].

3.10.15 可对称化的核 [4]

预解式只有一阶实极点的核可以用下述简单的方式来表征: 一个核 $K(s,t)$ 若具有此性质, 则必存在一个核 $S(s,t)$ 使核 $\int S(s,\tau)K(\tau,t)d\tau$ 及 $\int K(s,\tau)S(\tau,t)d\tau$ 是对称的. 这样的核 $K(s,t)$ 叫做*可对称化的*. 反过来, 若对某一适当的正定对称核 $S(s,t)$ 而言, 至少有上述两个积分中的一个是对称核, 则 $K(s,t)$ 的预解式的极点为实的并为一阶的.

3.10.16 由函数方程决定预解核

可以证明 $K(s,t)$ 的预解式唯一决定于方程 (63).

---

1) D. Hilbert. Integralgleichungen. 第 15 章. 在这里极性积分方程具有略为不同的形式.

2) E. Garbe. Zur Theorie der Integralgleichung dritter Art. Math. Ann., Vol. 76, 1915, 527–547.

3) J. Marty. Sur une équation intégrale. C. R. Acad. sc. Paris, Vol. 150, 1910, 515–518. Développements suivant certaines solutions singulières. 同文, 603–606. Existence de solutions singulières pour certaines équations de Fredholm. 同文, 1031–1033.

4) J. Marty. Valeurs singulières d'une équation de Fredholm. Paris: C. R. Acad. sc, Vol. 150, 1910, 1499–1502.

3.10.17 正 (负) 定核的连续性

可以证明若正 (负) 定对称核 $K(s,t)$ 当 $0 \leqslant s,\ t \leqslant 1$ 时分段连续, 并在 $s=t$ 各点连续而且有连续的本征函数, 则它在区域 $0 \leqslant s,\ t \leqslant 1$ 内处处连续.

3.10.18 哈默斯坦定理

假定核 $K(s,t)$ 在基本区域 $0 \leqslant s,\ t \leqslant 1$ 上连续, 并在该区域内有一致有界的一级微商, 则双线公式不但对累次核 $K^{(2)}(s,t)$ 成立, 而且对核本身也成立. 微商有界的要求事实上可以用宽得多的条件来代替[1].

参 考 文 献

我们特别推荐数学科学百科全书第二卷中依 · 海林格尔和乌 · 特别列茨的一篇文章. 这篇文章中包含积分方程论的一个系统的叙述, 并详细讨论了该理论与分析中其他领域的关联. 此外还可以介绍一下赫 · 哈恩的总结性的文章: H. Hahn, Bericht über die Theorie der linearen Integralgleichungen, Jahresber. d. deutschen Mathematiker-Vereinigung, Vol. 20, 1911, pp. 69–117.

教本

Bôcher, M.: An introduction to the study of integral equations. Cambridge tracts, Vol. 10, Cambridge University Press, Cambridge 1909.

Goursat, E.: Cours d'analyse mathématique, Vol. 3, 3rd ed., Gauthier-Villars, Paris 1923, pp. 323–544.

Kneser, A.: Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik. 2nd ed., Vieweg, Braunschweig 1922.

Kowalewski, G.: Einführung in die Determinantentheorie, einschliesslich der unendlichen und der Fredholmschen Determinanten. De Gruyter, Leipzig, 1909.

Lalesco, T.: Introduction à la théorie des équations intégrales. Hermann, Paris, 1912. (Containing a detailed bibliography up to 1912.)

Vivanti, G.: Elementi della teoria delle equazioni integrali lineare. Mailand, 1916. (German edition F. Schwank, Hannover 1929.)

Volterra, V.: Leçons sur les équations intégrales et les équations intégrodifférentielles. Gauthier-Villars, Paris, 1913.

专刊及散篇论文

Carleman, T.: Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symmétrique. Uppsala Univ. Årsskrift 1923.

Courant, R.: Zur Theorie der linearen Integralgleichungen. Math. Ann., Vol. 89, 1923, pp. 161–178.

---

1) A. Hammerstein: Über die Entwicklung des Kernes linearer Integralgleichungen und Eigenfunktionen. Sitzungsber. Akad. Berlin (phys.-math. Kl.), 1923, pp. 181–184.

Fredholm, I.: Sur une classe d'équations fonctionnelles, Acta math., Vol. 27, 1903, pp. 365–390.

Goursat, E.: Recherches sur les équations intégrales linéaires. Ann. Fac. sc. Toulouse, Series 2, Vol. 10, 1908, pp. 5–98.

Hilbert, D.: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig and Berlin, 1912. (Reprint of six communications from the Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1904–1910.)

Holmgren, E.: Das Dirichletsche Prinzip und die Theorie der linearen Integralgleichungen. Math. Ann., Vol. 69, 1910, pp. 498–513.

Landsberg, G.: Theorie der Elementarteiler linearer Integralgleichungen. Math. Ann., Vol. 69, 1910, pp. 227–265.

Schmidt, E.: Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. Math. Ann., Vol. 63, 1907, pp. 433–476. Ibid., Vol. 64, 1907, pp. 161–174.

Schur, I.: Über die charakteristischen Wurzeln einer linearen Substitution mit einer Anwendung auf die Theorie der Integralgleichungen. Math. Ann., Vol. 66, 1909, pp. 488–510.

Weyl, H.: Singuläre Integralgleichungen mit besonderer Berücksichtigung des Fourierschen Integraltheorems. Dissertation, Göttingen, 1908.



第4章　变　分　法

数学物理的许多问题都和分析的一个中心部门即变分法有着关联. 在这一章中, 我们将讨论变分法的某些基本概念, 用它们来求得一些数学物理方程以及其解法.

4.1　变分法的问题

4.1.1　函数的极大和极小

变分法是由推广初等极大极小的理论而产生的. 为了更好地了解它, 我们先来研究熟知的初等理论. 在一给定的闭区域 G 内给了一个连续函数 $f(x,y,\cdots)$, 问题是要求 G 中的一点 $x_0,y_0,\cdots$, 在这一点上函数相对于 G 中邻近于 $x_0,y_0,\cdots$ 的各点而言具有极大或极小值 (极值). 这个问题永远有解, 因为按魏尔斯特拉斯定理: *凡在闭区域 G 内连续的函数皆具有最大及最小值, 或者在区域之内, 或者在区域的边界上达到.* 设函数 $f(x,y,\cdots)$ 在 G 可微而且设在某一内点 $x_0,y_0,\cdots$ 达到了极值, 则在 $x_0,y_0,\cdots$ 这一点上函数 $f(x,y,\cdots)$ 对每一变量的微商皆为零; 换句话说, f 的梯度为零. 可是这个必要条件完全不是充分的, 这可以从扭转点和鞍点的存在看出 (例如 $f(x)=x^3, x_0=0$; $f(x,y)=xy, x_0=y_0=0$). 一般说来, 使函数诸微商为零的点, 即使 $df=0$ 的点, 叫做*定常点*. 定常点如给出相对于某一邻域的极大或极小, 则称为 "极值点".

假如变数不是独立的, 而是受到了一些限制如 $g_1(x,y,\cdots)=0, g_2(x,y,\cdots)=0,\cdots,g_h(x,y,\cdots)=0$, 我们可用*拉格朗日乘子法*求出定常点或极值点的必要条件. 这个方法包括以下步骤: 为了要求出自变数的区域内一点而使 $f(x,y,\cdots)$ 有极值或者至少有定常值, 我们引进 $h+1$ 个新参数, 即乘子 $\lambda_0,\lambda_1\cdots,\lambda_h$, 并作函数 $F=\lambda_0 f+\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2+\cdots+\lambda_h g_h$. 现在我们由以下方程决定 $x_0,y_0,\cdots$ 等量, 以及比数 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_h$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0,\ \frac{\partial F}{\partial y}=0,\ \cdots,$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1}=g_1=0,\ \cdots,\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_h}=g_h=0, \tag{1}$$

这里方程的数目和未知量的数目相等. 这些方程乃是所要求的在给定限制下 $f(x,y,\cdots)$ 取定常值或极值的条件.

若 $\lambda_0 \neq 0$, 我们可以 (以后就这样做) 令 $\lambda_0 = 1$, 因为 F 对 λ_i 这些量而言是齐次的. 拉格朗日法不过是这样一种措施, 它保持着对称性而避免了利用附加条件从函数 $f(x, y, \cdots)$ 中明显消去 h 个变数.

现在我们来考虑几个初等却有启发性的例子.

(a) *在所有具有给定的底边和周长的三角形中, 等腰三角形有最大面积, 在所有具有给定的底边和面积的三角形中, 等腰三角形有最短的周长.* 这些事实可以不用计算而加以验证, 只要考虑以所给底边为焦点间联线的椭圆. 即使是这个简单的例子, 也表现了一种我们在后面 12.2 节还会遇到的可逆的特征.

(b) *光的折射和反射.* 按*费马最小时间原理*, 光线在两点间沿其真实路线进行时所需的时间比沿任一满足给定条件的假想的 ("虚") 路线所需的时间少. 从这一原理立刻可得在任一均匀介质中光行直线的事实. 假如光线必须遇见一给定的曲线 (镜子) 而又不穿过它, 则简单地分析一下光所需时间的微商就说明构成其路径的两个直线段, 必须在接触曲线的点上和该点的切线作成等角 (*反射定律*). 另一种情形, 假如所给的曲线是两个区域的边界, 在这两个区域内光速依次为 c_1 和 c_2, 而且光线由一个区域传入另一个区域, 那么它必须由两个线段组成, 这两个线段满足熟知的*折射定律* (*斯内尔定律*) $\sin\ \alpha_1/\sin\ \alpha_2 = c_1/c_2$, 其中 α_1 和 α_2 为边界曲线的法线和交点上两线段间的夹角.

(c) *斯泰纳的一个问题.* 给定形成一锐角三角形的三个点 A_1, A_2, A_3, 求第四点 P 使得距离的和 $PA_1 + PA_2 + PA_3$ 为最小. 考虑以 A_3 为圆心而过 P 点的圆, 则 P 点在圆上的位置必须能使 $PA_1 + PA_2$ 为最小. 按照反射定律, 这就意味着线 PA_1 和 PA_2 和半径 PA_3 作成等角. 若将下标 1, 2, 3 轮换, 则有同样的论据成立; 所以 $A_1PA_2, A_2PA_3, A_3PA_1$ 这三个角须相等且等于 $2\pi/3$. 问题因此得解.

(d) *多边形的等周问题.* 在所有本身不相交, 具有偶数 $2n$ 条边, 而且给定边长为 $2l$ 的诸多边形中, 求出面积最大的那一个. 所要求的多边形 $\sqcap(A_1, A_2, \cdots, A_{2n})$ 是 $2n$ 正多边形. 证明这一点时我们首先肯定 $\sqcap$ 为凸多边形. 若 $\sqcap$ 不凸, 则可作一条完全在 $\sqcap$ 外的直线, 它通过两个不相邻的顶点 A_k 和 A_l; 于是我们可以向这条线映射多边序列 $A_kA_{k+1}\cdots A_{l-1}A_l$ 而得到具有同样边长的一个多边形, 它的面积比起原多边形来增加了 $A_kA_{k+1}\cdots A_l$ 的两倍. 因此我们可以限于考虑凸多边形. 其次我们来证多边形所有边长皆相等. 因为若相邻的两边 A_1A_2 和 A_2A_3 边长不等, 则按照 (a) 的结果, 我们可用一 A_2' 来代替 A_2, 使 $A_1A_2' + A_2'A_3 = A_1A_2 + A_2A_3$, 且三角形 $A_1A_2'A_3$ 的面积大于 $A_1A_2A_3$ 的面积. 因此以 A_2' 为顶点的多边形的面积较以 A_2 为顶点的为大, 这和 $\sqcap$ 具有最大面积的假定相矛盾. 最后, 为了要证明多边形 $\sqcap$ 可以内接在一圆内, 我们用联接相对顶点 A_1 和 A_{n+1} 的对角线把 $\sqcap$ 分为两个多边形. 这两个多边形 $\sqcap_1$ 和 $\sqcap_2$ 的周长显然是相等的; 它们的面积也须相等, 因为若 $\sqcap_1$ 的面积比 $\sqcap_2$ 的为大, 我们可以用 $\sqcap_1$ 对对角线的映像来代替 $\sqcap_2$ 而得到

一个新的多边形 $\sqcap^*$, 它的周长依然为 $2l$ 而面积却为 $\sqcap_1$ 的两倍, 因此它比 $\sqcap$ 的面积为大. 现在我们来证明, 对每一个顶点 A_k 而言, 角 $A_1A_hA_{n+1}$ 必为直角. 因为若对 $\sqcap_1$ 的 A_h 顶点而言这个角不是直角, 我们就可以把 $\sqcap_1$ 分解为三角形 $A_1A_hA_{n+1}$ 以及两个多边形 H_1 和 H_2, 它们和三角形在 A_1A_h 和 A_hA_{n+1} 两边相接. 考虑直角三角形 $A_1'A_hA_{n+1}'$, 它的两边 $A_1'A_h$ 和 A_hA_{n+1}' 依次等于 A_1A_h 和 A_hA_{n+1}. 这个三角形的面积较 $A_1A_hA_{n+1}$ 的为大. 假如我们把多边形 H_1 和 H_2 接在这个新三角形的两边上并把所得的多边形对线 $A_1'A_{n+1}'$ 映射, 就得到周长为 $2l$ 而面积较 $\sqcap$ 的为大的多边形, 这和假定矛盾. 所以 $A_1A_hA_{n+1}$ 为一直角, 而所有的顶点皆在一圆周上. 这就完全证明了正多边形的极大性质[1].

以上的处理是以斯泰纳的一个经典的概念为基础的, 它表明在个别的情形, 通过直接的几何途径比一般的分析方法更容易得出所要的结果.

(e) **其他的例, 极小中的极大.** 我们已经遇见过其他典型的定常值的例子, 它们既非极大也非极小, 而是极小中的极大或者极大中的极小. 例如, 我们曾定义二次型的本征值为极小中的极大. 利用类似的性质我们定义了切比雪夫多项式.

4.1.2 泛函

变分法也是起源于求极值或定常值的问题. 不过它的目标是求*泛函*的极值而不是求有限个自变数的函数的极值. 所谓 "泛函", 是指一个量或一个因变数, 它的值依赖于一个或多个函数 (以整个函数为变量), 而不是依赖于若干个离散的变数. 换句话说, 泛函的定义域是可取*函数*组成的一个集合或 "*空间*", 而不是坐标空间的一个区域. 作为简单的例子可考虑 $x = x_0$ 和 $x = x_1$ 二值之间曲线 $y = y(x)$ 的弧长 L. 这个弧长可由以下积分给出:

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}dx;$$

因此 L 的值依赖于整个 "*变量函数*" $y(x)$, 我们可以取这个变量函数为任意具有分段连续微商的连续函数. 这样的泛函在数学分析及其应用中到处可以遇见, 数学分析中的许多重要问题是和这一类的泛函关系联系着的.

另一个例子是位于 xy 平面的区域 G 上一曲面 $z = z(x, y)$ 的面积. 它可由积分

$$\iint_G \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}dxdy^{2)}$$

给出, 是变量函数 $z(x, y)$ 的泛函.

---

1) 注意极大的*存在*可由魏尔斯特拉斯定理得出. 因为若设一个顶点在原点, 则其他的在一有限闭区域之内 (由于要求周长一定), 面积为顶点位置的连续函数.

2)在本书的全部叙述中, 将用下标表示偏微商, 即

$$f_x = \partial f(x, y, \cdots)/\partial x; f_{xy} = \partial^2 f/\partial x\partial y \text{ 等等.}$$

在前一章中我们还遇见过其他泛函的例子. 例如当 $K(x,y)$ 一定时, 函数

$$g(x)=\int K(x,y)h(y)dy$$

为 $h(y)$ 之泛函而依赖于一参数 x [1], 积分型

$$\iint K(x,y)\varphi(x)\varphi(y)dxdy$$

则为 $\varphi(x)$ 之泛函. 在本章中我们主要将处理一类泛函, 它们是包含变量函数、其微商以及自变数的一个已知函数的积分, 例如一曲线的弧长就是如此.

有限多个变数的函数须有定义域; 在泛函的情形我们就需确定*可取函数的区域*或 "空间", 而从其中来取出我们的变量函数. 例如, 这个空间可以是具有分段连续一阶微商的所有连续函数的集合 (试参照下一节).

虽然泛函不能表为有限多个变数的函数, 我们可以把它看作*一无穷多个变数的函数*. 假定变量函数可以展成幂级数或傅里叶级数, 则泛函依赖于展开系数, 这些系数就组成无穷多个变数. 自然必须限定这些变数的区域而使符合于加于变量函数的条件.

4.1.3　变分法的典型问题

变分法所牵涉到的是确定泛函的极大或极小值, 一般说来即定常值 [2] 的问题; 就是要在可取函数的区域中求出这样一个变量函数, 在这函数上泛函取所要求的定常值或极值, 然后就可以定出这个极值. 微积分中通常的极值问题一般并不牵涉到绝对的极大极小, 而只是对极值点邻近的诸函数值而言的*相对的极大极小*; 和这一事实类似, 我们在这里所求的, 将也只是对极值 [3] 变量函数某一邻域内的变量函数而言泛函的相对极值. 为此目的, 我们必须定义某一*函数* $f(x,y\cdots)$ *的邻域* 的概念. 设 h 为正数, 我们说函数 $f_1(x,y,\cdots)$ 在函数 $f(x,y,\cdots)$ 的 (h) 邻域之内, 假如在函数的定义域内恒有 $|f-f_1|<h$ [4].

现在我们已经有条件来表述*变分法的基本问题*了, 这就是要在某一给定的可取函数的区域中求出所给泛函的一个 (或几个) 变量函数, 在这函数上泛函取相对的极值, 所谓相对是和区域内而且又在极值函数的充分小的 (h) 邻域内的其他变量函数来作比较. 假如极值问题中的泛函除变量函数外还明显依赖于可变参数 $x,y,\cdots$,

---

1) 我们经常用 "函数的函数" 或 "函数变换" 来表示一个本身依赖于一些参数的泛函.

2) 在 3.1 节中我们将给 "泛函的定常值" 一语以精确的定义.

3) 所谓极值变量函数即是使所给泛函取定常值的函数.

4) 在有些问题中宜于逐步使邻域的概念精确化. 我们说函数 $f_1(x,y,\cdots)$ 是在 $f(x,y,\cdots)$ 的一级 (h) 邻域内, 假如在 $|f-f_1|<h$ 之外还满足关系 $|f_x-f_{1x}|<h, |f_y-f_{1y}|<h,\cdots$. 一般说来, 我们可以谈 $n+1$ 级的邻域, 只要以上不等式对 f_1 以及其 n 和 n 级以下的微商而言皆成立.

也就是说泛函不是一个数值而是这些参数的函数, 那么我们求极值时除定出变量函数外, 就还必须定出这些参数. 现在我们用一些简单的例子来说明变分法的问题.

(a) **短程线**. 在一给定的曲面上, 求出两点之间最短的曲线. 假定用直角坐标 x, y, z 中的参数方程来表示这张曲面: $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$, 又假定我们采用通常惯用的符号 $e = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, f = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, g = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$, 那么曲面上由方程 $v = v(u)$ 确定的曲线在 u_0 和 u_1 之间的弧长 L 可由以下积分给出:

$$L = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{e + 2fv' + gv'^2} du.$$

因此问题就在于求出函数 $v(u)$, 它使积分取极值.

(b) **光线; 最速落径**. 按照费马原理, 在二维不均匀介质内光线走的路径是以下变分问题的解:

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{c(x, y)} dx = \text{极小},$$

其中 $c(x, y)$ 是在介质中的光速.

在这一问题中, 和在上一个问题一样, 所有联接路径给定的端点而具有分段连续微商的连续曲线都是可取的. 和光线问题有着紧密联系的, 乃是最速落径的问题, 就是通过这个问题雅各布 · 伯努利在 1696 年开始推动了变分法的发展. 问题是这样: 在两点 $A(x_0, 0)$ 和 $B(x_1, y_1)$(其中 $y_1 > 0$) 之间要联一条曲线, 使得在 y 方向重力的作用下一不受摩擦的质点沿这条曲线由 A 走到 B 需要的时间最少. 质点的初速为零. 按照初等力学, 在落下一段距离 y 后质点的速度为 $\sqrt{2gy}$, 其中 g 为重力加速度. 于是所费时间可表为积分

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} dx. \tag{2}$$

可取函数的集合包含所有具有连续二级微商而满足条件 $y(x_0) = 0, y(x_1) = y_1$ 的正函数.

(c) **最小旋转面**. 假定曲线 $y = y(x) \geqslant 0$ 绕 x 轴旋转. 介于平面 $x = x_0$ 和 $x = x_1$ 之间所得的曲面有面积 $F = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + y'^2} dx$. 因此使有最小旋转面积的曲线 $y = y(x)$ 确定于变分问题

$$\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + y'^2} dx = \min.$$

(d) **等周问题**. 这个问题最初的表述是: 求一周长给定而所围面积为最大的闭曲线. 设该曲线是凸的, 并为 x 轴分为面积相等的两部分 (见 4.1.1 小节 (d)), 我们

就到达以下问题：适当地选择 ξ 和 $y(x)$ 使积分

$$\int_0^{\xi} y(x)dx$$

为极大, 而同时积分

$$\int_0^{\xi} \sqrt{1+y'^2}dx = l$$

取一给定的值. 这里 $y(x)$ 可以是任意在区间 $0 \leqslant x \leqslant \xi$ 上满足条件 $y(0) = y(\xi) = 0$ 的具有分段连续一级微商的连续函数.

我们也可以给出一个类似的问题而使其上限 ξ 为固定的.

这个问题, 即所谓特殊等周问题, 可以化为一较简单的变分问题, 为此只要引进弧长 $s = \int_0^x \sqrt{1+y'^2}dx$ 为独立变数, s 的变化范围为区间 $0 \leqslant s \leqslant l$. 因为 $ds^2 = dx^2 + dy^2$, 现在问题就变成：求函数 $y(s)$ 使积分

$$\int_0^{l} y\sqrt{1-(dy/ds)^2}ds$$

为极大, 其中 $y(s)$ 为 s 的具有分段连续微商的连续函数. 在定出 $y(s)$ 后, 我们可求

$$x(s) = \int_0^{s} \sqrt{1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}ds, \tag{3}$$

这样就得到所求曲线的参数表式 (又可参照第 2 章 2.10.1 小节中等周问题的赫尔维茨解).

一般说来, 凡使一积分式取极值而同时另一积分式取一给定值的问题都叫做**等周问题**. **悬链问题** 就提供了一个这样的例子：这时我们要求一条两端固定具有定长的均匀柔绳在重力作用下的形位. 因为平衡位置要求重心尽可能地低, 我们就达到以下的变分问题：求一函数 $y(x)$ 使积分

$$\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}dx$$

尽可能地小而使积分

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}dx$$

取给定的值, 同时还给定边值 $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$.

另一问题是求解

$$\int_{x_0}^{x_1} (y'')^2 dx = \min.$$

PDG

附加条件为

$$\int_{x_0}^{x_1} y^2 dx = 1,$$

其中函数 $y(x)$ 在区间的两端点为零, 而函数本身及其直到二阶的微商到处连续. 另一极其重要的等周问题是: 求 x 和 y 的函数 u, u 和它的一阶微商在区域 G 连续且满足条件 $\iint_G u^2 dxdy = 1$, 要这个函数使积分

$$\iint_G (u_x^2 + u_y^2) dxdy + \int_\Gamma \sigma u^2 ds \tag{4}$$

为最小[1)](这里 Γ 为区域 G 的边界, σ 为 Γ 的弧长 s 的一个确定函数).

第 3 章中关于对称核的本征函数的极小问题是等周问题的另一例子.

不言自明的是在所有这些问题中, 可取变量函数的空间必须由连续性条件确定, 这样才能使所有问题中的泛函有意义.

4.1.4 变分法特有的困难

在通常极大极小的理论中, 解的存在由魏尔斯特拉斯基本定理给以保证. 相反地, 变分法的特有困难是问题可以有意义地提出却可以没有解答 —— 因为一般说来不可能把可取函数的区域选择为一 "紧致集", 使在这集合内聚点原理成立. 以下是一个简单的几何的例子: 要在 x 轴上的两点间连一最短的具有连续曲率的线, 它在两端点和 x 轴垂直. 这个问题就没有解. 因为, 这样一条线的长度总比联接两端点的直线为大, 可是这长度又可以和直线的长度任意接近. 因此可取曲线之长度有一下确界却没有最小值.

另一不可解的变分问题的例是这样: 令 $y(x)$ 为连续函数, 有分段连续的微商, 且满足 $y(-1) = -1, y(1) = 1$, 而要求 $y(x)$ 使积分

$$\int_{-1}^{1} x^4 y'^2 dx \tag{5}$$

为最小. 很容易看出, 可以选适当的函数使这个积分为任意小 (例如当 $x < -\varepsilon$ 时 $y = -1, |x| \leqslant \varepsilon$ 时 $y = x/\varepsilon, x > \varepsilon$ 时 $y = 1$), 可是对任一可取函数而言它总不是零.

因此, *在变分法的某些问题中不能事先认为极值一定存在*. 每一问题或每一类问题的解都需有其特殊的存在证明. 以后我们将看到, 就是这一事实给变分法中的许多问题带来了根本的困难. 不过在这一章中我们主要将表述达到极值的*必要条件*, 至于在满足这些条件后是否的确达得到极值的问题可以暂时保留.

在表述这些必要条件之前, 我们将考虑直接解变分问题时可能用的方法.

---

1) 见 4.3.2 小节.

4.2 直 接 解[1)]

变分问题的直接和全部的解有时可以用包含两个步骤的一般方法得到：首先我们立出一适当的和原问题近似的一般的极值问题，在这问题中只有有限的 n 个变数要决定，然后我们再在近似问题的解中令 $n \to \infty$ 而取其极限.

4.2.1 等周问题

4.1.3(d) 的等周问题提供了一个例子：要求以 $2l$ 为周长而具有最大面积的闭曲线 K; 这条曲线要是分段平滑的，也就是说，除了有限个棱角外，它要有连续的切线. 我们如果假定有一条曲线 K 是问题的解，我们就可以推断 K 是一个圆. 因为完全和 4.1.1(d) 同样，我们可以证明 K 是凸的而且每一条分 K 为周长相等的两部分的割线 AB 也必定分面积为相等的两部分; 此外对 K 上的每一点 P 而言，角 APB 一定是直角，因为否则按 4.1.1(d) 的做法，我们可以得到一条曲线 K'，它有和 K 同样的周长却有较大的面积. 但是这些论断都是以暗中假定问题的确具有一个解答为基础的，而这个假定却需要证明; 所以我们将用另一种方法来解这个问题，它同时给出了所必需的存在证明. 我们考虑各可取曲线的面积值所成的集合. 因为这些数都在上界 $l^2\pi$ 之下 (这曲线自然可以放在以 l 为半径的圆内)，因此按分析中的初等原则，它们的集合有一上确界 M，集合中没有大于 M 的数，可是对任意小的 ε 而言 M 的任一 (ε) 邻域内都含有集合中的数. 换句话说，存在一可取曲线 $K_1, K_2, \cdots$ 的"极大化序列"使得 K_n 的面积 F_n 当 n 增大时收敛于 M. 现在我们可以按任意准确度用一内接多边形 $\sqcap_n$ 来近似曲线 K_n, $\sqcap_n$ 的边数充分大使得其面积和边长和 K_n 的相差为任意小. 不破坏其近似的性质，我们可以拉伸多边形而使其周长确为 $2l$. 这样，极大化序列 $K_1, K_2, \cdots$ 就可以用一多边形的极大化序列 $\sqcap_1', \sqcap_2', \cdots$ 来代替. 我们可以假定这些多边形的边数是偶数，因为凡 $(2m-1)$ 边形皆可看作有相邻两边接成一直线段的 $2m$ 边形. 由 4.1.1(d) 我们知道所有以 $2l$ 为边长的 $2m$ 边形中正 $2m$ 边形有最大的面积. 所以把每一多边形 $\sqcap_n'$ 用其相应的正多边形来代替就得到我们问题的更好的极大化序列. 可是当边数增加时，这些多边形收敛于以 $2l$ 为周长的圆，又因为多边形的面积收敛于 M，所以圆的面积就是 M，因此它的确是我们的变分问题的解.

4.2.2 瑞利–里茨方法、极小化序列

以上的讨论是以下述的一般概念为基础的：我们考虑任一形如 $D[\varphi] = \min.$ 的变分问题，其中泛函 $D[\varphi]$ 是包含函数 φ 及其直到 K 级微商的一个已知式的积分，

1) 变分的直接解法将在第二卷中较全面地加以处理.

而且这里的积分区域和可取函数 φ 的区域都是给定的. 至于 $D[\varphi]$ 是一重或多重积分则没有关系. 我们假定对可取变量函数 φ 而言 $D[\varphi]$ 的值所作成的集合具有一下确界 d(至于 d 是否是一个当函数 $\varphi = u$ 时 $D[\varphi]$ 确能达到的极小, 则尚成问题). 这样就存在一串可取函数 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} D[\varphi_n] = d$, 而且对每一可取函数 φ 而言关系 $D[\varphi] \geqslant d$ 成立. 这样的一个函数序列就叫做变分问题的*极小化序列*. *变分问题的直接解法总是在于造出极小化序列而企图以这序列为基础通过极限过程来获得问题的解*.

韦 · 里茨[1)]很成功地运用了的方法 (尤其是在数学解上) 包含以下步骤: 我们先做出确定而完备的一组 "坐标" 函数 $w_1, w_2, \cdots$, 这组函数定义在积分区域中, 而且有这样的性质[2)], 即所有有限个这种函数的线性组合 $\varphi_n = c_1w_1 + c_2w_2 + \cdots + c_nw_n$ 皆为问题的可取比较函数, 而且对任一可取函数 φ 而言, 存在一适当的这种线性组合 φ_n 使得 $D[\varphi]$ 和 $D[\varphi_n]$ 相差为任意小. 这样就存在极小化序列 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$, 其中的每个 φ_n 皆为函数 $w_1, w_2, \cdots, w_n$ 的线性组合 $c_1w_1 + c_2w_2 + \cdots + c_nw_n$. 因此我们如果对每一 n 都定出一个函数 φ_n, 也就是定参数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$, 而要求 $D[\varphi_n] = d_n$ 为极小, 那么我们就得到一个更好的极小化序列. 这个要求乃是 $D[\varphi_n]$ 的一通常的极小问题, $D[\varphi_n]$ 为 n 个参数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的函数, 因此按照魏尔斯特拉斯定理总是有解答的 (需在 $D[\varphi_n]$ 为 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的连续可微函数的条件下; 我们这里假定这个条件是满足的). c_i 的值决定于 n 元的线性方程组 $\dfrac{\partial D[\varphi_n]}{\partial c_i} = 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$. 这时我们可以期望所得的极小化序列收敛于所要求的解. 不幸的是问题并不如此简单, 在 4.2.4 小节中我们将看到这一点. 一般说来我们只能说这样得到的 $D[\varphi_n] = d_n$ 的值收敛于所要求的下确界或极值. 至于极小化序列本身是否收敛于所求解答的问题乃是在理论上很困难的问题, 这需要另作讨论. 在下面有几处我们还要回到这一问题.

上述方法在有些情形虽然没有证明收敛性, 但在数学计算上还是有用的. 在任一个别问题它的成效有赖于*坐标函数* w_i 的适当选择. 在下一小节中我们将用实例来说明这个方法.

4.2.3 其他直接方法、有限差法、无穷多个变数法

在许多情形下, 我们可以扩充可取函数的区域而得到极小化序列, 例如不仅取连续可微函数, 而且还取具有分段连续微商的连续函数. 我们现在来考虑形如 $D[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$ 的单积分的极小问题. 设 $y = \varphi_1(x), y = \varphi_2(x), \cdots$ 为一

1)韦 · 里茨. Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. Journ. f. d. reine u. angew, Math., Vol. 135, 1909, 1-61; 全集. Paris: Gauthier-Villars, 1911, 192–250. 在里茨以前, 瑞利曾成功地运用过类似的概念.

2) 这种函数组的存在性问题将在第二卷中较为全面地加以讨论.

极小化序列, 又设 $F(x,y,y')$ 满足必须的连续性条件, 于是由 $y=\varphi_n(x)$ 所给的曲线自然可以用多边曲线 $y=p_n(x)$ 来近似而使积分 $D[\varphi_n]$ 和 $D[p_n]$ 相差为任意小. 所以我们有可能造出包含分段线性函数的极小化序列, 对这些函数说来在每一子区间内差商和微商相同. 因此我们若用 m 个点把积分区间分为具有等长 Δx 的若干部分, 而且只限于考虑在每一子区间内皆为线性的函数, 则变分问题化为以下通常的极小问题, 或者可以用这个问题近似地来代替, 即

$$\sum_{i=0}^{m} F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_1}{\Delta x}\right)\Delta x = \min.$$

这里要求的是在子区间端点函数的值 $y_0, y_1, \cdots, y_{m+1}$. 这样当 $m=0,1,2\cdots$ 时得到的函数依然形成一最小化序列[1].

我们可以把这个方法看作里茨方法的特殊情形, 只要适当地取分段线性函数为坐标函数.

至于在何种情形下有限差问题的解收敛于极小问题的解, 我们将在第 II 卷中加以讨论.

当被积函数中包含高阶微商, 例如二阶微商时, 我们可以按类似的方法来作. 于是在近似问题中二阶微商将由二阶差商 $(y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i)/(\Delta x_i)^2$ 来代替.

我们的变分问题又可以看作无穷多个变数的函数论中的问题. 例如, 在赫尔维茨的等周问题解 (第 2 章) 中, 涉及的变数为傅里叶系数, 而 $L^2-4\pi F$ 的分析式给出了问题的解. 也可以像这样来解释里茨方法, 只要我们假定函数能展为傅里叶级数 $c_1\omega_1+c_2\omega_2+\cdots$ 而把该方法看作求出无穷多个系数 $c_1, c_2, \cdots$ 的法则. 困难的收敛问题需另作探讨.

现在我们来用一些例子说明这些一般的讨论.

(a) 下列积分

$$D[\varphi]=\iint_R(\varphi_x^2+\varphi_y^2)dxdy \tag{6}$$

积过矩形 $0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant b$, 我们要求其极小; 在这里可取比较函数皆在 R 内分段平滑[2], 在其边界上为零, 并满足附加条件

$$H[\varphi]=\iint_R\varphi^2dxdy=1. \tag{7}$$

我们假定函数 φ 可展为傅里叶级数 $\varphi=\sum\limits_{m,n=1}^{\infty}c_{mn}\sin(m\pi x/a)\sin(n\pi y/b)$; 按照第 2 章这是一定可能的. 问题就是要从极小的要求定出无穷多个参数 c_{mn}. 因为

1) 这里所叙述的方法实质上就是欧拉在其著作: "Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes" (M.Bousquet, Lausanne and Geneva, 1744) 中用来得到 "欧拉微分方程" 的方法.

2) 见第 2 章中之定义.

函数 φ_x 和 φ_y 是分段连续的, 我们可以对这些展开系数为 $(\pi m/a)c_{mn}, (\pi n/b)c_{mn}$ 的函数应用三角函数组的完备性关系, 于是得到积分 D 和 H 包含参数 c_{mn} 的表示式:

$$D = \pi^2 \frac{ab}{4} \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right); \quad H = \frac{ab}{4} \sum_{m,n}^{\infty} c_{mn}^2. \tag{8}$$

因为条件 $H = 1$, 问题的解显然为除 c_{11} 外各系数 $c_{mn} = 0$, 而 c_{11} 必须等于 $2/\sqrt{ab}$. 因此我们的变分问题的解为函数

$$u = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

而极小值为

$$d = \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right).$$

这一事实又可以表为对每一在矩形边上为零的分段连续函数有关系

$$D[\varphi] \geqslant \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) H[\varphi], \tag{9}$$

因为对规一化了的函数 $\psi = \varphi/\sqrt{H[\varphi]}$ 而言这个关系就相当于 $D[\psi] \geqslant d$.

(b) 圆的狄利克雷问题[1]. 试求积过 x, y 平面上的圆 $K(x^2 + y^2 \leqslant 1)$ 的积分

$$D[\varphi] = \iint_K (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dxdy$$

的极小, 假定可取比较函数 φ 在 K 内为平滑而且在 K 的边界上取给定的值. 我们在 K 上引进极坐标 r, θ, 而化积分为

$$D[\varphi] = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\varphi_r^2 + \frac{1}{r^2} \varphi_\theta^2 \right) rdrd\theta.$$

这时可以确定边值为一傅里叶级数 $f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$. 此外并假定这个边值函数 f 有平滑的微商; 按第 2 章 2.5.3 小节, 这就意味着 $n^2|a_n|$ 和 $n^2|b_n|$ 皆有界. 现在我们可以假定函数 φ 表为以下形式:

$$\varphi = \frac{1}{2} f_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [f_n(r) \cos n\theta + g_n(r) \sin n\theta],$$

其中 $f_n(r), g_n(r)$ 必须满足关系式 $f_n(1) = a_n, g_n(1) = b_n$. 因为三角函数组的完备性关系, 我们就得到方程

$$D[\varphi] = \pi \int_0^1 [f_0'(r)]^2 rdr + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left[f_n'^2(r) + \frac{n^2}{r^2} f_n^2(r) \right] rdr$$

1) 虽然和历史事实不符, 但这一名称从黎曼的时代起就为人们所惯用.

$$+\pi\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\left[g_n'^2(r)+\frac{n^2}{r^2}g_n^2(r)\right]rdr.$$

因此为了要解决原先的极小问题, 我们处理以下一串的极小问题:

$$\int_0^1\left(f_n'^2+\frac{n^2}{r^2}f_n^2\right)rdr=\min\int_0^1\left(g_n'^2+\frac{n^2}{r^2}g_n^2\right)rdr=\min.$$

$$(n=0,1,2,\cdots),$$

其中 f_n 和 g_n 为平滑函数, 而当 $r=1$ 时依次取值为 a_n 和 b_n.

由于魏尔斯特拉斯逼近定理, 函数 $1,r,r^2,\cdots$ 一定满足这些极小问题的里茨解中坐标函数所需满足的条件. 让我们取 f_n(或 g_n) 为多项式 $c_{n,0}+c_{n,1}r+\cdots+c_{n,m}r^m$, 其中 $m\geqslant n$ 而 $c_{n,0}+c_{n,1}+\cdots+c_{c,m}=a_n$(或$b_n$). 读者很容易验证问题的解不依赖于 m 而是 $f_n=a_nr^n$(或者 $g_n=b_nr^n$). 因此所得极小化序列中的各个函数皆相等, 所以它们就等于变分问题的解.

变分问题的解 f_n 或 g_n 又可以不用里茨方法而按下法直接求得: 当 $n=0$ 时, 我们需使 $\int_0^1 f_0'^2rdr$ 为极小; 显然若 $f_0=$ 常数 $=a_0, f_0'=0$ 便使积分取极小值.当 $n>0$ 时, 我们必须有 $f_n(0)=g_n(0)=0$; 否则因为 f_n 可微, 因此可以写成 $f_n(0)+rh_n(r)$, 其中 $h_n(r)$ 为连续函数, 这样积分中的第二部分将为无穷. 现在我们把第一个积分写为

$$\int_0^1\left(f_n'-\frac{n}{r}f_n\right)^2rdr+2n\int_0^1 f_nf_n'dr=\int_0^1\left(f_n'-\frac{n}{r}f_n\right)^2rdr+nf_n^2(1).$$

$f_n(1)=a_n$ 这一值是固定的, 因此我们立刻可以看出只要令 $f_n'-nf_n/r=0$ 就得到极小值 $nf_n^2(1)=na_n^2$, 这样得到 $f_n=c_nr^n$; 因为 $f_n(1)=a_n$, 我们就有 $c_n=a_n$ 或者 $f_n=a_nr^n$. 对 $g_n(r)$ 可得相应的结果. 因此原先的极小问题的解为

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}r^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta),\tag{10}$$

而极小值为

$$\pi\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n^2+b_n^2).$$

在此应该强调的是, 假如对于边界值函数作较弱的假定, 例如只要求连续性, 那么上面所解的极小问题就可以不再有意义. 例如, 若取由一致收敛的级数 $\rho(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos(n!\theta)$ 所定义的连续边界函数, 则和数 $\pi\sum_{m=1}^{\infty}ma_m^2=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}(n!)$ 为无穷. 在这种情形很容易证明不存在使 $D[\varphi]$ 为有限的可取比较函数.

(c) 令 $g(x,y)$ 为由 $0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b$ 所定义的矩形 R 上的平滑函数. 我们要求一函数 φ, 它在这矩形内连续并有连续的一级微商, 在边界上为零, 而使积分

$$J[\varphi] = \iint_R (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 - 2\varphi g) dxdy \tag{11}$$

为极小. 在 R 之内, 我们写

$$g(x,y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} \sin m\frac{\pi x}{a} \sin n\frac{\pi y}{b}$$

以及

$$\varphi = \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn} \sin m\frac{\pi x}{a} \sin n\frac{\pi y}{b},$$

其中参数 c_{mn} 是所要决定的. 由于三角函数的完备性关系, 这个变分问题就化为决定数量 c_{mn} 而使

$$\frac{4}{ab} J[\varphi] = \pi^2 \sum_{m,n=1}^{\infty} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) c_{mn}^2 - 2 \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} c_{mn}$$

为最小的问题. 我们立刻可以看出

$$c_{mn} = \frac{a_{mn}}{\pi^2 (m^2/a^2 + n^2/b^2)},$$

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{m^2/a^2 + n^2/b^2} \sin m\frac{\pi x}{a} \sin n\frac{\pi y}{b} \tag{12}$$

给出了极小问题的解. 这个函数的确满足所有的要求, 因为这个级数以及逐项微商后所得的级数都一致收敛. 为了要看出这一点, 只需注意绝对收敛的级数

$$\sum \frac{|a_{mn}|}{m^2/a^2 + n^2/b^2}, \sum \frac{m|a_{mn}|}{m^2/a^2 + n^2/b^2}, \sum \frac{n|a_{mn}|}{m^2/a^2 + n^2/b^2}$$

表示了长函数. 往后我们将会看到 (157 页) 函数 u 满足微分方程 $u_{xx} + u_{yy} = g(x,y)$; 试将此例和例 (a) 及 (b) 比较.

4.2.4 关于变分直接方法的一般讨论

我们已经谈到在肯定变分的直接方法有效时一个主要的困难是: 即使解的存在不成问题, 极小化序列却不一定收敛于一极限函数.

极小曲面的变分问题给出了一个简单的例子, 在这问题中我们要求积分

$$\iint_G \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy$$

的极小; 我们以所有通过一给定空间曲线而具有分段连续微商的曲面 $z = z(x,y)$ 为可取曲面, 此处空间曲线的投影即为 G 之边界. 假如特别地我们取这曲线在 x,y–平面内, 例如取之为具有单位面积的圆, 则函数 $z = 0$ 给出了极小, 也就是说 x,y–平面本身给出了极小. 凡通过上述圆周而面积收敛于 1 的任何一串曲面都是一个极小化序列. 现在我们立刻可以造出一些可取的比较曲面, 它们的面积和 1 任意接近, 可是在有些孤立点上表示它们的函数 $z(x,y)$ 却为任意大. 例如, 考虑一高为 1 底半径为 ε 而垂直地放在平面 $z = 0$ 上的圆锥, 我们就取由这个锥以及上述圆在锥底之外的部分所作成的曲面为比较曲面. 当 $\varepsilon \to 0$ 时, 这些曲面作成的极小化序列并不收敛于问题的解. 很容易看出, 甚至于有可能造出一极小化序列, 它的发散点在圆内到处稠密.

另外一个例子是狄利克雷问题, 要求的是积分 $D[\varphi] = \iint_G (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)dxdy$ 的极小, 我们取所有在 G 内连续并分段平滑而在边界上为零的函数为比较函数. 显然问题唯一的解是 $\varphi = 0$, 因为其他的可取函数使积分有正值. 以 G 的任一点 P为极点引进极坐标 r,θ, 我们可以把积分写为 $\iint_G (\varphi_r^2 + \varphi_\theta^2/r^2)rdrd\theta$. 我们考虑以 P 为心的一个圆 $r \leqslant a$, 它整个在 G 之内, 而且半径 $a < 1$. 现在我们令在这圆外 $\varphi = 0$, 在 $r = a$ 及 $r = a^2$ 间的圆环上 $\varphi = \log(r/a)/\log a$, 而在圆 $r \leqslant a^2$ 内 $\varphi = \log a/\log a = 1$. 按定义, φ 为一可取比较函数; 而相应的积分值等于

$$\frac{2\pi}{(\log a)^2}\int_{a^2}^{a}\frac{1}{r^2}rdr = -\frac{2\pi}{\log a}.$$

现在我们令 a 取一串趋于零的值 $a_1, a_2, \cdots$ 而考虑相应的函数 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$, 我们就看出有 $D[\varphi_n]$ 收敛于零; 因此这些函数作成变分问题的一个极小化序列. 可是在 P 点所有的函数取值为 1, 所以这序列不收敛于问题的解 $\varphi = 0$.

在变分问题 $\int_0^1 y'^2 dx = \min.$ 的情形中, 若取 $y(x)$ 为 x 的连续并分段平滑的函数, 且在两端点处 $y(x)$ 为零, 则很容易看出所有的极小化序列的确必须收敛于函数 $y = 0$. 可是极小化序列中各函数的微商并不一定收敛于零, 例如当 $x < \varepsilon_n, y_n = x$, 当 $\varepsilon_n \leqslant x \leqslant 2\varepsilon_n, y_n = 2\varepsilon_n - x$, 当 $x > 2\varepsilon_n, y_n = 0 (\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0)$, 这个序列就说明了这一事实.

在第 II 卷中我们将看到如何来克服这些困难; 事实上, 变分的直接方法引起了分析的好些重大进展.

以下几节中我们讨论经典的 “间接” 方法, 这个方法的基础是化变分问题为微分方程. 从欧拉和拉格朗日起, 数学家们就一直偏重于用这类方法, 它通过一个一般的变分法则来解决极小问题, 这种法则本身已成为分析的重要工具.

4.3 欧拉方程

由欧拉首先导出的一变分问题的微分方程是一个函数在使某一给定积分取极值时所必须满足的必要条件, 但是它却不永远是充分条件. 我们把变分问题返化为一微分的问题时便得出这些欧拉方程. 除非另作声明, 我们永远假定所有问题中出现的函数及其微商都是连续的.

4.3.1 变分法中 "最简单的问题"

首先让我们考虑最简单的变分问题, 即求积分

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx \tag{13}$$

的极小问题, 其中 $x_0, x_1, y(x_0), y(x_1)$ 之值为给定. 函数 F 对三个变量 x, y, y' 皆二次连续可微. 函数 y 的二阶微商 y'' 也假定是连续的. 设 $y = y(x) = f(x)$ 为所求的给出极小的极值函数, 也就是说, 设在函数 $f(x)$ 的一个充分小的邻域 (h) 内当 $y = f(x)$ 时积分 $J[y]$ 为最小. 现在考虑定义在区间 $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ 上的函数 $\eta(x)$, 它在这区间内具有连续的二阶微商, 在两端点为零, 此外则完全为任意的. 我们造函数 $\bar{y} = y + \varepsilon\eta(x) = y + \delta y$, 其中 ε 为一参数. $\delta y = \varepsilon\eta(x)$ 这个量叫做函数 $y = f(x)$ 的变分. 若参数 ε 具有充分小的绝对值, 则所有的变动函数 $\bar{y}$ 皆在极值函数 $y = f(x)$ 的一个任意小的邻域内. 积分 $J[\bar{y}] = J[y + \varepsilon\eta]$ 可看作是一个 ε 的函数 $\Phi(\varepsilon)$, 故当 $\varepsilon = 0$ 时对所有在 0 的一充分小邻域内各 ε 的值而言 $\Phi(\varepsilon)$ 必须具有极小值, 因此 $\Phi'(0) = 0$. 现在假如将积分 $\Phi(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta')dx$ 对 ε 在积分号下求微商 (这是许可的), 我们就得到方程

$$\Phi'(0) = \int_{x_0}^{x_1} (F_y\eta + F_{y'}\eta')dx = 0,$$

这是一个必要条件, 对所有满足上述要求的函数 $\eta(x)$ 而言它必须成立. 用分部积分变换积分中的第二部分, 注意 $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$, 我们就得到方程

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta\left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)dx = 0,$$

它对每一个函数 η 而言皆成立.

利用以下的*变分法基本引理* 则上述方程立即导致所求的微分方程, 这引理是: 设 $\varphi(x)$ 是 x 的连续函数, 若关系式 $\int_{x_0}^{x_1} \eta(x)\varphi(x)dx = 0$ 对所有在边界为零而具有二阶连续微商的连续函数 $\eta(x)$ 而言皆成立, 则 $\varphi(x)$ 恒等于零. 这条对重

积分而言也成立的引理是很容易间接加以证明的. 设 $\varphi(x)$ 不为零, 例如在 $x=\xi$ 处为正, 则必定存在一个邻区 G, 由 $\xi_0<x<\xi_1$ 所决定, 在 G 内 $\varphi(x)$ 为正. 我们在 G 中取函数 $\eta(x)=(x-\xi_0)^4(x-\xi_1)^4$, 在 G 外取 $\eta(x)=0$. 于是我们有 $\int_{x_0}^{x_1}\eta\varphi dx>0$, 这和假设矛盾. 假如我们要求函数 η 的前 k 阶微商皆连续, 则论断 $\varphi=0$ 依然成立; 在这情形我们只要令 $\eta=(x-\xi_0)^{2l}(x-\xi_1)^{2l}$, 其中 $2l>k$.

由基本引理我们立刻可得函数 $dF_{y'}/dx-F_y$(此后用 $-[F]_y$ 来表示这个式子) 对 x 而言恒等于零, 也就是说, 函数 $y(x)$ 满足微分方程

$$-[F]_y=\frac{d}{dx}F_{y'}-F_y=0, \tag{14}$$

或者详细写出来是

$$y''F_{y'y'}+y'F_{y'y}+F_{y'x}-F_y=0. \tag{14'}$$

这就是在整个分析及其应用中一再出现的基本*欧拉微分方程*. *它的作用是给出了极值存在的一个必要条件*. 这是一个二阶微分方程, 在它的一般解中出现两个任意常数, 这正是为满足边条件一般所需要的常数的数目. 现在我们这样来给定义: 欧拉微分方程的每一个解都是极小问题的*极值函数*[1] (*或曲线*). 微分式 $[F]_y$ 叫做 F 对 y 的*变分微商*. 它在变分问题中的地位和通常极小问题中的微商或梯度相类似.

假如像在微分方程理论中所习惯的做法, 我们要在欧拉方程中解出最高一阶的微商, 我们必须设

$$F_{y'y'}\neq 0.$$

这个不等式叫做*勒让德条件*; 在研究极值函数是否的确给出极植的问题中这个条件极为重要.

上面讨论中的主导思想是把极值函数 $y(x)$ 嵌在以 ε 为参数的函数族 $y(x)+\varepsilon\eta(x)$ 内. 这个参数在式子中是线性的这一事实是无关紧要的. 经常也适宜于把极值函数嵌在较为一般的函数族 $y(x,\varepsilon)$ 中; 我们只要令

$$\eta(x)=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}y(x,\varepsilon)|_{\varepsilon=0},$$

前面的讨论依然成立.

现在我们来引进一些常用的名词. 我们称函数 $\varepsilon\eta=\delta y$ 为 $y(x)$ 的变分; 同样地称式子

$$\delta J=\varepsilon\Phi'(0)=\varepsilon\int_{x_0}^{x_1}(\eta F_y+\eta' F_{y'})dx$$

---

1) 见 140 页脚注 3 的定义.

$$= \varepsilon \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \eta dx + \varepsilon F_{y'} \eta |^{x=x_1} - \varepsilon F_{y'} \eta |^{x=x_0}$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} [F]_y \delta y dx + F_{y'} \delta y \Big|_{x_0}^{x_1} \tag{15}$$

为积分 J 的变分 或者说得更精确些是它的一阶变分, 这里的 η 甚至于可以在两端不为零. 这些都和微分学的符号相类, 在那里我们称包含任意参数 ε 的式子 $\varepsilon f'(x) = df$ 为函数 $f(x)$ 的微分. 因此泛函取极小值的必要条件 对所有满足边条件的 $y + \delta y$ 而言其一阶变分为零.

一般说来, 使 δJ 为零的函数 (用几何的语言即曲线), 也就是说极值函数 (或曲线), 有时候又称为定常函数(或定常曲线). 这个用语表明我们所处理的可以包含不是真正极值的情况, 正像在微分学的相应的问题中一样. 事实上, 在许多情形下, 我们所主要有兴趣的是变分之为零而不是极值的问题. 我的兴趣只是在于求定常值的那些问题也一样叫做变分问题.

前面所考虑的例子使我们有以下的变分微商:

(a) $F = \sqrt{e + 2fv' + gv'^2}$,

$$\frac{d}{du} \frac{f + gv'}{\sqrt{e + 2fv' + gv'^2}} - \frac{e_v + 2f_v v' + g_v v'^2}{2\sqrt{e + 2fv' + gv'^2}} = 0;$$

(b) $F = \dfrac{\sqrt{1 + y'^2}}{\varphi(x, y)} = \psi(x, y)\sqrt{1 + y'^2}, \psi y'' = (\psi_y - \psi_x y')(1 + y'^2)$;

(c) $F = y\sqrt{1 + y'^2}, yy'' = 1 + y'^2$((b) 的特殊情形);

(d) $F = y\sqrt{1 - y'^2}, yy'' = y'^2 - 1$.

在 4.4 节中我们将再讨论如何积分这些微分方程的问题.

4.3.2 多个未知函数的问题

在第 1 小节中所讨论问题的直接推广是决定若干个 x 的函数 $y(x), z(x), \cdots$ 而使积分

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, \cdots, y', z', \cdots) dx \tag{16}$$

取极值 (或定常值) 的问题, 这里函数在边界点上的值也可以是给定的. 同样我们也引进在边界上为零的任意函数 $\eta(x), \zeta(x), \cdots$, 并假设 $y = y(x) = f(x), z = z(x) = g(x), \cdots$ 这一组函数给出了极值. 和上面一样, 这使我们得出的结论是变数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ 的函数

$$\Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \varepsilon_1 \eta, z + \varepsilon_2 \zeta, \cdots, y' + \varepsilon_1 \eta', z' + \varepsilon_2 \zeta', \cdots) dx$$

必须在 $\varepsilon_1=0, \varepsilon_2=0, \cdots$ 时取极值. 这样我们就必须有 $(\partial\Phi/\partial\varepsilon_1)_0=0, (\partial\Phi/\partial\varepsilon_2)_0=0, \cdots$,[1]或者

$$\begin{aligned}\delta J&=\varepsilon_1\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_1}\right)_0+\varepsilon_2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}\right)_0+\cdots\\&=\int_{x_0}^{x_1}[(F_y\eta+F_{y'}\eta')\varepsilon_1+(F_z\zeta+F_{z'}\zeta')\varepsilon_2+\cdots]dx=0.\end{aligned}$$

这个式子叫做 J 的一级变分. 同样也可以把它表为

$$\begin{aligned}\delta J=&\varepsilon_1F_{y'}\eta\Big|_{x_0}^{x_1}+\varepsilon_2F_{z'}\zeta\Big|_{x_0}^{x_1}+\varepsilon_1\int_{x_0}^{x_1}\eta\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)dx\\&+\varepsilon_2\int_{x_0}^{x_1}\zeta\left(F_z-\frac{d}{dx}F_{z'}\right)dx+\cdots,\end{aligned}\tag{17}$$

在目前的情形边界项为零. 当我们任意选函数 $n,\zeta,\cdots$ 中的一个而令其他的为零, 我们需有 $\delta J=0$, 因此前面用过的论断说明以下欧拉方程成立:

$$\begin{aligned}-[F]_y=&\frac{d}{dx}F_{y'}-F_y\\&=F_{y'y'}y''+F_{y'z'}z''+\cdots+F_{y'y}y'+F_{y'z}z'+\cdots+F_{y'x}-F_y=0,\\-[F]_z=&\frac{d}{dx}F_{z'}-F_z\\&=F_{z'y'}y''+F_{z'z'}z''+\cdots+F_{z'y}y'+F_{z'z}z'+\cdots+F_{z'x}-F_z=0,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\tag{18}$$

因此, 作为 "空间曲线" $y=f(x), z=g(x), \cdots$ 具有极值性或定常性的必要条件, 我们得到二阶微分方程组 (18); 这个方程组中方程的个数等于所要求的未知函数 $y,z,\cdots$ 等的个数.

4.3.1 小节中所有的讨论依然都成立. 可以附带说明的是一级变分为零不只是极值情形的必要条件, 例如当我们要求积分对函数 $y(x)$ 的变分而言为极小而同时对函数 $z(x)$ 的变分而言则为极大时, 它也是必要条件.

在这里, 凡代表微分方程组的解的每一条曲线也都叫做*极值线*.

以下问题给出了一个欧拉方程 (18) 的简单的例子: 在通常的欧几里得空间或者更一般地说在一具有弧长元素

$$ds^2=g_{11}dx^2+g_{22}dy^2+g_{33}dz^2+2g_{12}dxdy+2g_{13}dxdz+2g_{23}dydz$$

的黎曼空间定出两点间最短的曲线. 在这情形我们有

$$F=(g_{11}+2g_{12}y'+2g_{13}z'+g_{22}y'^2+2g_{23}y'z'+g_{33}z'^2)^{1/2},$$

1) 下标 0 表示我们令 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\cdots=0$.

PDG

因此得出这种空间的“短程线”微分方程如下：

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{g_{12}+g_{22}y'+g_{23}z'}{F}\right)-\frac{1}{2F}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial y}+2\frac{\partial g_{12}}{\partial y}y'+\cdots\right)=0,$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{g_{13}+g_{23}y'+g_{33}z'}{F}\right)-\frac{1}{2F}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial y}+2\frac{\partial g_{12}}{\partial y}y'+\cdots\right)=0.$$

在欧几里得空间则有

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2,\ F=\sqrt{1+y'^2+z'^2},$$

这些方程就变为

$$\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=0,\ \frac{d}{dx}\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=0,$$

空间所有的直线都满足这两个方程.

在光速为 $\varphi(x,y,z)$ 的三维介质中光的传播决定于变分问题

$$T=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{\varphi(x,y,z)}dx=\min..$$

更一般说来, 我们可假定光速也依赖于光线的方向, 故可表为式子 $\varphi(x,y,z,y',z')=v$. 因此几何光学中求光线的问题相当于一个一般的变分问题, 其中

$$F=\frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{\varphi(x,y,z,y',z')}.$$

4.3.3 高阶微商的出现

按类似的方法可以得出另一变分问题的欧拉方程, 在这变分问题中我们要求积分

$$J=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',y'',\cdots y^{(n)})dx \tag{19}$$

的定常值, 其中 F 为变量 $x,y,y',\cdots,y^{(n)}$ 的给定函数, 问题中可取的比较函数为所有具有直到 $2n$ 阶的连续微商而其 $(n-1)$ 及 $(n-1)$ 以下各阶微商 (函数本身可看作零阶微商) 则在边界上取给定值的函数. 我们仍然取 $\eta(x)$ 为任意具有 $2n$ 阶连续微商的连续函数, 且有边界点 $x=x_0$ 及 $x=x_1$ 上有 $\eta(x)=\eta'(x)=\cdots=\eta^{(n-1)}(x)=0$. 和前面完全一样, 我们得到一阶微分 $\delta J=\varepsilon\dfrac{d}{d\varepsilon}J[y+\varepsilon\eta]_{\varepsilon=0}$ 的表示式如下：

$$\delta J=\varepsilon\int_{x_1}^{x_0}(F_y\eta+F_{y'}\eta'+\cdots+F_{y^{(n)}}\eta^{(n)})dx.$$

重复地分部积分, 我们可以从积分中消去函数 η 的所有的微商, 而把它化为

$$\delta J=\varepsilon\int_{x_0}^{x_1}\eta\left[F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}-\cdots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}\right]dx. \tag{20}$$

因此, 按基本引理 (见 4.3.1 小节), 我们得到 $2n$ 阶微分方程

$$[F]_y=F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}-\cdots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0, \tag{21}$$

它是泛函取极值的必要条件. 这个方程也叫做欧拉方程. 在 (21) 的通解中所出现的 $2n$ 个积分常数由 $2n$ 个边条件决定.

若要定出若干个函数 $y,z,\cdots$ 为变分问题

$$\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,z,\cdots,y',z',\cdots,y'',z'',\cdots)dx=\min.$$

的解, 我们需要按同样的方式考虑相应的一组欧拉微分方程.

4.3.4 多个自变数的情形

决定重积分的极值的问题使我们得到一个或多个包含未知函数的*偏微分方程*, 就像前面那些问题使我们得到常微分方程一样. 例如, 试考虑求重积分

$$J=\iint_G F(x,y,u,u_x,u_y)dxdy \tag{22}$$

的极值的问题, 此处积分积过一给定的区域 G, 所要定的函数 u 是连续的, 有直到二级的连续微商, 而且在 G 的边界上取给定的值. 我们引进一任意函数 $\eta(x,y)$, 往后我们将对这函数加上边界条件 $\eta=0$, 这样就得到极值的必要条件为一阶变分

$$\delta J=\varepsilon\left(\frac{d}{d\varepsilon}\Phi(\varepsilon)\right)_{\varepsilon=0}=\varepsilon\left(\frac{d}{d\varepsilon}J[u+\varepsilon\eta]\right)_{\varepsilon=0}$$

等于零; 这就相当于方程

$$\delta J=\varepsilon\iint_G(F_u\eta+F_{u_x}\eta_x+F_{u_y}\eta_y)dxdy=0, \tag{23}$$

同样我们也可以用分部积分来变换这个式子. 我们如常假定 G 的边界曲线 Γ 具有分段连续变动的切线. 于是按照高斯积分定理[1)]我们有

$$\iint_G(\eta_xF_{u_x}+\eta_yF_{u_y})dxdy$$

1) 例如可参看 R. Courant. Differential and Integral Calculus, 卷 II, 360 页, 修订第二版. New York: Interscience Publishers, Inc., 1947. 有中译本, 中华书局出版.

$$= \int_{\Gamma} \eta(F_{u_x}dy - F_{u_y}dx) - \iint_G \eta\left(\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} + \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right)dxdy.$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}\delta J &= \varepsilon \iint_G \eta\left\{F_u - \frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right\}dxdy + \varepsilon\int_{\Gamma}\eta(F_{u_x}dy - F_{u_y}dx)\\ &= \iint_G \delta u[F]_u dxdy + \int_{\Gamma}\delta u(f_{u_x}dy - F_{u_y}dx) = 0,\end{aligned}$$

假如和 u 有固定边条件的假定一致, 我们加上在边界上有 $\eta = 0$ 的条件, 我们就得到

$$\delta J = \varepsilon \iint_G \eta\left\{F_u - \frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right\}dxdy = 0. \tag{24}$$

方程 $\delta J = 0$ 必须对任意连续可微的函数 η 都成立. 在 4.3.1 小节中所叙述的对单积分的引理对重积分也是成立的, 而且可以按同样的方式来证明; 所以我们的结论是 $u(x,y)$ 必须满足欧拉微分方程

$$-[F]_u = \frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} + \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y} - F_u = 0, \tag{25}$$

或者更明确一些是

$$F_{u_x u_x}u_{xx} + 2F_{u_x u_y}u_{xy} + F_{u_y u_y}u_{yy} + F_{u_x u}u_x + F_{u_y u}u_y + F_{u_x x} + F_{u_y y} - F_u = 0.$$

从这方程所有的解作成的流形中我们必须利用给定的边条件定出一个特解 (边值问题).

同样, 假如要确定的是多个未知函数, 我们就得到一组这样的方程, 假如函数 F 所包含的微商一直到 n 阶 $u_x, u_y, \cdots, u_{yy\cdots y}$, 我们就得到一个 $2n$ 阶的微分方程

$$\begin{aligned}[F]_u =& F_u - \frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}F_{u_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}F_{u_{xy}}\\ &+ \frac{\partial^2}{\partial y^2}F_{u_{yy}} + \cdots + (-1)^n\frac{\partial^n}{\partial y^n}F_{u_{yy\cdots y}} = 0.\end{aligned} \tag{26}$$

我们可以考虑例子 $F = \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2)$(见 135 页). 这里欧拉方程就是 "势方程"

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

函数 $F = \frac{1}{2}(\Delta u)^2 = \frac{1}{2}u_{xx}^2 + u_{xx}u_{yy} + \frac{1}{2}u_{yy}^2$ 使我们得到欧拉方程

$$\Delta u = u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = 0;$$

对带有常数 c 的被积函数 $(\Delta u)^2 - c(u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2)$, 我们可以得到同样的欧拉方程.

极小曲面的问题, 也就是说, 被积函数

$$F = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$$

使我们得到欧拉微分方程

$$z_{xx}(1 + z_y^2) - 2z_{xy}z_x z_y + z_{yy}(1 + z_x^2) = 0.$$

4.3.5 欧拉微分式之恒等于零

一被积函数 $F(x, y, y', \cdots)$ 的欧拉微分式有时可以对所有的可取变量函数而言恒等于零. 因为我们可以作出可取变量函数使得 $y, y', \cdots$ 在任一点 x 取预先给定的值, 所以欧拉式 $[F]_y$ 对所有的函数 y 而言恒等于零就相当于这个式子在把 $x, y, y', \cdots$ 看作自变量时恒等于零. 如果变量函数依赖于多个独立变数, 同样的事实也成立.

最简单的是被积函数为 $F(x, y, y')$ 的情形. 假如表示式 $F_y - F_{y'x} - F_{y'y}y' - F_{y'y'}y''$ 恒为零, 就有 $F_{y'y'} = 0$, 所以 F 具有形式 $F = A(x, y) + y'B(x, y)$. 因此欧拉微分方程只不过变为可积分条件

$$\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} = 0,$$

这时候按照积分学的熟知定理可知积分

$$\int_{x_0}^{x} F dx = \int_{x_0}^{x} (A + By')dx = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Adx + Bdy$$

的确不依赖于积分路线[1]. 假如我们把上限 x 看作变量, 这积分就变成上限的函数 $G(x, y)$; 我们可得

$$F(x, y, y') = \frac{d}{dx} G(x, y).$$

因此 F 的欧拉微分式恒等于零必须而且只需以上关系成立.

对被积函数 $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)})$ 而言情况是类似的. 在这种情形欧拉微分式 $[F]_y$ 恒等于零的充分和必要条件也是 F 可表为

$$F = \frac{dG}{dx},$$

其中 $G(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ 只包含 y 的到 $(n-1)$ 阶的微商.

我们可以用简单的计算来验证这个条件是充分的, 或者我们可以用以下的看

1) 不久我们将看到与路线无关这一事实又可直接由欧拉式之恒等于零得出.

法肯定这一点：若 $F=\dfrac{dG}{dx}$，则积分 $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1}Fdx$ 只依赖于函数 y 以及其前 $n-1$ 阶的微商在端点的值；所以只要保持边值一定，当函数在区间内变动时积分的值不变. 所以一阶变分或欧拉式恒等于零.

证明这条件为必要时，我们考虑包含参数 α 的一族函数 $y(x,\alpha)$，且令 $y,y',\cdots,y^{(n-1)}$ 具有确定的边值 (不依赖于 α). 假如我们用 $J(\alpha)$ 表示含有变量函数 $y(x,\alpha)$ 的积分，则一阶变分的公式使我们有

$$\frac{\partial J}{\partial\alpha}=\int_{x_0}^{x_1}[F]_y\frac{\partial y}{\partial\alpha}dx=0,$$

这是因为 $[F]_y$ 恒等于零. 因此 J 不依赖于 α，而只是坐标 x_0,x_1 以及 y 和它的前 $n-1$ 阶微商在端点的值的函数. 若设初值点 x_0 固定而令上限 x_1 变动，我们得到以下形式的方程：

$$\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})dx=G(x_1,y,y',\cdots,y^{(n-1)}),$$

因此对上限求微商就可以得到我们全部的论断.

具有多个变数的变量函数的积分，只要被积函数 $F(x,y,u,u_x,u_y)$ 仅仅包含一阶微商，那么情况也是类似的. 用和前面同样的方法，我们就得到以下定理：*欧拉式 $[F]_u$ 对变量函数 u 而言恒等于零的充分和必要条件是 F 可表为*

$$F=A_x+B_y,$$

其中 A 和 B 为 x,y 和 u 的函数，上列形式的式子叫做*散度式*.

一散度式 $F(x,y,u,u_x,u_y)$ 也可以用以下条件来刻画：当函数 u 只在 G 内部的子区域上改变时，重积分 $\displaystyle\iint_G Fdxdy$ 的值保持不变.

事实上，按照高斯积分定理，我们有

$$\iint_G Fdxdy=\int_\Gamma(Ady-Bdx),$$

式中右端的积分为一沿正向在 G 的边界曲线 Γ 上所作的线积分.

假如被积函数 F 包含高于一阶的偏微商，则情况比较复杂. 在这情形下，欧拉式恒为零当且仅当 F 可表为

$$F=A_x+B_y$$

(即 F 为一散度式) 的这条定理依然成立；可是一般说来，我们不可能选择 A 和 B 使得在这些函数中出现的微商较在 F 中出现的阶数低.

二阶散度式最简单的一个例子是 $F = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2$. 这时候我们有

$$\begin{aligned} F &= (u_x u_{yy})_x - (u_x u_{xy})_y = -(u_y u_{xy})_x + (u_y u_{xx})_y \\ &= -\frac{1}{2}[(u_x^2)_{yy} - 2(u_x u_y)_{xy} + (u_y^2)_{xx}]. \end{aligned}$$

另一个例子是恒等式

$$\begin{aligned} \frac{u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2}{(1+u_x^2+u_y^2)^{3/2}} =& \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{u_{xx}u_y}{(u_x^2+1)\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right] \\ & - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u_{xy}u_y}{(u_x^2+1)\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right]. \end{aligned}$$

式子

$$\frac{u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2}{(1+u_x^2+u_y^2)^{3/2}}$$

是曲面 $z = u(x, y)$ 的高斯曲率乘以因子 $\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}$; 它之可以写为散度式表示了一个熟知的事实, 就是在一段曲面上曲率的积分, 也就是该段曲面的全曲率, 只依赖于该段曲面沿边界的狭条.

我们的讨论可导致以下定理: **如果两个变分问题的被积函数之差为一散度式, 则该二问题的欧拉方程一致, 因此其极值线族或极值面族一致.**

4.3.6　齐次形的欧拉方程

在有些关于利用极小条件决定曲线或曲面的几何问题中, 不任意选定某坐标为独立变数往往更为方便. 这时候我们可以用参数方程 $x = x(t), y = y(t)$ 表示曲线 (或参数方程 $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$ 表示曲面), 其中 t(或 u 及 v) 为独立变数, 而且方程

$$\dot{x} = \dot{y} = 0$$

$$(\text{或} x_u y_v - x_v y_u = y_u z_v - y_v z_u = z_u x_v - z_v x_u = 0)$$

不同时成立. 在这里我们用一点表示对 t 的微商. 我们从考虑最简单的变分问题开始, 这时泛函的形式为

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx = \int_{t_0}^{t_1} \Im(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt = \min., \tag{27}$$

其中

$$\Im = \dot{x} F\left(x, y, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right).$$

对微商 $\dot{x}, \dot{y}$ 说来, 函数 $\Im$ 是 "齐" 一次的, 这就是说对任意一个 k 它都满足齐次关系

$$\Im(x, y, k\dot{x}, k\dot{y}) = k\Im(x, y, \dot{x}, \dot{y}), \tag{28}$$

因此满足方程

$$\dot{x}\Im_{\dot{x}} + \dot{y}\Im_{\dot{y}} = \Im, \tag{29}$$

后者可由 (28) 式对 k 求微商而令 $k = 1$ 得出. 相反地, 若 $\Im$ 为 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 任意齐一次[1)]函数, 也就是说, 若 $\Im$ 满足方程 (28), 则变分问题 $\int \Im dt = \min$. 确定一不依赖于参数选择的曲线. 因为若作参数变换 $t = t(\tau)$, 其中 $dt/d\tau > 0$, 则区间 $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ 变为区间 $\tau_0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1$, 利用 (28) 我们可得

$$\begin{aligned}
\int_{\tau_0}^{\tau_1} \Im\left(x, y, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right) d\tau &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \Im\left(x, y, \dot{x}\frac{dt}{d\tau}, \dot{y}\frac{dt}{d\tau}\right) d\tau \\
&= \int_{\tau_0}^{\tau_1} \Im(x, y, \dot{x}, \dot{y})\frac{dt}{d\tau} d\tau \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \Im(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt.
\end{aligned}$$

因此对不改变前进方向的参数变换而言, 我们的变分问题为一不变问题; 极值线不依赖于参数的选择.

由齐次问题可得两个欧拉方程

$$\Im_x - \dot{\Im}_{\dot{x}} = 0,\ \Im_y - \dot{\Im}_{\dot{y}} = 0, \tag{30}$$

这两个方程和关系式 (29) 相结合, 必须在实质上和原先的微分方程 (14) 相当, 因此它们不是独立的. 由 (29) 微分导出恒等式

$$\Im_x = \dot{x}\Im_{x\dot{x}} + \dot{y}\Im_{x\dot{y}},\ \Im_y = \dot{x}\Im_{y\dot{x}} + \dot{y}\Im_{y\dot{y}};$$

$$\dot{x}\Im_{\dot{x}\dot{x}} + \dot{y}\Im_{\dot{x}\dot{y}} = 0,\ \dot{x}\Im_{\dot{x}\dot{y}} + \dot{y}\Im_{\dot{y}\dot{y}} = 0;$$

$$\Im_{\dot{x}\dot{x}} : \Im_{\dot{x}\dot{y}} : \Im_{\dot{y}\dot{y}} = \dot{y}^2 : -\dot{x}\dot{y} : \dot{x}^2,$$

我们就可以由此求出两方程间的相互关系. 式子

$$\frac{\Im_{\dot{x}\dot{x}}}{\dot{y}^2} = -\frac{\Im_{\dot{x}\dot{y}}}{\dot{x}\dot{y}} = \frac{\Im_{\dot{y}\dot{y}}}{\dot{x}^2}$$

1)在几何的问题中, 这函数往往只是正齐次的 (也就是说 (28) 对 $k > 0$ 成立), 而不是完全齐次的, 因为在完全齐次的情形在反方向沿曲线进行时所得的积分将反号, 而以弧长为例, 则积分 $\int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$ 中需取正根, 所得的积分值无论前进方向为何就总是正的. 对这种正齐次被积函数说来, 我们上面的讨论仍旧成立.

的值我们通常用 $\Im_1$ 来表示.

由上面的恒等式可得

$$\begin{aligned}\Im_x - \dot{\Im}_{\dot{x}} &= \dot{x}\Im_{x\dot{x}} + \dot{y}\Im_{x\dot{y}} - \Im_{\dot{x}x}\dot{x} - \Im_{\dot{x}y}\dot{y} - \Im_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x} - \Im_{\dot{x}\dot{y}}\ddot{y}\\ &= \dot{y}[\Im_{x\dot{y}} - \Im_{\dot{x}y} + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})\Im_1],\\ \Im_y - \dot{\Im}_{\dot{y}} &= -\dot{x}[\Im_{x\dot{y}} - \Im_{\dot{x}y} + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})\Im_1],\end{aligned}$$

因此 (30) 的两个方程由下面的恒等式联系起来

$$\dot{x}(\Im_x - \dot{\Im}_{\dot{x}}) + \dot{y}(\Im_y - \dot{\Im}_{\dot{y}}) = 0, \tag{31}$$

而且我们可以用一个方程来代替它们, 例如用

$$\Im_{x\dot{y}} - \Im_{\dot{x}y} + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})\Im_1 = 0. \tag{32}$$

在我们的问题是要确定单变数的多个函数时, 情况是完全类似的. 在这里变分问题 $\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,z,y',z')dx = \min.$ 变为变分问题 $\int_{t_0}^{t_1} \Im(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})dt = \min.$,其中 $\Im = \dot{x}F(x,y,z,\dot{y}/\dot{x},\dot{z}/\dot{x})$; 函数 $\Im$ 对变量 $\dot{x},\dot{y}$ 和 $\dot{z}$ 而言是齐一次的.

齐次表示的优点不只是在于对称性. 举一个例来说, 如果在一条曲线上 x 不单调地增加, 诸如闭曲线, 我们就不能用 $y = y(x)$ 这样的式子来表示它; 因此非齐次的表示不能处理这一类的问题.

在非一维的问题中, 齐次表示可以如下得到: 设在积分

$$\iint F(x,y,z,z_x,z_y)dxdy$$

中变数 x,y 和函数 z 可写为两个参数 u 和 v 的函数, 而且 x,y 对 u,v 而言的雅可比行列式

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = x_u y_v - x_v y_u$$

不为零, 我们就有

$$z_x = \frac{z_u y_v - z_v y_u}{x_u y_v - x_v y_u}, \quad z_y = -\frac{z_u x_v - z_v x_u}{x_u y_v - x_v y_u},$$

这样积分就变为

$$\begin{aligned}&\iint F(x,y,z,z_x,z_y)dxdy\\ &= \iint F\left(x,y,z,-\frac{\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}},-\frac{\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}\right)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv\end{aligned}$$

$$= \iint \Im\left(x, y, z, \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) dudv. \tag{33}$$

这里的被积函数 $\Im$ 是后三个雅可比式的齐一次函数. 前面在一维积分的情形导出的一些关系, 特别是恒等式 (31) 和微分方程的对称形式 (32), 很容易在多个变数的情形加以推广. 在本书中用不着这些推广, 读者可自去参看文献[1].

4.3.7 条件的放宽、杜布瓦雷蒙和哈尔定理

到此为止, 我们要求比较函数具有连续微商的级数和欧拉微分方程中所出现的最高微商阶数一样. 从变分的观点来看, 这个要求是一个不自然的限制; 举例来说, 以 $F(x,y,y')$ 为被积函数的变分问题只要一阶微商分段连续就有意义, 对二阶微商不需作任何假定. 不经深究, 我们可以想像得到, 假如按这样的方式放宽加给可取函数的条件, 那么我们会得到一个新的解答, 它不再满足欧拉微分方程.

试首先考虑一真极小问题并假定 $y(x)$ 为具有一阶及二阶连续微商且给出极小值的函数. *那么即使我们扩大可取函数的空间而使它包含的函数 y^* 不一定具有二阶微商, 函数 $y(x)$ 仍旧给出极小值.* 因为按照魏尔斯特拉斯迫近定理, 我们可以按任意准确度用多项式 $p'(x)$ 来近似 y^* 而用 $p(x)$ 来近似 y^*, 这里的 $p(x)$ 满足边条件 $p(x_0) = y_0, p(x_1) = y_1$[2]. 因此, $J[p]$ 和 $J[y^*]$ 之差也是任意小. 可是因为 $p(x)$ 是一个具有连续二阶微商的可取比较函数, 我们有 $J[p] \geqslant J[y]$, 因此有 $J[y^*] \geqslant J[y]$.

假如极小问题, 或者更一般地说定常值问题, 是在上述较广的可取条件下提出的, 那么我们只肯定解答具有分段连续的一阶微商. 我们可以提出这样的问题: 这个解答函数是否自动地具有高级微商? 若有的话, 它是否满足欧拉方程? 以下的杜布瓦雷蒙定理是这个问题正面的答案: *给了一个变分问题, 其被积函数为 $F(x,y,y')$, 设 F 对各变数具有连续的一阶及二阶微商. 令 $y(x)$ 为取给定边值而具有分段连续一级微商的连续函数. 假如对 $y(x)$ 以及所有取零边值而满足和 $y(x)$ 同样的连续性条件的 $\eta(x)$ 而言一阶变分 (15) 为零, 此外又设 $F_{y'y'} \neq 0$, 则 $y(x)$ 具有连续二阶微商且满足欧拉微分方程; 也就是说, 一阶变分为零就意味着 $y(x)$ 具有连续二阶微*

1)O. Bolza. Vorlesungen über Variationsrechnung. 666–671, B. G. Teubner, Leipzig and Berlin, 1909; G.Kobb. Sur les maxima et minima des intégrales doubles. Acta Math., Vol. 16, 1892–1893, 65–140.

2)按魏尔斯特拉斯定理, 我们可以造多项式 $q'(x)$, 它在 $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ 内和函数 $y^{*\prime}(x)$ 之差小于 $\varepsilon/2(x_1 - x_0)$, 其中 ε 为任意指定的正数. 于是多项式

$$q(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} q'(t)dt$$

取给定的初值 y_0 且在区间上和 $y^*(x)$ 之差皆小于 $\varepsilon/2$. 为了得到一个同时又取另一边值 y_1 的多项式, 我们只需在 $q(x)$ 上加一线性函数 $l(x) = [y_1 - q(x_1)]\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$, 就立刻可以验证 $p(x) = q(x) + l(x)$ 具有上文中所指定的各个性质.

商, 且满足欧拉方程.

在证明定理前我们先给一条简单的引理: 设 $\varphi(x)$ 在积分区间上为分段连续函数, 又设等式

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\eta(x)dx = 0$$

对任意分段连续而满足条件

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta(x)dx = 0$$

的函数 $\eta(x)$ 而言皆成立, 则 $\varphi(x)$ 为一常数. 证明这引理时我们首先指出上述关系对常数 φ 必然成立. 现在对给定的 φ 我们定一常数 c 使得 $\int_{x_0}^{x_1}(\varphi - c)dx = 0$; 因为 $\int_{x_0}^{x_1}\varphi\eta dx = 0$, 于是我们就有 $\int_{x_0}^{x_1}(\varphi - c)\eta dx = 0$. 可是我们可以令 $\eta = \varphi - c$ 而得到方程 $\int_{x_0}^{x_1}(\varphi - c)^2 dx = 0$, 从而立刻得到前面的论断.

以完全同样的方式可以证明下面较一般的定理: 若 $\varphi(x)$ 为分段连续函数, 且对所有的能满足条件

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta dx = 0,\ \int_{x_0}^{x_1} x\eta dx = 0, \cdots, \int_{x_0}^{x_1} x^n\eta dx = 0$$

的分段连续函数 $\eta(x)$ 而言有 $\int_{x_0}^{x_1}\varphi\eta dx = 0$, 则 φ 为一 n 级多项式:

$$\varphi = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n.$$

证明杜布瓦雷蒙定理时注意方程

$$\int_{x_0}^{x_1}(F_y\zeta + F_{y'}\zeta')dx = 0$$

对任一分段连续可微的函数 $\zeta(x)$ 皆成立, 只要

$$\zeta(x_0) = \zeta(x_1) = 0.$$

引进缩写符号 $F_y = A', F_{y'} = B, \int_{x_0}^{x} F_y dx = A$, 分部积分, 我们就得到

$$\int_{x_0}^{x_1}(A'\zeta + B\zeta')dx = \int_{x_0}^{x_1}\zeta'(B - A)dx = 0.$$

我们选 $\zeta' = \eta$, 它满足条件: (一) 是分段连续的, (二)ζ 满足边条件亦即 $\int_{x_0}^{x_1} \eta dx = \zeta(x_1) - \zeta(x_0) = 0$ 成立. 应用前面的引理我们得到

$$B - A = F_{y'} - \int_{x_0}^{x} F_y dx = c, \tag{34}$$

其中 c 不依赖于 x. 这个方程和欧拉方程的地位相当. 可是因为 $\int_{x_0}^{x} F_y dx$ 对上限 x 可微, c 也对 x 可微, 所以 $F_{y'}$ 可微; 所以欧拉方程

$$\frac{d}{dx}F_{y'} - F_y = 0 \tag{34a}$$

成立. 现在假如 F 对其变量连续二次可微, 此外若勒让德条件 $F_{y'y'} \neq 0$ 得以满足, 就可知道分段连续的函数 y 的确连续且具有连续微商. 首先, 因为, $F_{y'y'} \neq 0, y'$ 可以表为一连续可微函数 $\varphi(x, y, F_{y'})$. 由 (34)$F_{y'}$ 为 x 的连续函数, y' 必然也是如此. 因此 φ 中的变量 y 和 $F_{y'}$ 皆连续可微, 所以 $\varphi = y'$ 也连续可微.

杜布瓦雷蒙的结果可以立刻推广到被积函数为 $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)})$ 的情形, 只要利用上述引理的推广形式就行了. 我们把证明的细节留给读者.

在多个自变数的变分问题中, 情况比较微妙. 若在被积函数为 $F(x, y, u, u_x u_y)$ 的问题中可取函数的空间扩充到包含所有具有分段连续微商的连续函数, 则一阶变分为零必须意味着二阶微商存在且连续的事实, 以及欧拉方程成立这一事实便不再是正确的. 可是在高维的情形也存在一条定理和杜布瓦雷蒙的相类似 (哈尔定理): *$F(x, y, u, u_x, u_y)$ 的积分对具有分段连续微商 u_x 和 u_y 的连续函数 u 而言一阶变分为零相当于以下方程成立:*

$$\iint_B F_u dxdy = \int_R (F_{u_x} dy - F_{u_y} dx), \tag{35}$$

其中左端的积分积过 G 中由分段平滑的曲线所限制的任一单连通子区域 B, 右端的积分沿正向积过 B 的边界 R. 在 F 不明显依赖于 u 的特殊情形, 哈尔定理所叙述的是右端的积分对一闭曲线 R 而言为零; 这就相当于说存在函数 $\Phi(x, y)$, 对它说来微分方程组

$$F_{u_x} = \Phi_y, \ F_{u_y} = -\Phi_x$$

在 G 的每一个单连通子区域皆成立. 所以上述积分关系或者这个一阶微分方程组的地位就相当于欧拉的二阶微分方程.

证明哈尔定理时我们只需证明上述积分关系在 B 为一方块的特殊情形成立. 于是对任一由有限多个方块所组成的区域定理也成立, 对任意区域而言可按通常划

分为若干方块的方式加以证明. 现在让我们来考虑 B 为 $x_0 \leqslant x \leqslant x_1, y_0 \leqslant y \leqslant y_1$. 对 B 而言一阶变分为零可表为方程

$$\iint_B (F_u \zeta + F_{u_x} \zeta_x + F_{u_y} \zeta_y) dx dy = 0,$$

此处 ζ 在方块的边界上为零. 现在我们特殊地取变量 $\zeta(x,y)$ 为 $\zeta(x,y) = v(x)w(y)$, 其中 $v(x)$ 在 x_0, x_1 为零, $w(y)$ 在 $y = y_0, y_1$ 为零. 这样我们就得到方程

$$\int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} (F_u vw + F_{u_x} v'w + F_{u_y} uw') dx dy = 0,$$

重复应用杜布瓦雷蒙定理, 我们就可以从这个方程得到所要证的结果: 我们引进缩写

$$F_{u_x} = A_y(x,y),\ F_{u_y} = B_x(x,y),\ F_u = G_{xy}(x,y),$$
$$\int_{y_0}^{y} F_{u_x} dy = A(x,y),\ \int_{x_0}^{x} F_{u_y} dx = B(x,y),\ \int_{x_0}^{x} F_u dx = G_y(x,y),$$
$$\int_{y_0}^{y} \int_{x_0}^{x} F_u dx dy = C(x,y),$$

分部积分, 就得到

$$\int_{y_0}^{y_1} dy \left\{ \int_{x_0}^{x_1} (-C_y v'w + A_y v'w - Bv'w') dx \right\} = 0$$

或者

$$\int_{x_0}^{x_1} dx v' \left\{ \int_{y_0}^{y_1} (-C_y w + A_y w - Bw') dy \right\} = 0.$$

因为 v' 是在边界上为零的一个任意函数的微商, 由前面的引理就得

$$\int_{y_0}^{y_1} (-C_y w + A_y w - Bw') dy = c,$$

其中 c 不依赖于 x; 分部积分可把这个式子化为

$$\int_{y_0}^{y_1} (C - A - B) w' dy = c.$$

在这方程中我们先令 x 等于 x_1, 然后令 x 等于 x_0, 把所得的二式相减, 就得到

$$\int_{y_0}^{y_1} [D(x_1,y) - D(x_0,y)] w' dy = 0,$$

其中 $D = C - A - B$. 再一次应用杜布瓦雷蒙定理, 我们就有

$$D(x_1,y_1) - D(x_0,y_1) = D(x_1,y_0) - D(x_0,y_0),$$

这恰好就是方程

$$\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1} F_u dxdy = \int (F_{u_x}dy - F_{u_y}dx), \tag{35'}$$

这就是我们所要证明的.

4.3.8 变分问题和函数方程

迄今为止, 我们讨论的是将变量函数的某个微分式积分, 从而得出的泛函的变分问题. 可是在变分问题中还常遇见较为一般的泛函类型. 我们将用几个例子来说明如何用上面所讨论的方法来得出代替欧拉微分方程的函数方程.

(a) 我们要使式子

$$J[\varphi] = \iint K(s,t)\varphi(s)\varphi(t)dsdt + \int [\varphi(s)]^2 ds - 2\int \varphi(s)f(s)ds$$

取定常值, 其中 $K(s,t)$ 为一给定的 s 和 t 的连续对称函数, $f(s)$ 为给定的 s 的连续函数, $\varphi(s)$ 为未知的连续变量函数. 所有的积分皆积过一给定区间 $a \leqslant s \leqslant b, a \leqslant t \leqslant b$. 假如我们用 $\varphi + \varepsilon\zeta$ 代替 φ 而考虑 $J[\varphi+\varepsilon\zeta] = \Phi(\varepsilon)$ 为 ε 的函数, 则经过简单的变换就得到

$$\delta J = \varepsilon \frac{d\Phi}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = 2\varepsilon\int_a^b \zeta(t)\left[\int_a^b K(s,t)\varphi(s)ds + \varphi(t) - f(t)\right]dt.$$

因此 $\delta J = 0$ 的要求导致弗雷德霍姆积分方程

$$\int_a^b K(s,t)\varphi(s)ds + \varphi(t) - f(t) = 0,$$

这乃是问题的欧拉方程.

在第 3 章中处理的具有对称核 $K(s,t)$ 的积分方程的极值问题也很容易用我们的变分方法来处理.

(b) 求式子

$$J[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty}[p(x)(\varphi'(x))^2 + 2\varphi(x+1)\varphi(x-1) - \varphi^2(x) \\ - 2\varphi(x)f(x)]dx$$

的定常值, 其中变量函数在整个区间 $-\infty < x < \infty$ 上连续且有分段连续的微商. 作一阶变分, 经过简单变换我们就得到

$$\begin{aligned}\delta J &= \varepsilon\frac{d}{d\varepsilon}J[\varphi+\varepsilon\zeta]|_{\varepsilon=0} \\ &= 2\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}\zeta(x)[-(p\varphi')' + \varphi(x+2) + \varphi(x-2) - \varphi(x) - f(x)]dx;\end{aligned}$$

表示对任意 ζ 而言一阶变分为零的欧拉函数方程为

$$(p\varphi')' - \varphi(x+2) - \varphi(x-2) + \varphi(x) + f(x) = 0.$$

因此我们得到的不是微分方程而是一微分–差分方程.

4.4 欧拉微分方程的积分

在第 II 卷中我们将通过哈密顿–雅可比理论给出积分欧拉微分方程的一个系统的方法. 目前我们将简短地来讨论前面那些简单的问题的积分. 我们姑且限定讨论 $\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx = \min.$ 的问题.

假如函数 F 不含微商 y', 则欧拉方程化为 $F_y = 0$; 这个方程以隐函数的形式定出了 $y(x)$. 可以看出在这种情形问题若要有解就不能任意加边条件.

假如函数 F 不包含因变数 y, 我们立刻得到 $\dfrac{dF_{y'}}{dx} = 0$, 也就是说 $F_{y'} =$ 常数 $= c$; 所以 $y' = \varphi(x,c)$ 而 $y = \int \varphi(x,c)dx$. 因此欧拉方程可求积解出.

假如函数 F 不包含自变数 x, 我们也可以求积而得出方程的解. 因为这时候有

$$(y'F_{y'} - F)' = y''F_{y'} + y'F'_{y'} - F_{y'}y'' - F_y y' = y'(F'_{y'} - F_y) = 0;$$

因此由欧拉方程立刻可得

$$F(y,y') - y'F_{y'}(y,y') = c.$$

从这方程可解 y' 为 y 和 c 的函数 $\varphi(y,c)$, 而 $x = \int \dfrac{dy}{\varphi(y,c)}$.

另一法: 我们也可以把问题化为前一种情形而得到这结果 (至少在形式上), 为此只要注意到在把 y 看作自变数而把 x 看作因变数时极值线使一阶变分为零. 假如用一点表示对 y 的微商, 我们得到的变分问题是求 $\int F(y, 1/\dot{x})\dot{x}dy$ 的极值, 其中新自变数不出现.

现在可以将 153 页的例 (b), (c) 和 (d) 积分:

(b) 令 $\psi = 1\sqrt{y}$, 即 $F = \sqrt{\dfrac{1+y'^2}{y}}$;

$$y'F_{y'} - F = \frac{-1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = \text{常数} = \frac{1}{c}.$$

令 $y = \frac{1}{2}c^2(1-\cos t)$, 我们有 $y' = \sqrt{\frac{c^2-y}{y}} = \cos(t/2)$

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{dy}{y'} = \int \tan(t/2)\frac{dy}{dt}dt \\ &= c^2\int \sin^2(t/2)dt = c_1 + \frac{1}{2}c^2(t-\sin t). \end{aligned}$$

因此最速落径是以 $c^2/2$ 为半径的圆在 x 轴上滚动时圆周上一点所画出的旋转线.

(c)$F = y\sqrt{1+y'^2}$; $y'F_{y'} - F = \frac{-y}{\sqrt{1+y'^2}} = -\frac{1}{c}$,

$$y = \frac{1}{c}\cosh(cx+c_1).$$

所以联接在两圆周之间有最小面积的旋转面可由一悬链线绕其轴旋转而得出.

(d)$F = y\sqrt{1-\dot{y}^2}$; $\dot{y}F_{\dot{y}} - F = \frac{-y}{\sqrt{1-\dot{y}^2}} = -\frac{1}{c}$,

$$y = \frac{1}{c}\sin(cs+c_1).$$

另一坐标 x 为

$$x = \int \sqrt{1-\dot{y}^2 ds} = \int \sin(cs+c_1)ds = -\frac{1}{c}\cos(cs+c_1)+c_2;$$

因此等周问题的解只能是圆.

4.5 边界条件

在前几节中我们假定所要求的函数在积分区域的边界上取预先给定的值. 可是在许多问题中并没有事先给出决定边值的条件, 或者函数在边界上的性质仅为较一般的条件所限制. *假如对在基本区域内的未知函数并没有预先给定边界条件, 我们就说它取自由边值*. 除了自由边值之外也有这样的问题, 其中边界本身在适当的限制下可以自由变动. 例如在几何学中我们经常要定一些曲线, 其端点限制在给定的曲线或曲面上, 或者要定一些曲面, 其边界须在给定的曲面上. 在这种情形下问题的一部分就是要定出自变数的积分区域. 这一类型的问题可以将前面讲的步骤作简单的推广而加以处理: 使积分 J 的一阶变分 δJ 的表示式适用于这较一般的问题, 特别是在式子中不预先令函数的变分在边界上为零.

4.5.1　自由边界的自然边界条件

我们考虑 4.3.1 小节中的变分问题, 其积分为

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx,$$

可是在 $x = x_0, x_1$ 两点不再对变量函数 $y(x)$ 加什么条件. J 取定常值的必要条件为一阶变分

$$\delta J = F_{y'}\delta y\Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} [F]_y \delta y dx$$

(153 页, 方程 (15)) 为零. 显然欧拉方程 $[F]_y = 0$ 必须满足. 因为 J 若对不具有给定边值的变分而言取定常值. 那么对较少的一类变分, 即在边界上满足 $\delta y = 0$ 的变分而言, 它必须取定常值, 这就说明欧拉方程成立. 所以我们只须考虑依赖于边界的那一部分 δy. 又因为 δy 在边界上的任意性, 我们得到必要条件

$$F_{y'} = 0 \quad (\text{在} x = x_0 \text{和} x_1 \text{两点}),$$

这就是所谓 "自然边界条件".

同样, 对于下列积分

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, \cdots, y', z', \cdots)dx, \tag{36}$$

$$\iint_G F(x, y, u, u_x, u_y)dxdy', \tag{37}$$

$$\iint_G F(x, y, u, u_x, u_y, v, v_x, v_y, \cdots)dxdy \tag{38}$$

为定常时, 我们可由其一阶变分表示式得出的必要条件除欧拉方程外还有自然边界条件, 它们依次为

$$F_{y'} = F_{z'} = 0 \quad \text{在} x = x_0 \text{及} x = x_1 \text{两点},$$

$$F_{u_x}\frac{dy}{ds} - F_{u_y}\frac{dx}{ds} = 0,$$

$$F_{u_x}\frac{dy}{ds} - F_{u_y}\frac{dx}{ds} = 0,\ F_{v_x}\frac{dy}{ds} - F_{v_y}\frac{dx}{ds} = 0, \cdots$$

最后两组条件须在 G 的边界 Γ 上满足, Γ 的弧长记作 s.

自然边界条件这个概念之有意义, 在于很容易把它用于较为一般型的变分问题, 包括那些明显含有边值的问题在内. 下面两个重要的例子说明了这一点:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx - \varphi(y_0) + \varphi(y_1), \tag{39}$$

$$y_0 = y(x_0), y_1 = y(x_1) \quad (\text{不是事先给定的})$$

以及

$$J = \iint F(x, y, u, u_x, u_y)dxdy + \int_\Gamma \Phi(s, u, u_s)ds \ \left(u_s = \frac{du}{ds}\right). \tag{40}$$

这里的变分依次为

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} [F]_y \delta y dx + [\psi'(y_1) + F_{y'}(x_1, y(x_1), y'(x_1))]\delta y_1 - [\varphi'(y_0) + F_{y'}(x_0, y(x_0), y'(x_0))]\delta y_0 \tag{41}$$

以及

$$\delta J = \iint_G [F]_u \delta u dxdy + \int_\Gamma \left(F_{u_x}\frac{dy}{ds} - F_{u_y}\frac{dx}{ds} + [\Phi]_u\right)\delta u ds, \tag{42}$$

其中

$$[\Phi]_u = \Phi_u - \frac{d}{ds}\Phi_{u_s}. \tag{43}$$

相应的自然边界条件为

$$[F_{y'} + \varphi'(y)]|_{x_0} = 0,\ [F_{y'} + \psi'(y)]|_{x_1} = 0^{1)};$$

$$F_{u_x}\frac{dy}{ds} - F_{u_y}\frac{dx}{ds} + \Phi_u - \frac{d}{ds}\Phi_{u_s} = 0.$$

在

$$J = \iint_G (u_x^2 + u_y^2)dxdy + \int_\Gamma \sigma u^2 ds \tag{44}$$

其中 $\sigma(s)$ 为连续边界函数的特殊情形, 变分的表示式为

$$\delta J = -2\iint_G (u_{xx} + u_{yy})\delta u dxdy + 2\int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\delta u ds, \tag{45}$$

其中 $\partial/\partial n$ 表示沿外法线方向的微分. 考虑较为一般的积分

$$J = \iint_G [p(u_x^2 + u_y^2) - qu^2]dxdy + \int_\Gamma p\sigma u^2 ds, \tag{44'}$$

其中 $p(x,y)$ 及其一阶微商在 G 中连续, $q(x,y)$ 在 G 中连续, $\sigma(s)$ 在 Γ 上连续, 我们同样可以得到

$$\delta J = -2\iint_G [(pu_x)_x + (pu_y)_y + qu]\delta u dxdy + 2\int_\Gamma p\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\sigma u ds. \tag{45'}$$

---

1) 符号 “$|_{x_0}$” 表示 “$|$” 左边的式子在 $x = x_0$ 算值.

假如在 (39) 和 (41) 中我们令

$$\varphi(y) = l(y-a)^2,\ \psi(y) = l(y-b)^2,$$

自然边界条件就变为

$$\frac{1}{2l}F_{y'}|_{x_0} + y_0 - a = 0,\ \frac{1}{2l}F_{y'}|_{x_1} + y_1 - b = 0.$$

$l \to \infty$ 时的极限就给出确定边值

$$y_0 = a, \quad y_1 = b$$

的条件. 因此极值线具有固定端点的最简单的变分问题乃是一自由边界问题的极限情形.

一般说来, 我们可以通过加边界项或边界积分[1] 使自然边界条件有很大的更改而不改变欧拉方程.

4.5.2　几何问题、横交条件

当所求曲线的端点可自由在一给定的曲线或曲面[2]上变动时, 或更普遍些, 当积分区域的边界不定时, 在变分问题中利用参数表示是很有用的. 我们试导出下面极值问题的边界条件, 设未知平面曲线的起点在一给定的曲线 $T(x,y)=0$ 上, 而其终点在 x_1 为一定点. 我们引进限制在一定区间 $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ 内的变动的参数 t, 而把 $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx$ 变为积分 $J = \int_{t_0}^{t_1} \Im(x,y,\dot{x},\dot{y})dt$, 其中 $\Im = \dot{x}F(x,y,\dot{y}/\dot{x})$.初边界条件为 $T(x(t_0),y(t_0))=0; x(t_1)$ 和 $y(t_1)$ 的值是固定的. 这样一来, 我们就消除了积分区间变动的麻烦. 现在再引进两个函数 $\xi(t),\eta(t)$, 它们除在 $t=t_1$ 为零外是任意的, 还引进满足下面条件的两个参数 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$:

$$\Psi(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = T[x(t_0)+\varepsilon_1\xi(t_0), y(t_0)+\varepsilon_2\eta(t_0)] = 0.$$

假如 $y=y(x)$ 为一极值线, 则函数

$$\Phi(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \int_{t_0}^{t_1} \Im(x+\varepsilon_1\xi, y+\varepsilon_2\eta, \dot{x}+\varepsilon_1\dot{\xi}, \dot{y}+\varepsilon_2\dot{\eta})dt$$

---

1) 我们也可以不加这些边界积分而在整个积分区域内给被积函数加上散度式.

2) 刚才所考虑的“自由边界”自然是这种问题的一个特例. 例如

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx = \min.,$$

其中 $y(x_0), y(x_1)$ 可为任意的问题, 可以如下叙述: 求一端点在铅垂线 $x=x_0$ 及 $x=x_1$ 上的曲线使以上积分为极小.

当 ε_1 和 ε_2 满足条件 $\Psi(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=0$ 时在 $\varepsilon_1=0,\varepsilon_2=0$ 取定常值. 按照通常极值的理论, 则存在两个常数 λ_0,λ 不都为零, 而使有

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon_1}(\lambda\Psi+\lambda_0\Phi)\bigg|_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0}=0,\ \frac{\partial}{\partial\varepsilon_2}(\lambda\Psi+\lambda_0\Phi)\bigg|_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0}=0.$$

我们设 $\partial T/\partial x$ 和 $\partial T/\partial y$ 在 $t=t_0$ 不都为零, 那么就可以取 $\lambda_0=1$. 因为函数 $x(t),y(t)$ 必须满足欧拉方程, 从一阶变分的表示式我们就发现方程

$$\xi(\lambda T_x-\Im_{\dot{x}})=0,\ \eta(\lambda T_y-\Im_{\dot{y}})=0$$

在 $t=t_0$ 成立. 消去 λ, 我们就得到所谓横交条件

$$\Im_{\dot{x}}T_y-\Im_{\dot{y}}T_x=0. \tag{46}$$

假如终点也在一给定曲线上变动, 当然还必须满足相应的一个边条件.

横交条件是极值线的方向和所给边界曲线的方向之间的一个关系. 它对 T_x 和 T_y 而言是线性的; 因此, 假如极值线的方向已给定, 边界曲线的方向自然是唯一确定的 (逆定理并不一定成立). *对每一条给定的边界曲线而言, 可以造出一单参数的横交极值线族, 为此我们只要通过边界曲线上的每一点画一条欧拉方程的积分曲线, 使它在横交方向出发.*

回到曲线的非齐次表示 $y=f(x)$, 我们得到的横交条件为

$$(F-y'F_{y'})T_y-F_{y'}T_x=0, \tag{47}$$

因为

$$\Im_{\dot{x}}=F-\frac{\dot{y}}{\dot{x}}F_{y'}=F-y'F_{y'};\ \Im_{\dot{y}}=F_{y'}, \tag{48}$$

假如边界曲线给为 $y=g(x)$, 则横交条件变为

$$F+(g'-y')F_{y'}=0.$$

注意当边界曲线的切线在所考虑的点上和 $y-$ 轴平行时, 则后一公式不成立. 在这种情形, 由 (47) 可以看出我们回到了自然边界条件 $F_{y'}=0$.

在决定一条空间曲线 $y=y(x),z=z(x)$, 要它在一给定的曲面 $T(x,y,z)=0$ 上出发, 通过给定的点 (x_1,y_1,z_1) 而使积分 $J=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,z,y',z')dx$ 取定常值的问题中, 情况是非常类似的. 就像前面一样, 我们引进参数表示及 $\Im(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})=\dot{x}F(x,y,z,\dot{y}/\dot{x},\dot{z}/\dot{x})$, 就得到横交条件

$$T_x:T_y:T_x=\Im_{\dot{x}}:\Im_{\dot{y}}:\Im_{\dot{z}}, \tag{49}$$

或者用非齐次的表示, 得条件

$$T_x : T_y : T_z = (F - y'F_{y'} - z'F_{z'}) : F_{y'} : F_{z'}. \tag{50}$$

这些条件同样也为边界曲面 $T = 0$ 上的每一点指定一个 (或多个) 方向; 所以对每一边界曲面我们有一双参数的极值线族. 对每一极值线的方向, 恰好对应着曲面的一个横交方向.

不言而喻, 同样的横交性条件可应用于曲线的终点, 假如它可以在一曲面上变动.

在曲面上的短程线或空间最短曲线的情形, 横交性和正交性一致. 例如当 $F=\sqrt{1+y'^2+z'^2}$ 时横交条件为 $T_x : T_y : T_z = 1 : y' : z'$. 当 $F = \sqrt{e + 2fy' + gy'^2}$ 时我们有

$$T_x : T_y = (e + fy') : (f + gy'),$$

这就是正交的条件.

因此, 假如我们在曲面上从一点 P 画一束短程线, 这一束线和它的正交轨道在横向相交. 令 Q 为任意邻近 P 的点. 当 Q 沿一正交轨道运动时, 由 P 到 Q 的短程线的长是定常的. 因此这个长度是常数, 而正交轨道, 即所谓的短程圆, 为闭曲线.

在第 II 卷中, 我们将详论横交形与极值线之间的关系. 此处仅指出: 在光之传播情况中, 横交形即为光波的波前, 极值线则为光线. 我们所谓的横交形即一曲线或一曲面它处处横交于一族极值线的方向.

4.6　二级变分及勒让德条件

欧拉方程是极值的必要条件. 事实上某一满足给定边条件的极值线只在它满足另外一些必要条件时才能给出真正极值, 这些条件是以不等式的形式出现的. 这些不等式的表述, 以及如何将它们精确化而得出一些充分条件, 乃是经典的变分法中一个重要的部门. 所有这些我们都将在第 II 卷中讨论; 目前我们只叙述一下勒让德的必要性判别法:

若对具有分段连续一级微商的连续比较函数 $\varphi(x)$ 而言, 极值线 $\varphi = u(x)$ 使积分 $J[\varphi] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \varphi, \varphi')dx$ 为极小, 则沿极值线各处皆满足条件

$$F_{\varphi'\varphi'}(x, u, u') \geqslant 0.$$

证明这一点时我们把式子

$$J[\varphi] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \varphi, \varphi')dx$$

按泰勒定理展开:

$$J[\varphi+\varepsilon\eta]=J[\varphi]+\varepsilon J_1[\varphi,\eta]+\frac{1}{2}\varepsilon^2 J_2[\overline{\varphi},\eta].$$

其中

$$J_1[\varphi,\eta]=\int_{x_0}^{x_1}(F_{\varphi}\eta+F_{\varphi'}\eta')dx,$$

$$J_2[\overline{\varphi},\eta]=\int_{x_0}^{x_1}(\overline{F}_{\varphi\varphi}\eta^2+2\overline{F}_{\varphi\varphi'\eta\eta'}+\overline{F}_{\varphi'\varphi'}\eta'^2)dx,$$

式子中的一横表示在 $F_{\varphi\varphi},F_{\varphi\varphi'},F_{\varphi'\varphi'}$ 的表示式中我们用 $\overline{\varphi}=\varphi+\rho\eta,\overline{\varphi'}=\varphi'+\rho\eta'$ 代替变量 φ,φ', 而 ρ 为在 0 和 ε 间的一个数. 因为当 $\varphi=u$ 时 J 取定常值, $J_1[u,\eta]$ 须为零, 而极小的一个必要条件显然是 $J_2[\overline{\varphi},\eta]\geqslant 0$ 对任意选择的 η 皆成立.

假如在 $J_2[\overline{\varphi},\eta]$ 中我们令参数 ε 趋于零, 则 J_2 变为积分

$$J_2[\varphi,\eta]=\int_{x_0}^{x_1}(F_{\varphi\varphi}\eta^2+2F_{\varphi\varphi'}\eta\eta'+F_{\varphi'\varphi'}\eta'^2)dx,$$

这时我们就得到极值线 u 所须满足的必要条件

$$J_2[u,\eta]\geqslant 0.$$

假如我们定义 J 的 "二阶变分"$\delta^2 J$ 为

$$\delta^2 J=\frac{\varepsilon^2}{2}J_2[u,\eta],$$

这条件就变为

$$\delta^2 J\geqslant 0.$$

利用 η 的任意性, 我们就可以从这个积分条件得出上述的勒让德微分条件. 我们选 η 为一特殊的线性函数, 它只在 $x=\alpha$ 这点的邻近不为零, 也就是说, 我们选

$$\eta=\sqrt{\sigma}\left(1+\frac{x-\alpha}{\sigma}\right),\qquad \text{当}\quad \alpha-\sigma\leqslant x\leqslant\alpha,$$

$$\eta=\sqrt{\sigma}\left(1-\frac{x-\alpha}{\sigma}\right),\qquad \text{当}\quad \alpha\leqslant x\leqslant\alpha+\sigma,$$

$$\eta=0,\qquad \text{在其他各处}.$$

这样积分 $J_2[u,\eta]$ 就化为区间 $\alpha-\sigma\leqslant x\leqslant\alpha+\sigma$ 上的一个积分, 在这区间中 $n'^2=1/\sigma$. 现在假如我们令 σ 趋于零, 积分的头两项就趋于零, 至于第三项的极限则为 $2F_{\varphi'\varphi'}$ 在 $x=\alpha$ 的值. 因此这个值必为非负的, 勒让德条件的必要性因此证明.

在多个未知函数 $\varphi, \psi, \cdots$ 的情形相应的勒让德条件为：以

$$\begin{pmatrix} F_{\varphi'\varphi'} & F_{\varphi'\psi'} & \cdots \\ F_{\psi'\varphi'} & F_{\psi'\psi'} & \cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

为系数矩阵的二次型必定取非负值; 也就是说, 这个二次型是正定的.

除带有 $\geqslant$ 号这种形式的勒让德条件外, 我们又常常考虑较强的勒让德条件

$$F_{\varphi'\varphi'} > 0.$$

假如不但对极值线而言这个条件成立, 而且对某给定区域内任意 x 和 u 的值以及完全任意的 u' 的值而言它都成立, 那么我们称它为*强勒让德条件*.

假如在这条件之外, 对一给定区域内所有的 φ 和 x 以及任意的 φ' 更有限制性的不等式

$$F_{\varphi'\varphi'}F_{\varphi\varphi} - F_{\varphi\varphi'}^2 \geqslant 0$$

成立, 则 J_2 的被积函数中的二次型是正定的, 因此在所给区域内的极值线必然给出一极小. 这个简单可是极其粗略的*充分条件*将在第 II 卷中加以精确化.

4.7 带附加条件的变分问题

到此为止, 在我们所研究的问题中变量函数只满足一定的边条件, 此外可任意选取, 变分问题的解则决定于欧拉方程及给定的边条件或自然边条件. 现在我们要来考虑一些问题, 在这些问题中对变量函数还附加有其他的条件; 这些条件是整个变量函数所要满足的, 它们使欧拉方程本身有了很大的更改.

4.7.1 等周问题

一个简单的例子是广义等周问题 (见 4.1.3 小节 (d)): 求一个函数 y, 它取边值 $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$, 满足附加条件

$$K = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')dx = c \qquad (c\text{为常数}) \tag{51}$$

并使积分

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$$

取定常值.

设 $y=y(x)$ 为所要求的极值线. 我们考虑一族邻近曲线 $y+\delta y=y(x)+\varepsilon_1\eta(x)+\varepsilon_2\zeta(x)$, 其中 ε_1 和 ε_2 为参数, $\eta(x)$ 和 $\zeta(x)$ 为任意满足条件 $\eta(x_0)=\eta(x_1)=\zeta(x_0)=\zeta(x_1)=0$ 的函数. 则函数

$$\Phi(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y+\varepsilon_1\eta+\varepsilon_2\zeta,y'+\varepsilon_1\eta'+\varepsilon_2\zeta')dx$$

对所有那些满足下面条件

$$\Psi(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\int_{x_0}^{x_1}G(x,y+\varepsilon_1\eta,+\varepsilon_2\zeta,y'+\varepsilon_1\eta'+\varepsilon_2\zeta')dx=c$$

而且充分小的 ε_1 和 ε_2 的值而言, 必须在 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$ 取定常值. 按照通常极大极小的定理 (见 4.1 节), 有两个不都为零的常数 λ_0 和 λ 存在, 使得

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon_1}[\lambda_0\Phi(\varepsilon_1,\varepsilon_2)+\lambda\Psi(\varepsilon_1,\varepsilon_2)]|_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon_2}[\lambda_0\Phi(\varepsilon_1,\varepsilon_2)+\lambda\Psi(\varepsilon_1,\varepsilon_2)]|_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0}=0.$$

因此我们有

$$\int_{x_0}^{x_1}\{\lambda_0[F]_y+\lambda[G]_y\}\eta dx=0,$$

$$\int_{x_0}^{x_1}\{\lambda_0[F]_y+\lambda[G]_y\}\zeta dx=0.$$

从这两个方程中的第一个, 我们可以断定 λ_0 和 λ 的比不依赖于 ζ. 因为 ζ 是任意的, 由第二个方程可得 $\lambda_0[F]_y+\lambda[G]_y=0$. 假如 $\lambda_0\neq 0$, 也就是说假如方程[1)]

$$(G_{y'})'-G_y=0 \tag{52}$$

不成立, 那么我们可以令 $\lambda_0=1$ 而有

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial(F+\lambda G)}{\partial y'}-\frac{\partial(F+\lambda G)}{\partial y}=0. \tag{53}$$

因此我们的结果是: *除非在方程 (52) 成立的例外情形, 我们可以不管附加条件, 而对参数 λ 的一适当的值作出以 $F^*=F+\lambda G$ 为被积函数的变分问题的欧拉方程, 我们所得到的就是原先变分问题的欧拉方程.*

微分方程 (53) 的一般积分除两个积分常数外还包含参数 λ. 这三个未知量须由这界条件及方程 $K=c$ 来确定.

1) 很容易看出, 当只存在有一个满足给定附加条件的函数时我们就有 (52) 的例外情形.

PDG

一个简单的例子是通常的等周问题, 在这问题中 $F=\sqrt{1+y'^2}, G=y$. 因此我们立刻有

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'}(\sqrt{1+y'^2}+\lambda y)-\frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{1+y'^2}+\lambda y)=0$$

或者

$$\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=\lambda,$$

由此我们可以看出极值线为圆.

另一个例子是关于悬挂在两端点的均匀柔绳平衡位置的问题. 在这里 $F=y\sqrt{1+y'^2}, G=\sqrt{1+y'^2}$; 用 169 页 $F_x=0$ 类型的欧拉方程, 我们得到

$$F^*-y'F^*_{y'}=(y+\lambda)\left(\sqrt{1+y'^2}-\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}\right)=\frac{y+\lambda}{\sqrt{1+y'^2}}=c,$$

$$y+\lambda=c\ \cosh\left(\frac{x}{c}+c_1\right);$$

因此所要求的是一悬链线. 例外情形可以由附加条件 $\int_0^1\sqrt{1+y'^2}dx=1$ 且 $y(0)=y(1)=0$ 来说明. 显然 $y=0$ 是唯一的可取比较函数, 事实上这个函数的确满足方程 (52). 无论 F 是什么, 这时问题的解只能是 $y=0$ [1].

4.7.2 有限附加条件

现在我们要来考虑另一类型的变分问题: 在边界条件 $y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1, z(x_0)=z_0, z(x_1)=z_1$ 之外, 比较函数 $y(x), z(x)$ 还满足附加条件

$$G(x,y,z)=0, \tag{54}$$

要问积分 $J=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,z,y',z')dx$ 何时取定常值. 从几何上来说, 我们是要定出在一给定曲面上的空间曲线 $y(x), z(x)$, 使它给出 J 的极值[2].

求函数 $y(x)$ 和 $z(x)$ 所须满足的必要条件时, 一个很自然的途径是在方程 $G(x,y,z)=0$ 中解出一个函数, 例如解 $z(x)$, 这样就化问题为决定一个独立函数 $y(x)$ 的问题. 按分析中的初等定理, 只要在所求的极值线上 $\partial G/\partial z\neq 0$, 这个解 $z=g(x,y)$ 一定可以求出. 这样我们就可以把 z' 看作 x,y,y' 的函数利用关系 $G_x+y'G_y+z'G_z=0$ 或 $z'=y'\partial g/\partial y+\partial g/\partial x$ 而在 $F(x,y,z,y',z')$ 中把它消去. 因此我们得到

$$F(x,y,z,y',z')=F\left(x,y,g(x,y),y',\frac{\partial g}{\partial x}+y'\frac{\partial g}{\partial y}\right),$$

1) 关于例外情形的研究可参看 C. Carathéodory. Über die diskontinuierlichen Lösungen in der Variationsrechnung. Göttingen, 1904, 45ff.

2) 注意, 坐标 x 是特别分出的, 因此并非在曲面 $G=0$ 上所有的曲线都必须是可取的.

y 必须满足欧拉方程

$$\frac{d}{dx}\left(F_{y'}+F_{z'}\frac{\partial g}{\partial y}\right)-\left[F_{z'}+F_z\frac{\partial g}{\partial y}+F_{z'}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+y'\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)\right]=0,$$

这个式子又很容易化为

$$(F_{y'}-F_y)+(F'_{z'}-F_z)\frac{\partial g}{\partial z}=0.$$

可是因为

$$G_y+G_z\frac{\partial g}{\partial y}=0,$$

必须有比例式

$$(F'_{y'}-F_y):(F'_{z'}-F_z)=G_y:G_z$$

成立. 所以或者是 $G_y=G_z=0$ 沿极值线恒成立 (这和假设矛盾), 或者存在一个比例因子 $\lambda=\lambda(x)$, 对它说来有

$$F'_{y'}-F_y-\lambda G_y=0;\ F'_{z'}-F_z-\lambda G_z=0. \tag{55}$$

假如我们令 $F^*=F+\lambda G$, 则所得结果可写为 F^* 的欧拉方程:

$$-[F^*]_y=F^{*'}_{y'}-F^*_y=0;\quad -[F^*]_z=F^{*'}_{z'}-F^*_z=0.$$

只要方程

$$G_y=0,\quad G_z=0$$

在极值线上不同时成立, 上述方程就是极值的必要条件; 当 $G_y=G_z=0$ 成立时, 则由关系 $G_x+y'G_y+z'G_z=0$ 知有第三个方程 $G_x=0$ 成立.

在这里以及在前面的例子中出现的因子 λ 称为**欧拉或拉格朗日乘子**; 类似的名称在微分学中也用到过. **在本章第 1 和第 2 小节中所讨论的问题之间存在着形式上的相似: 在这两种情形我们都作式子 $F^*=F+\lambda G$, 并立出 F^* 的欧拉方程. 可是在第一种情形 λ 是一个常数, 而在第二种情形它乃是 x 的函数. 所得的欧拉方程再加上附加条件和边界条件供给了决定极值线时所正好需要的那么多个条件.**

刚才所讨论的问题的一个特例是定出一**给定曲面 $G(x,y,z)=0$ 上的短程线**. 在这问题中 $F=\sqrt{1+y'^2+z'^2}$, 对由参数方程 $x=x(t),y=y(t),z=z(t)$ 所表示的短程线我们有

$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}:\frac{d}{dt}\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}:\frac{d}{dt}\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}=G_x:G_y:G_z,$$

或者

$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{x}^2}}-\lambda G_x=0,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}-\lambda G_y=0,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}-\lambda G_z=0.$$

这三个方程, 和第四个方程 $G=0$ 合在一起, 就定出了短程线和乘子 $\lambda(x)$. 这种表示显示出了短程线的一些最重要的几何性质; 例如, 它说明了密切平面通过曲面的法线. 我们把证明留给读者.

4.7.3　微分方程作为附加条件

到现在为止, 乘子 λ 只是用作使方程形式完美的一种手段. 可是假如附加条件取一般的形式

$$G(x,y,z,y',z')=0, \tag{56}$$

其中式子 $G(x,y,z,y',z')$ 不能由另一式子 $H(x,y,z)$ 对 x 微分得出, 也就是说, G 为**一不可积分的微分式**, 那么乘子的运用就是必不可少的. 这样的附加条件也叫做非完整条件. 这种条件的一个简单的例子是 $y'-z=0$. 假如这个条件是完整的, 也就是说, 它和一有限条件 $H(x,y,z)=$ 常数相当, 那么 x,y 和 z 不能在各处独立地取值, 可是对每一组 x,y,z 的值而言, 显然有可能选择 y' 而它满足条件 $y'-z=0$. 在力学中, 当约束方程包含位置坐标同时也包含速度方向时, 就出现非完整条件, 例如在船舶, 溜冰刀和滚球的运动中就是如此.

前面处理过的带附加条件的问题可以看作上述一般性问题的特殊情形. 对本章第 2 小节中的问题说来这是显然的. 可是等周问题也可以归入这一类. 这时候 z 和 z' 在 F 中根本不出现, 而附加条件则取形式 $z'-G(x,y,y')=0$. 边界条件为

$$y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1, z(x_0)=0, z(x_1)=c.$$

通常在积分号下含有高级微商的极小问题也是这个问题的特殊情形. 例如 $\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',y'')dx$ 的极值问题和 $\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',z')dx$ 带附加条件 $z-y'=0$ 的极值问题相当.

在所有这些特殊情形中, 极值的必要条件显然可以如下表述: **假如解答不满足相应于式子 G 的欧拉方程, 则存在一个乘子 $\lambda(x)$, 使得它满足相应于式子 $F^*=F+\lambda G$ 的欧拉方程.**

这个乘子法则对上面叙述的一般性的问题也是成立的. 我们省去证明, 建议读者去看文献[1)].

作为结束语, 应该强调的是假如未知函数和附加条件的个数增多, 我们的方法仍旧适用. 在多个自变数的情形, 我们的结果大概也成立, 虽然在附加条件为偏微分方程的情形还没有一般的证明.

4.8 欧拉方程的不变性

4.8.1 欧拉式作为函数空间的梯度、欧拉式的不变性

在某一点, 函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的定常性是和方程

$$\text{grad } f = 0$$

相当的, 这里 grad f 表示函数的梯度, 它是在 n 维空间以 $f_{x_1} f_{x_2}, \cdots, f_{x_n}$ 为分量的一个矢量. 这个梯度矢量具有以下特性: 假如 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 皆为一参数 t 的可微函数, 则 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为一 t 的函数, 而我们有

$$\dot{f}(t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i f_{x_i} = \mathrm{v} \cdot \text{grad } f, \tag{57}$$

其中一点表示对 t 微分而 v 为以 $\dot{x}_i$ 为分量的 "平移矢量"; 因此函数对 t 的变化率等于平衡矢量 v 和函数的梯度矢量的内积.

因为当而且仅当泛函取定常值时欧拉微分式为零, 我们可以和上述事实类比而把这微分式看作在*函数空间一泛函的梯度*.

例如在泛函为

$$J[\varphi] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \varphi, \varphi')dx$$

的情形, 我们可以假定变量函数 φ 除了依赖于变数 x 外还依赖于一参数 t. 于是 $J[\varphi] = J(t)$ 是一个 t 的函数, 假如无论 t 为何 φ 在区间边界上保持一定的值, 则由一级变分的表示式我们可得

$$\dot{J}(t) = \int_{x_0}^{x_1} \dot{\varphi}(x)[F]_\varphi dx.$$

在这里一点依旧表示对 t 的微分. 这个公式和相应于函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的公式 (57) 是完全类似的. 为了表现这种类似性, 我们称式子 $[F]_\varphi$ 为 $J[\varphi]$ 在函数空间的梯度.

---

1) 参看 D. Hilbert. Zur Variationsrechnung. Math. Ann., Vol. 62, 1906, 351–370. 在参考书中列出的 Bolza 和 Hadamard 的著作中也可以找到详细的讨论.

一般说来, 我们可以定义一泛函 $J[\varphi]$ 的梯度为一式子 $G[\varphi]$, 它有这样的性质, 就是假如我们用依赖于参数 t 及自变数的一族函数来代替 φ, 则关系

$$\frac{d}{dt}J[\varphi] = \int_{x_0}^{x_1} \dot{\varphi}G[\varphi]dx$$

成立.

例如, 如果 $K(x,y) = K(y,x)$, 则式子 $2\int_0^1 K(x,y)\varphi(y)dy$ 乃是泛函 $\int_0^1\int_0^1 K(x,y)\varphi(x)\varphi(y)dxdy$ 的梯度.

一个函数的梯度具有一些熟知的在自变数变换下的不变性质. 我们若引进新自变数而变换被积函数中的变量函数时, 欧拉微分式也具有类似的不变性质 (或者更恰当地说是协变性).

作为一个最简单的情形, 试变换 x 为新变数 $\xi(x)$, 并令

$$F(x,y,y') = F\left(x(\xi), y, \frac{dy/d\xi}{dx/d\xi}\right) = \varPhi\left(\xi, y, \frac{dy}{d\xi}\right),$$

那么 $\int_{x_0}^{x_1} Fdx = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \varPhi\frac{dx}{d\xi}d\xi$. 于是

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1}[F]_y\eta dx &= \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int_{x_0}^{x_1}F(x, y+\varepsilon\eta, y'+\varepsilon\eta')dx|_{\varepsilon=0}\\ &= \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\int_{\xi_0}^{\xi_1}\varPhi\left(\xi, y+\varepsilon\eta, \frac{dy}{d\xi}+\varepsilon\frac{d\eta}{d\xi}\right)\frac{dx}{d\xi}\,d\xi\bigg|_{\varepsilon=0}\\ &= \int_{\xi_0}^{\xi_1}\left[\varPhi\frac{dx}{d\xi}\right]_y\eta d\xi;\end{aligned} \tag{58}$$

因为 η 是任意的 (除了它在边界上须为零之外), 所以我们有

$$[F]_y = \frac{d\xi}{dx}\left[\varPhi\frac{dx}{d\xi}\right]_y. \tag{59}$$

在两个自变数的情形同样我们可得

$$\begin{aligned}F(x,y,u,u_x,u_y) &= F(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta), u, u_\xi\eta_x + u_\eta\eta_x, u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y)\\ &= \varPhi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta);\end{aligned}$$

$$\iint_G Fdxdy = \iint_G \varPhi\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}d\xi d\eta,$$
$$\iint_G [F]_u\zeta dxdy = \iint_G\left[\varPhi\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\right]_u\zeta d\xi d\eta,$$

$$[F]_u = \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\left[\Phi\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\right]_u. \tag{60}$$

在多于两个自变数的情形也有类似的变换性质成立.

由以上公式完美地表示出来的不变性质, 可以给我们很大的实用上的便利. 它使我们在引进新自变数将欧拉微分式作变换时所须作的计算简单化, 因为二阶微商的变换关系不需要明显算出.

4.8.2 Δu 的变换、球坐标

被积函数 $u_x^2+u_y^2+u_z^2$ 是一个重要的例子. 设变换 $x=x(\xi_1,\xi_2,\xi_3), y=y(\xi_1,\xi_2,\xi_3), z=z(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ 把线元素的平方 $dx^2+dy^2+dz^2$ 变为 $\sum\limits_{i,k} g_{ik}d\xi_i d\xi_k$, 其中

$$g_{ik} = \frac{\partial x}{\partial \xi_i}\frac{\partial x}{\partial \xi_k}+\frac{\partial y}{\partial \xi_i}\frac{\partial y}{\partial \xi_k}+\frac{\partial z}{\partial \xi_i}\frac{\partial z}{\partial \xi_k};$$

这些量作成的行列式 $a=|g_{ik}|$ 就是 x,y,z 对 ξ_1,ξ_2,ξ_3 的雅可比行列式的平方. 很容易看出有

$$u_x^2+u_y^2+u_z^2=\sum_{i,k} g^{ik}u_iu_k \quad \left(u_i=\frac{\partial u}{\partial \xi_i}\right),$$

其中 g^{ik} 这些量由下式定义:

$$g^{ik} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x}\frac{\partial \xi_k}{\partial x}+\frac{\partial \xi_i}{\partial y}\frac{\partial \xi_k}{\partial y}+\frac{\partial \xi_i}{\partial z}\frac{\partial \xi_k}{\partial z},$$

它们满足方程

$$\sum_i g_{ik}g^{il}=\delta_{kl},$$

δ_{kl} 为克罗内克尔数: 当 $k\neq l, \delta_{kl}=0, \delta_{kk}=1$.

所以我们就得到下列向曲线坐标 ξ_1,ξ_2,ξ_3 作变换时 Δu 的一般表示式:

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{a}}\sum_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\sqrt{a}\sum_k g^{ik}u_k\right). \tag{61}$$

特别地, 若 $g_{12}=g_{13}=g_{23}=0$, 也就是说, 若新坐标系是正交的 (坐标面 $\xi_1=$ 常数, $\xi_2=$ 常数, $\xi_3=$ 常数正交), 则变换公式变为

$$\Delta u = \frac{\dfrac{\partial}{\partial \xi_1}\left(u_1\sqrt{\dfrac{g_{22}g_{33}}{g_{11}}}\right)+\dfrac{\partial}{\partial \xi_2}\left(u_2\sqrt{\dfrac{g_{33}g_{11}}{g_{22}}}\right)+\dfrac{\partial}{\partial \xi_3}\left(u_3\sqrt{\dfrac{g_{11}g_{22}}{g_{33}}}\right)}{\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}}. \tag{62}$$

例如, 对球坐标 r,θ,φ 有

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta,$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2,$$

在简单的计算之后就有

$$\Delta u = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r \sin\theta) + \frac{\partial}{\partial\theta}(u_\theta \sin\theta) + \frac{\theta}{\theta\varphi} \left(\frac{u_\varphi}{\sin\varphi} \right) \right\}. \tag{63}$$

在只有两个自变数 ξ, η 的情形, 也有相应的公式可以应用. 例如设

$$ds^2 = e d\xi^2 + 2f d\xi d\eta + g d\eta^2,$$

我们就得到 Δu 的不变形式为

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{eg - f^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial\xi} \left(\frac{g u_\xi - f u_\eta}{\sqrt{eg - f^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial\eta} \left(\frac{e u_\eta - f u_\xi}{\sqrt{eg - f^2}} \right) \right\}. \tag{64}$$

特别地, 在极坐标的情形,

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2,\ \Delta u = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r}(r u_r) + \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{u_\varphi}{r} \right) \right\}. \tag{65}$$

4.8.3　椭球坐标[1)]

向椭球坐标的变换也是很重要的. 这些坐标的定义是 s 的三次方程

$$\frac{x^2}{s - e_1} + \frac{y^2}{s - e_2} + \frac{z^2}{s - e_3} = 1 \tag{66}$$

的三个根 ρ, σ, τ, 这里的 e_1, e_2, e_3 为给定实数. 假如 $e_1 > e_2 > e_3$, 对实的 x, y, z 而言这些根都是实的, 我们可适当加以编排而使它们满足不等式

$$\rho \geqslant e_1 \geqslant \sigma \geqslant e_2 \geqslant \tau \geqslant e_3.$$

曲面 $\rho =$ 常数, $\sigma =$ 常数, $\tau =$ 常数依次为椭球面, 单叶双曲面和双叶双曲面. 直角坐标可用椭球坐标表为

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{(\rho - e_1)(\sigma - e_1)(\tau - e_1)}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}, \\ y^2 &= \frac{(\rho - e_2)(\sigma - e_2)(\tau - e_2)}{(e_2 - e_3)(e_2 - e_1)}, \\ z^2 &= \frac{(\rho - e_3)(\sigma - e_3)(\tau - e_3)}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}, \end{aligned} \tag{67}$$

---

1)见 C. G. J. Jacobi: Vorlesungen über Dynamik(1842–1843 在克尼格堡所作讲演, 1866 年, 柏林, A. Clebsch 出版, 1884 年, 柏林, 再版为雅可比全集附件) 第 26 讲, 在此中找到计算细节, 应该强调的是以下讨论立刻可以推广到高于三维的情形.

线元素则为

$$4ds^2 = \frac{(\rho-\sigma)(\rho-\tau)}{(\rho-e_1)(\rho-e_2)(\rho-e_3)}d\rho^2 + \frac{(\sigma-\tau)(\sigma-\rho)}{(\sigma-e_1)(\sigma-e_2)(\sigma-e_3)}d\sigma^2 + \frac{(\tau-\sigma)(\tau-\rho)}{(\tau-e_1)(\tau-e_2)(\tau-e_3)}d\tau^2. \tag{68}$$

这就提示我们引进新变数

$$t_1 = \int^\rho \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}},\ t_2 = \int^\sigma \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}},\ t_3 = \int^\tau \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}},$$

其中 $f(\lambda) = 4(\lambda-e_1)(\lambda-e_2)(\lambda-e_3)$.

设 $e_1+e_2+e_3=0\left(\text{作代换 } s = s' + \frac{1}{3}(e_1+e_2+e_3) \text{ 可以办到这一点}\right)$, 又设取积分的下限为 ∞, 我们就得出

$$\rho = \mathfrak{p}(t_1),\ \sigma = \mathfrak{p}(t_2),\ \tau = \mathfrak{p}(t_3),$$

其中 $\mathfrak{p}$ 为魏尔斯特拉斯[1] $\mathfrak{p}-$ 函数; 此外有

$$ds^2 = (\rho-\sigma)(\rho-\tau)dt_1^2 + (\sigma-\tau)(\sigma-\rho)dt_2^2 + (\tau-\rho)(\tau-\sigma)dt_3^2.$$

对于坐标 t_i 的函数 T 而言, 按 (62) 式我们有

$$\begin{aligned}\Delta T &= \frac{\dfrac{\partial}{\partial t_1}\left((\tau-\sigma)\dfrac{\partial T}{\partial t_1}\right) + \dfrac{\partial}{\partial t_2}\left((\rho-\tau)\dfrac{\partial T}{\partial t_2}\right) + \dfrac{\partial}{\partial t_3}\left((\sigma-\rho)\dfrac{\partial T}{\partial t_3}\right)}{(\sigma-\tau)(\tau-\rho)(\rho-\sigma)} \\ &= \frac{1}{(\rho-\sigma)(\rho-\tau)}\frac{\partial^2 T}{\partial t_1^2} + \frac{1}{(\sigma-\tau)(\sigma-\rho)}\frac{\partial^2 T}{\partial t_2^2} \\ &\quad + \frac{1}{(\tau-\rho)(\tau-\sigma)}\frac{\partial^2 T}{\partial t_3^2}.\end{aligned} \tag{69}$$

引进积分 t_i 的一个好处是直角坐标成了 t_i 的单值函数, 因为在式子

$$\begin{aligned}x &= \frac{\sqrt{\mathfrak{p}(t_1)-e_1}\sqrt{\mathfrak{p}(t_2)-e_1}\sqrt{\mathfrak{p}(t_3)-e_1}}{\sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}} \\ y &= \frac{\sqrt{\mathfrak{p}(t_1)-e_2}\sqrt{\mathfrak{p}(t_2)-e_2}\sqrt{\mathfrak{p}(t_3)-e_2}}{\sqrt{e_2-e_3}\sqrt{e_2-e_1}}\end{aligned} \tag{70}$$

1) 例如可参看 Hurwitz und Courant. Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen. 3rd ed.. Berlin: Springer, 1929, 161–171, New York: Interscience, 1944.

$$z = \frac{\sqrt{\mathfrak{p}(t_1) - e_3}\sqrt{\mathfrak{p}(t_2) - e_3}\sqrt{\mathfrak{p}(t_3) - e_3}}{\sqrt{e_3 - e_1}\sqrt{e_3 - e_2}}$$

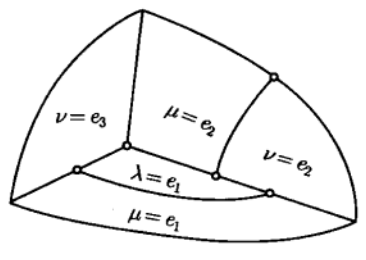


图 1　二次共焦曲面

中分子上的各项当根式的符号确定时是 t_1, t_2, t_3 的单值函数. 当点 (x, y, z) 跑过某一象限, ρ, σ, τ 中的每一个量皆跑过其相应的区间, 当这三个量中的某一个取区间一端的值, 则点 (x, y, z) 位在象限的一边界平面上如图 1 所示. 在这个图中, 我们将诸平面在它们和一椭球 $\rho = \rho_1 > e_1$ 的交线上截断; 里边的两条边界线是

$$\text{“焦椭圆”} \quad \left(x = 0, \frac{y^2}{e_1 - e_2} + \frac{z^2}{e_1 - e_3} = 1\right)$$

和

$$\text{“焦双曲线”} \quad \left(y = 0, \frac{x^2}{e_2 - e_1} + \frac{z^2}{e_2 - e_3} = 1\right)$$

的一部分.

现在设 ω 和 ω' 依次为积分 t_i 的实周期和虚周期, 也就是说, 设

$$\omega = 2\int_{e_1}^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}, \ \omega' = 2\int_{-\infty}^{e_3} \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}},$$

我们可以令 t_1 由 0 变到 $\omega/2, t_2$ 由 $\omega/2$ 变到 $\frac{1}{2}(\omega + \omega')$, t_3 由 $\frac{1}{2}(\omega + \omega')$ 变到 $\frac{1}{2}\omega'$ 而得出某一象限所有的点. 假如每一个 t_i 的区间都加倍, 则所得的点跑过全空间. 假如一个 t_i 的单值函数要在空间也是单值的, 则在所有使 x, y 和 z 不变的 t_i 的代换下它必须保持不变, 例如这个代换可以是用 $\omega - t_1$ 和 $\omega - t_2$ 依次代 t_1 和 t_2.

假如我们写 $t_1 = u, t_2 = \omega/2 + iv, t_3 = \omega'/2 + w, \mathfrak{p}(t_1) = f(u), \mathfrak{p}(t_2) = g(v), \mathfrak{p}(t_3) = h(w)$, 我们可以使 u, v 和 w 为实的. 于是

$$\begin{aligned} ds^2 = &[f(u) - g(v)][f(u) - h(w)]du^2 \\ &+ [f(u) - g(v)][g(v) - h(w)]dv^2 \\ &+ [f(u) - h(w)][g(v) - h(w)]dw^2, \end{aligned} \tag{71}$$

对实的 u, v, w 而言所有的系数皆为非负的, 因为 $f(u) \geqslant e_1 \geqslant g(v) \geqslant e_2 \geqslant h(w) \geqslant e_3$. 在 t_1, t_2, t_3 的对称型中 dt_2 为纯虚数的事实是很重要的; 因为这样 ds^2 的正定性由于 dt_2^2 项系数的负值而得到了保证.

在椭球坐标的退化型中我们可以提一提 (除了也可以看作是退化情形的球坐标之外) 扁球坐标和抛物坐标. 假如 e_i 中有两个 (例如 e_1 和 e_2) 相重, 我们得到

$$\frac{x^2+y^2}{s-e_1}+\frac{z^2}{s-e_3}=1. \tag{72}$$

这个方程的两个根 $s=\lambda_1, s=\lambda_2$ 以及由式子

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\theta,\ r^2=x^2+y^2$$

所定义的 φ 角形成了一组新坐标. 在这里我们有

$$r^2=\frac{(\lambda_1-e_1)(\lambda_2-e_2)}{e_3-e_1},\ z^2=\frac{(\lambda_1-e_3)(\lambda_2-e_3)}{e_1-e_3}, \tag{73}$$

$$\begin{aligned} ds^2&=r^2d\varphi^2+\frac{\lambda_1-\lambda_2}{4(\lambda_1-e_1)(\lambda_1-e_3)}d\lambda_1^2+\frac{\lambda_2-\lambda_1}{4(\lambda_2-e_1)(\lambda_2-e_3)}d\lambda_2^2\\ &=r^2d\varphi^2+(\lambda_1-\lambda_2)(dt_1^2-dt_2^2), \end{aligned} \tag{74}$$

其中

$$t_i=\int^{\lambda i}\frac{d\lambda}{\sqrt{4(\lambda-e_1)(\lambda-e_3)}}. \tag{75}$$

因此

$$\Delta T=\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r(\lambda_1-\lambda_2)}\left[\frac{\partial}{\partial t_1}\left(r\frac{\partial T}{\partial t_1}\right)-\frac{\partial}{\partial t_2}\left(r\frac{\partial T}{\partial t_2}\right)\right]. \tag{76}$$

现在假如我们令椭圆的一端趋于无穷, 在求极限[1)]后就得到抛物面坐标, 它是方程

$$\frac{x^2+y^2}{s-e_1}-2z+s-e_1=0 \tag{77}$$

的两个根 λ_1, λ_2, 这里的 r 和 z 由以下式子给出:

$$r^2=-(\lambda_1-e_1)(\lambda_2-e_1),\ 2z=2e_1-\lambda_1-\lambda_2. \tag{78}$$

这时空间一点的坐标为 λ_1, λ_2 和 φ. 线元素为 (74)

$$\begin{aligned} ds^2&=r^2d\varphi^2+\frac{\lambda_1-\lambda_2}{4(\lambda_1-e_1)}d\lambda_1^2+\frac{\lambda_2-\lambda_1}{4(\lambda_2-e_1)}d\lambda_2^2\\ &=r^2d\varphi^2+(\lambda_1-\lambda_2)(dt_1^2-dt_2^2), \end{aligned}$$

其中

$$t_i=\int^{\lambda i}\frac{d\lambda}{\sqrt{4(\lambda-e_1)}}=\sqrt{\lambda_i-e_1}, \tag{79}$$

1) 当然也可以不牵涉前面的作法而由 (77) 的一组共焦旋转抛物面出发来定义这些坐标.

PDG

微分式 ΔT 则取 (76) 的形式

$$\Delta T = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r(\lambda_1 - \lambda_2)}\left[\frac{\partial}{\partial t_1}\left(r\frac{\partial T}{\partial t_1}\right) - \frac{\partial}{\partial t_2}\left(r\frac{\partial T}{\partial t_2}\right)\right].$$

假如在前面线元素的式子中略去包含 φ 的项, 我们立刻得到在 r, z 平面中的椭圆和抛物线坐标的公式. 在这两种情形由公式 (64) 我们都可以得到

$$\Delta T = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial t_1^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial t_2^2}\right),$$

其中 λ_i 和 t_i 间的关系依次可表为

$$t_i = \int^{\lambda i} \frac{d\lambda}{\sqrt{4(\lambda - e_1)(\lambda - e_3)}}$$

及

$$t_i = \sqrt{\lambda_i - e_1}.$$

4.9 变分问题之变换为正则形和回转形

拉格朗日乘子法可以导向几种变换, 它们无论在理论或实用上都是很重要的. 通过这些变换我们可以立出和所给问题等当的新问题, 所谓等当指的是这些问题的定常条件同时成立. 这个方法首先使我们可以得到原变分问题的一些变换, 这些变换之所以重要是因为它们具有对称性. 此外, 对一给定的以 d 为极小值的极小问题, 我们往往能找到一个和它相当的极大问题, 且以同样的 d 为其极大值; 这种方法在划定 d 的上下界的实际问题中是很有用的[1].

4.9.1 在附加条件下通常极小问题的变换

在讨论上述变换之前, 我们简短地考虑一下通常有限多个变数的极小问题. 我们的讨论是以下述不证自明的原理为基础的: *设满足一定附加条件的函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在 $x_i = \xi_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 这一点取定常值, 又设 ξ_i 这些量满足关系 $r(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) = 0$, 则当我们预先在附加条件之外再另加上条件 $r(x_1, \cdots, x_n) = 0$ 时, f 在 $x_i = \xi_i$ 这点仍旧取定常值.*

我们从考虑以下问题开始:

1) 参看 E. Trefftz. Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren. Verh. d. 2. Int. Zürich: Kongr für Technische Mechanik, 1927, 131, 在该文中第一次给出了这种近似方法, 又可参看 Trefftz. Konvergenz und Fehlerschätzung beim Ritzschen Verfahren. Math. Ann., Vol. 100, 1928, 503–521.

Ⅰ: 在附加条件 $g(x,y)=0$ 下要使 $f(x,y)$ 取定常值; 函数满足通常的连续性和可微性的要求, 此外我们还设在定常点 $g_x^2+g_y^2\neq 0$.由乘子法则, 问题Ⅰ可用以下等当的问题来代替:

Ⅱ: 作为三个变量 x,y,λ 的函数使 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$ 取定常值.

于是 $dF=0$ 的条件和三个方程 $f_x+\lambda g_x=0, f_y+\lambda g_y=0, g=0$ 相当. 假如我们从问题Ⅱ出发, 则由前面的一般原理, 只要外加条件 $g=0$(问题Ⅱ的解自动满足这条件), 我们就可以立刻达到问题Ⅰ.

但是我们所加的附加条件也可以不是 $g=0$, 而是Ⅱ的解所要满足的另外两个方程, 这样我们得出和Ⅱ等当的另一个问题 (所谓等当是指定常性在同一点出现). 这个问题是

Ⅲ. 在附加条件 $f_x+\lambda g_x=0, f_y+\lambda g_y=0$ 下使 $F(x,y,\lambda)=f+\lambda g$ 取定常值.

如果我们假定在定常点的邻近可以从前两个方程中解出 x 和 y 为 λ 的函数, 则 $F(x,y,\lambda)$ 变为 λ 的函数 $\psi(\lambda)$, 而我们得到和其他三个问题等当的问题Ⅳ:

Ⅳ: 使 $\psi(\lambda)$ 取定常值.

现在我们要来研究这些定常点; 它们是否给出了极大或极小呢? 试假定在问题Ⅰ中 (以后称之为问题Ⅰ′)f 在点 $\bar{x},\bar{y}$ 具有真极小 $f(\bar{x},\bar{y})=d$. 然后我们考虑问题:

Ⅱ′: λ 固定,$F(x,y,\lambda)=f+\lambda g=\min.$, 设拉格朗日乘子法定出一 $\bar{\lambda}$, 我们假定在 $\bar{\lambda}$ 的某邻域中任选一点 λ 时, 皆存在 $F(x,y,\lambda)$ 的一真极小, 记作 $d_\lambda=\psi(\lambda)$, 它决定于方程 $f_x+\lambda g_x=0, f_y+\lambda g_y=0$. 那么我们必然有

$$d_\lambda\leqslant d.$$

这是因为以 d 为极小的问题Ⅰ′可由以 d_λ 为极小的问题Ⅱ′附加条件 $g=0$ 而得出, 而这个条件限制了比较值的区域. 此外如果我们假定对 $\bar{\lambda}$ 的邻域中的每一点 λ 而言方程 $f_x+\lambda g_x=0, f_y+\lambda g_y=0$ 皆唯一决定 x 和 y 为 λ 的函数, 则 $d_{\bar{\lambda}}=d$, 而

$$d=\max.(d_\lambda).$$

因此 d 是 $F=f+\lambda g$ 的极小 $\psi(\lambda)$ 的极大, 其中我们对固定的 λ 求极小然后令 λ 变动求极大. 在这些条件下, 我们还可以通过以下问题来刻画 d:

Ⅲ′ 在附加条件 $f_x+\lambda g_x=0, f_y+\lambda g_y=0$ 下使 $F(x,y,\lambda)=f+\lambda g=\max.$.

在条件 $g=2x=0$ 之下使 $f=(x+1)^2+y^2=\min.$ 的问题可以用来说明我们关于极大 - 极小问题的讨论. 从几何上来说, 这问题就是要求抛物面 $z=(x+1)^2+y^2$ 和平面 $x=0$ 所截出的铅垂抛物线的最低点或顶点. 我们立刻可以得出所要求的 $z=(x+1)^2+y^2$ 的最小值为 $d=1$. 现在再注意这样的事实: 对一固定的 λ 而言抛物面 $z=f+\lambda g=(x+\lambda+1)^2+y^2-2\lambda-\lambda^2$ 永远包含上述抛物线, 而且抛物面

的顶点低于抛物线的顶点. 在变动 λ 时我们就变动了抛物面的顶点, 这个顶点最多能移到和抛物线的顶点一样高, 可是再要比它高是不可能的. 因此抛物线的顶点是诸抛线面的顶点中最高的一点.

4.9.2 最简单的一些变分问题的回转变换

变分问题中类似于上述的变换是以下面的一般原理为基础的: 假如泛函 $J[u, v, \cdots]$ 在某一可取的函数组 $u, v, \cdots$ —— 可以要求这些函数满足一定的附加条件 —— 上取定常值, 那么当我们扩大附加条件的集合而使它包含那些已经为函数 $u, v, \cdots$ 所满足的条件时, J 在 $u, v, \cdots$ 这组函数上仍旧取定常值.

我们称使变分为零的必要条件 (例如欧拉方程和自然边界条件) 为自然条件; 事先所加的附加条件和边界条件则称之为约束. 因此由上述原理有: 如果外加一个或多个自然条件于约束的集合而更改一给定泛函的变分问题, 泛函的定常性不受影响.

现在我们转入几个最简单的问题的讨论.

Ⅰ: 在通常的连续性条件, 边界条件

$$u(x_0) - u_0 = 0,\ u(x_1) - u_1 = 0 \tag{80}$$

及附加条件

$$\frac{du}{dx} - u' = 0 \tag{81}$$

下要求 $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u, u')dx$ 取定常值. 也就是说, 在这里我们把变分问题看作一个包含两个未知函数 u 和 u' 的问题, 它们满足约束微分方程 (81). 按照乘子法则, Ⅰ 的解同时是以下问题 Ⅱ 的解:

Ⅱ: 求 $H[u, u', \lambda; \mu_0, \mu_1]$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left[F + \lambda\left(\frac{du}{dx} - u'\right)\right] dx - \mu_0[u(x_0) - u_0] + \mu_1[u(x_1) - u_1]$$

的定常值, 其中 $u(x), u'(x), \lambda(x)$ 和参数 μ_0 和 μ_1 是所要确定的, 此外没有附加条件和边界条件, 也就是说, 问题是自由的. 这问题的变分方程, 也就是欧拉方程及自然边界条件, 乃是

$$F_{u'} - \lambda = 0, \tag{82}$$

$$F_u - \frac{d\lambda}{dx} = 0, \tag{83}$$

$$\frac{du}{dx} - u' = 0 \tag{84}$$

(在区间内), 以及

$$\lambda(x_0)+\mu_0=0,\ \lambda(x_1)+\mu_1=0, \tag{85}$$

$$u(x_0)-u_0=0,\ u(x_1)-u_1=0 \tag{86}$$

(在两端点), 这是令一级变分为零后立刻可以得出的. 假如消去 λ,μ_0,μ_1, 我们就得到欧拉方程.

假如把我们的一般原理应用于问题 II, 即在约束之外附加条件 $du/dx-u'=0, u(x_0)-u_0=0, u(x_1)-u_1=0$, 我们就回到问题 I. 假如另一方面, 我们加上相应于问题 I 的自然条件的方程 (82),(83),(85), 我们得到一个在应用上很重要的变换; 我们称之为*向逆型变分问题的变换*[1]. 我们这样得到的问题为问题III; 假如利用分部积分我们把微商 du/dx 从积分式 H 中除去, 然后引进新变量函数 p,p' 和新被积函数 $\Psi(x,p,p')$ 如下:

$$F_{u'}=p,\ F_u=p',\ pu'+p'u-F=\Psi, \tag{87}$$

我们可以把问题III表为一个第 I 类型的问题.

为了要上面的 "勒让德变换"(87) 有意义, 我们必须要求 u 和 u' 可以由前两个式子求出为 p,p' 和 x 的函数; 然后再把这些函数代入第三式的左端. 假如条件

$$F_{u'u'}F_{uu}-(F_{uu'})^2\neq 0 \tag{88}$$

对基本区域内变数组 x,u,u' 所有的值皆成立, 则上述措施自然是可以实行的. 这样我们就得到以下和 I 等当的 "逆" 问题[2]:

Ⅳ: *在附加条件*

$$\frac{dp}{dx}-p'=0$$

下使积分

$$-\int_{x_0}^{x_1}\Psi(x,p,p')dx+p(x_1)u_1-p(x_0)u_0$$

取定常值; 不加任何边界条件.

问题Ⅳ的自然条件是在区间内

$$\frac{d}{dx}\Psi_{p'}-\Psi_p=0,$$

在边界上

$$\Psi_{p'}|_{x_0}-u_0=0,\ \Psi_{p'}|_{x_1}-u_1=0.$$

1) 这个变换的意义首先是由 K.O. Friedrich 发现的: Ein Verfahren der Variationsrechnung, ···,Nachr. der Ges. d. Wiss., Göttingen, 1929, 13–20.

2) 这可以看作和 4.9.1 小节中问题Ⅳ类似的问题.

从上面这些式子的导出就可以看出它们是和问题 I 的约束一致的; 这一点又可以利用勒让德变换 (87) 的反演

$$\Psi_{p'}=u,\ \Psi_p=u',\ up'+u'p-\Psi=F$$

另作验证.

利用同样的这些公式, 我们可以看出对自由问题Ⅳ应用逆变换就导致原问题Ⅰ. **因此上述变换具有回转性**[1]**, 在变换下一个问题的自然条件变为另一问题的约束.**

变分问题的被积函数不显明依赖于 u 或者只线性依赖于 u 的退化情形, 须分别开另作处理. 这时候我们有

$$F(x,u,u')=g(x,u')+uf(x).$$

在这种情形下, 前面所考虑的勒让德变换不是对任意的 p 和 p' 而言都是可逆的. 可是直接应用我们的变换原则, 就可以发现以下的变分问题是和原问题 I 等当的:

$$-\int_{x_0}^{x_1}\Phi(p)dx+p(x_1)u_1-p(x_0)u_0=\text{定常值},$$

在此附加条件为 $dp/dx=f(x)$. 这里的 p 和 $\Phi(p)$ 和原问题中的式子通过以下变换发生联系:

$$p=g_{u'},\quad -\Phi(p)=g(x,u')-u'p,$$

其中我们假定从方程 $g_{u'}=p$ 可以解出 u' 为 p 的函数. 新问题在下述意义上要比原问题简单得多: 所要求的函数 $p(x)$ 除差一个可加常数 (参数) 外可由附加条件求积得出. 因此, 在这种退化的情形, **变分问题化为通常的极值问题, 这个问题中所要定的是一个参数.**

像在 4.9.1 小节中一样, 现在我们来研究这些变换对泛函的极大或极小性质的影响.

重复 4.9.1 小节中的论据, 我们在下面将得到以下的结果: **假如原问题 I (此后用 I′ 表示) 具有一极小 d, 则同样的 d 值将在相应的逆问题Ⅳ中 (用Ⅳ′ 来表示) 出现为一极大.**

这个事实也只在加一些限制后才是正确的. 我们要求对任意具有分段连续的微商且满足 $\lambda(x_1)+\mu_1=0,\lambda(x_0)+\mu_0=0$[2] 的 $\lambda(x)$ 而言, 4.9.1 小节的问题Ⅱ中的式子 H 具有依赖于 λ 的极小值 d_λ. 这样, 在分部积分去掉 u 的微商后, 我们就得到问题

1) Involutory character.

2) 不加这个条件 (问题的解自然满足这个条件), 自然不可能对任意的 λ,μ 都得到一个极小.

$$
\text{II}': \quad H = \int_{x_0}^{x_1} \left[F + \lambda\left(\frac{du}{dx} - u'\right)\right] dx - \mu_0(u(x_0) - u_0) + \mu_1(u(x_1) - u_1)
$$

$$
= \int_{x_0}^{x_1} \left[F - \frac{d\lambda}{dx}u - \lambda u'\right] dx - \lambda(x_0)u_0 + \lambda(x_1)u_1 = \min.
$$

其中 $\lambda(x)$ 为固定函数. 这个问题的解 $u(x), u'(x)$ 于是满足方程

$$
F_{u'} - \lambda = 0,\ F_u - \frac{d\lambda}{dx} = 0. \tag{89}
$$

按类似于 4.9.1 小节的步骤, 我们假定上面的方程对任意的 λ 和 $d\lambda/dx$ 而言唯一确定了 u 和 u'.

既然问题 I′ 在我们加了附加条件 $du/dx - u' = 0, u(x_0) - u_0 = 0, u(x_1) - u_1 = 0$ 后可从问题 II′ 得出, 我们一定有 $d \geqslant d_\lambda$.

另一方面, 当 $\lambda = \bar{\lambda} = F_{u'}$ 时问题 I′ 的解满足方程 (89), 因此由唯一性的假定, 我们有 $d_{\bar{\lambda}} = d$.

因此有

$$
d = \max d_\lambda.
$$

可是使 d_λ 为极大的问题正好就是问题IV′, 因此我们的论断得证.

判断我们在上面所作的假定是否成立时, 一个充分条件是: 不等式

$$
F_{u'u'}F_{uu} - (F_{uu'})^2 > 0,\ F_{u'u'} > 0 \tag{90}
$$

对所考虑的区域中所有的 u 和 x 以及任意的 u' 皆成立. 在前面我们已经看到, 假如这些不等式成立, 则欧拉方程的解给出问题 I′ 的极小. 问题 II′ 的极小 d_λ 的存在性同样也可以由这些不等式得出; 因为方程 (89) 和不等式 (90) 合在一起就表示对 x 的每一个值而言, H 的被积函数在 u 和 u' 取相应的值时达到极小, 因此, H 本身自然也是极小.

最后我们指出, 逆型变换使极小问题转变为极大问题这一事实, 可在假定 (90) 下直接按下面的推理加以证明, 我们还仍将得到逆型变换. 按不等式 (90), 由泰勒展开我们立刻可以得到不等式

$$
F(u, u') - F(v, v') - (u - v)F_v - (u' - v')F_{v'} \geqslant 0,
$$

其中等式当且仅当 $u = v, u' = v'$ 时成立. 假如我们把上式写为

$$
F(u, u') - [F(v, v') - vF_v - v'F_{v'}] - uF_v - u'F_{v'},
$$

并通过勒让德变换

$$
p = F_{v'},\ p' = F_v,\ \Psi(x, p, p') = vp' + v'p - F
$$

把 v 和 v' 用 p 和 p' 来代换, 则不等式变为

$$F(x,u,u') + \Psi(x,p,p') - up' - u'p \geqslant 0,$$

上式对任意的 u, u' 和 p, p' 皆成立; 而当且仅当 p 和 p' 相应于函数 $v = u, v' = u'$ 时等式成立. 现在我们在上下限 x_0 和 x_1 之间将不等式积分, 认定 u, u', p, p' 为 x 的函数且满足约束条件

$$\frac{du}{dx} - u' = 0,\ \frac{dp}{dx} - p' = 0, \qquad \begin{aligned} u(x_0) - u_0 = 0, \\ u(x_1) - u_1 = 0. \end{aligned}$$

积出的式子的左端当然不能是负的; 当且仅当 u 为问题 I′ 的解而 p 为问题Ⅳ′ 的解时左端等于零. 因此在上面给定的约束下, 问题

$$\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x_1} [F + \Psi - up' - u'p]dx \\ =& \int_{x_0}^{x_1} F dx + \int_{x_0}^{x_1} \Psi dx + u_0 p(x_0) - u_1 p(x_1) = \min . \end{aligned}$$

的解就是上面说的 u 和 p, 极小值则为零. 这个事实就相当于上面所说的问题 I′ 和问题Ⅳ′ 之间的关系.

4.9.3 变分问题向正则形的变换

4.9.2 小节中所叙述的一般原则可导致另一熟知的变换, **向正则形的变换**. 在这变换中, 欧拉二阶微分方程由一组一阶微分方程组来代替. 在 4.9.1 小节中没有和这种变换完全相当的东西. 要得出这变换, 可将方程 (82) 和 (86) 加在问题 II 中作为约束条件. 这样, 我们首先得到问题

II a: 在边界条件 $u(x_0) = u_0, u(x_1) = u_1$ 下求积分

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[F(x,u,u') + F_{u'} \left(\frac{du}{dx} - u' \right) \right] dx$$

的定常值, 其中 u 和 u' 被看作两个独立的变量函数.

假如我们引进新变量函数[1)]

$$p = F_{u'}$$

来代替 u', 并引新被积函数

$$\Phi(x,u,p) = pu' - F(x,u,u')$$

---

1) p 等于 II 中出现的乘子.

来代替 $F(x,u,u')$—— 特别假定

$$F_{u'u'} \neq 0$$

好使 u' 可以从关系 $p=F_{u'}$ 定为 p,u 和 x 的函数 —— 我们就得到和Ⅱa 等当的问题

$$\text{Ⅱb:} \qquad \int_{x_0}^{x_1}\left[p\frac{du}{dx}-\Phi(x,u,p)\right]dx=\text{定常值},$$

其中边界条件为 $u(x_0)=u_0, u(x_1)=u_1$. 很容易看出在等当的问题Ⅰ和Ⅱb 中出现的量通过**勒让德变换**

$$F_{u'}=p,\ pu'-F=\Phi$$

发生联系, 其逆变换可表为

$$\Phi_p=u',\ pu'-\Phi=F.$$

变分问题的这种形式称为**正则形**. 立出 p 和 u 的变分方程我们就有变分问题的**正则微分方程**:

$$\frac{dp}{dx}+\Phi_u=0,\ \frac{du}{dx}-\Phi_p=0.$$

按同样的方式我们可以将包含自变数 x 的 n 个未知函数 $u_1(x).u_2(x),\cdots,u_n(x)$ 的变分问题变换为正则形.

关于极值的性质, 我们省去证明的个别步骤而作这样的叙述: 设在问题Ⅰ中 d 为极小; 则在正则形问题中若固定 p 而令 u 变动求出极小, 然后再变动 p 求极小 (p 的函数) 中的极大, d 就是这个极大.

4.9.4 推广

我们的变换理论很容易推广到包含多个未知函数, 或高级微商, 或多个自变数的问题上去. 在这里, 我们只限于处理一个特别简单的例子, 它相当于 4.9.2 小节中退化的情形. 这就是关于经典的狄利克雷变分问题

$$\text{Ⅰ:} \qquad \frac{1}{2}\iint_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy=\min.$$

的变换, 其中 u 是 x 和 y 的函数, 它在区域 G 内具有分段连续的微商, 在边界上取给定的边值 $\bar{u}=f(s)$. 我们假定 G 的边界 Γ 为一曲线, 它具有连续变动的切线 (除了在有限多个点之外), 它的弧长为 s.

在问题Ⅰ中, 我们用函数 p 和 q 来代替两个偏微商而附加条件 $\partial u/\partial x=p$, $\partial u/\partial y=q$, 则乘子法则立刻导致和Ⅰ等当的问题

$$\text{Ⅱ:} \qquad \iint_G\left[\frac{1}{2}(p^2+q^2)+\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}-p\right)+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}-q\right)\right]dxdy$$

$$-\int_\Gamma \rho(s)[\bar{u}-f(s)]ds = \text{定常值}.$$

这里的 $\lambda(x,y),\mu(x,y),\rho(s)$ 为乘子. 分部积分变换重积分, 我们得到问题 II 以下的形式:

$$\iint_G \left[\frac{1}{2}(p^2+q^2) - u\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{\partial\mu}{\partial y}\right) - \lambda p - \mu q\right] dxdy$$
$$+\int_\Gamma \left[\bar{u}\left(\bar{\lambda}\frac{\partial x}{\partial n}+\bar{\mu}\frac{\partial y}{\partial n}-\rho(s)\right)+\rho(s)f(s)\right] ds = \text{定常值}.$$

这里 $\partial/\partial n$ 表示外法向微商, 边界值则用一横标出如 $(\bar{u},\bar{\lambda},\bar{\mu})$. 现在我们把欧拉方程和一些自然边界条件

$$p-\lambda=0,\ q-\mu=0,$$
$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{\partial\mu}{\partial y}=0,\ \bar{\lambda}\frac{\partial x}{\partial n}+\bar{\mu}\frac{\partial y}{\partial n}-\rho=0$$

加上, 作为明显的附加条件, 这样就得到等当的问题

$$\text{III:}\qquad -\frac{1}{2}\iint_G (p^2+q^2)dxdy + \int_\Gamma \rho(s)f(s)ds = \text{定常值},$$

附加条件在边界上为

$$\rho(s)-\bar{p}\frac{\partial x}{\partial n}-\bar{q}\frac{\partial y}{\partial n}=0,$$

在区域内则为

$$\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}=0.$$

现在我们已完成了逆型变换.

假如引进函数 $v(x,y)$, 令

$$p=\frac{\partial v}{\partial y},\ q=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

而使后一个附加条件得以满足, 我们可以简化所得的结果. 我们有

$$\bar{p}\frac{\partial x}{\partial n}+\bar{q}\frac{\partial y}{\partial n}=\frac{\partial v}{\partial s},$$

其中右端的微商取在 Γ 的正切线方向; 这样我们的问题就化为

$$\text{IV:}\qquad -\frac{1}{2}\iint_G \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] dxdy + \int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial s}f(s)ds = \text{定常值},$$

左边的后一项边界积分最后还可以通过分部积分变换为

$$-\int_\Gamma vf'(s)ds.$$

在这个新问题中, 被积函数和在问题 I 中具有同样的形式. 问题 I 的解决定出一个函数, 它满足势方程 $\Delta u = \partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = 0$ 而以 $f(s)$ 为边值; 问题Ⅳ也定出一个势函数 v, 由于自然边界条件, 它乃是和 u 共轭的势函数.

问题 I 中的极小相应于问题Ⅳ中的极大, 二者的值则相等. 由 I 中减去Ⅳ式就很容易看清楚这一点; 因为作简单的变换后可以得出下面的式子:

$$\iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right] dxdy;$$

问题 I 和Ⅳ合在一起就相当于在边界条件 $\bar{u} = f(s)$ 之下使上面这个积分为极小的问题. 当 u 为前述位势论中边值问题的解而 v 为满足方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

的 u 的共轭函数时, 这个积分达到极小, 而且极小值为零. 因此我们有上述结论. 要知道二次互逆变分问题的较一般而直接的处理, 可参看 4.11 节.

4.10 变分法和数学物理微分方程

4.10.1 一般的讨论

在立出并处理数学物理的微分方程时, 变分法是一个可靠的向导. 一些平衡的问题 (稳定的) 皆满足*极小势能*的变分原理; 运动定律最简单的表述形式则可以通过*哈密顿变分原理*而得到. 从这两个原理, 我们将导出一些数学物理的基本微分方程.

首先试考虑具有有限自由度的系统, 例如 n 个自由度. 设该系统的位置由 n 个参数 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 的值决定; 问题就在于定出这些参数为时间 t 的函数. 我们假定系统的力学性质确定于两个量: 动能和势能. 我们假定*动能* $T(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n, q_1, q_2, \cdots, q_n, t)$ 为 n 个速度 $\dot{q}_i$, n 个坐标 q_i 以及时间 t 的函数; 特别地, 它是速度的二次型

$$T = \sum_{i,k=1}^{n} P_{ik}(q_1, q_2, \cdots, q_n, t)\dot{q}_i\dot{q}_k.$$

势能 $U(q_1, q_2, \cdots, q_n, t)$ 则可假定为 t 和坐标 q_i 的已知函数. 这样, 哈密顿原理的叙述是: *在两个瞬时 t_0 和 t_1 之间, 描写运动的函数 $q_i(t)$ 使得积分*

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (T - U)dt$$

取定常值, 这里的比较函数为在 $q(t)$ 邻近并满足条件 $\bar{q}_i(t_0) = q_i(t_0)$ 及 $\bar{q}_i(t_1) = q_i(t_1)$ 的函数 $\bar{q}_i(t)$. 换句话说是: 真实的运动, 和在同样的时间区间内由系统的初位置达到终位置的各种邻近的虚运动相比较, 使积分 J 取定常值.

按 3, 哈密顿原理立刻导致拉格朗日的一般运动方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i}(T - U) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{91}$$

在 T 和 U 不明显依赖于 t 的假定下, 令 (91) 中对时间的诸微商为零, 我们可以从运动方程得到平衡条件. 所得条件为

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0. \tag{92}$$

因此: 以 $U(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ 为势能的力学系统在坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 取某一组特殊的值时处于平衡, 当且仅当对这一组值而言势能为定常.

此外, 若要平衡是稳定的, 必须而且只须在平衡位置 U 的定常值为一极小.

这个事实很容易从能量守恒律 $T + U =$ 常数得出, 而能量定律又是方程 (91) 的直接后果. 往后我们将承认最小势能原理为判断稳定平衡的条件.

假如限定考虑在稳定平衡位置邻近系统的运动, 那么它具有特别简单的性质. 不丧失一般性, 我们可以假定在上述的平衡位置所有的坐标 q_i 皆为零. 现在假如我们考虑邻近于平衡位置的运动, 对这些运动说来坐标 q_i 及其对时间的微商 $\dot{q}_i$ 的高次方比起低次方来可以略去, 如果我们又假定 T 和 U 不明显包含 t, 那么我们可以把 T 看作是 $\dot{q}_i$ 的正定二次型, 它具有常系数 a_{ik}:

$$T = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k.$$

在这些条件下, U 也是 q_i 的正定二次型, 具有常系数 b_{ik}:

$$U = \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}q_i q_k.$$

因此运动方程变为具有常系数的线性二阶微分方程:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ddot{q}_k + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}q_k = 0,$$

这组方程规定了在稳定平衡位置邻近的 “小振动”, 在下一章中我们将仔细讨论它.

在连续介质力学的问题中, 系统的位置不再可能用有限多个变动来描写, 可是我们也能由哈密顿原理或由最小势能原理出发加以处理. 在这里动能和势能不是有限多个变量的函数, 而是某一空间区域, 某一曲面或曲线上的积分所表示的泛函.

4.10.2 振动的弦和振动的杆

连续介质力学中最简单的例子是一条均匀的振动着的弦, 弦受了不变的张力 μ, 在 $x-$ 轴的区间 $0 \leqslant x \leqslant l$ 上弦的稳定平衡位置邻近做微小的横振动. 我们的问题是要定出弦上任一点离开平衡位置的垂直挠度 $u(x,t)$. 我们假定运动是很"小"的, 这就是说 u 及其微商的高次方比之于低次方来可以略去. 首先, 试考虑弦在其端点为固定的情形, 也就是说 $u(0,t)=u(l,t)=0$. 弦的动能可由积分 $T=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^l \rho u_t^2 dx$ 给出, 其中 ρ 表示弦的线密度. 势能 U 和弦长 (比之于它在静止时的长度) 的增加成正比, 比例常数等于张力 μ. 因为在略去高级的小数量后, 弦长的改变 $\displaystyle\int_0^l \sqrt{1+u_x^2}dx - l$ 近似地等于 $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^l u_x^2 dx$, 所以势能可表为

$$U=\frac{1}{2}\int_0^l \mu u_x^2 dx.$$

所以哈密顿原理引导我们去解一个求可取函数 $u(x,t)$ 的问题, 这个函数要使重积分

$$\int_{t_0}^{t}(T-U)dt=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l(\rho u_t^2-\mu u_x^2)dxdt$$

取定常值, 比较函数为所有具有分段连续一级微商, 在 $x=0$ 及 $x=l$ 两点为零, 在 $t=t_0$ 及 $t=t_1$ 时和相应于真实运动的函数 $u(x,t_0)$ 及 $u(x,t_1)$ 重合的连续函数. 在 ρ 和 μ 为常数时, 由变分法的一般法则我们就得到振动弦的偏微分方程

$$\rho u_{tt}-\mu u_{xx}=0. \tag{93}$$

假如有一外力 $f(x,t)$ 作用在弦上, 则必须在势能上加上一项 $\displaystyle\int_0^l f(x,t)u dx$, 于是我们得到微分方程

$$\rho u_{tt}-\mu u_{xx}+f(x,t)=0. \tag{94}$$

按极小原理, 在外力的作用下弦的稳定平衡位置可由积分 $\displaystyle\int_0^l\left(\frac{1}{2}\mu u_x^2+fu\right)dx$ 的极小给出, 其中自然须假定外力 $f(x)$ 不依赖于时间. 这就导致欧拉方程

$$\mu u_{xx}-f(x)=0,$$

它乃是运动方程 (94) 的特殊情形.

现在我们来对在横向运动的杆立出相应的方程. 所谓的杆可定义为这样的一维的连续体, 在静止时它位于一直线上, 它的变形势能和曲率平方的积分 (积过整个杆的长度) 成正比. 假如我们仍旧假定形变函数 $u(x,t)$ 及其微商的高次方比之于

低次方可以略去, 我们得到变形势能的表示式为 $\frac{1}{2}\mu\int_0^l u_{xx}^2dx$. 动能的形式和弦的一样. 在一外力 $f(x,t)$ 的作用下, 由哈密顿原理得出的运动方程为

$$\rho u_{tt}+\mu u_{xxxx}+f(x,t)=0,$$

在外力 $f(x)$ 作用下的平衡条件则为

$$\mu u_{xxxx}+f(x)=0.$$

在解我们的变分问题时, 所加的边条件或其他约束条件是非常重要的. 例如, 我们可以对弦加上条件 $u(0)=u(l)=0$, 对杆加上条件 $u(0)=u_x(0)=u(l)=u_x(l)=0$ 而使边界点固定, 或者我们也可以让边界自由而不加限制. 对自由边界而言, 5 中的方法引向自然边界条件

$$u_x(0,t)=u_x(l,t)=0\ (\text{对弦}),\tag{95}$$

以及

$$u_{xx}(0,t)=u_{xx}(l,t)=0,\ u_{xxx}(0,t)=u_{xxx}(l,t)=0\ (\text{对杆}).\tag{96}$$

假如弦的端点既不固定也不自由, 而是受一弹性力的作用, 则在势能上须加边界项 $\frac{1}{2}h_1\mu u^2(0,t)$ 和 $\frac{1}{2}h_2\mu u^2(l,t)$. 这些项并不改变运动方程 (94), 可是却引出自然边界条件[1)]

$$u_x(0,t)=h_1u(0,t),\ u_x(l,t)=-h_2u(l,t).$$

4.10.3 膜与板

对平膜与平板说来, 情况是和弦与杆相类似的. 所谓膜乃是曲面的一部分, 它在静止时是一平面, 它的势能和面积的改变成正比; 比例常数就是所谓的张力. 设膜在静止时盖住 x,y 平面上的区域 G; 令 $u(x,y)$ 表示垂直于该平面方向的变形, 又设变形很小, 即 u,u_x,u_y 的高次方比之于低次方可以略去. 于是表示面积的式子 $\iint_G(1+u_x^2+u_y^2)^{\frac{1}{2}}dxdy$ 可以用 $\iint_G\left[1+\frac{1}{2}(u_x^2+u_y^2)\right]dxdy$ 来代替, 而所要求的势能, 除差一个常因子外, 可表为重积分

$$\frac{1}{2}\iint_G(u_x^2+u_y^2)dxdy.\tag{97}$$

首先我们考虑膜的平衡问题. 如果我们假定膜的位移 $u(x,y)$ 在 G 的边界 Γ 上具有预先给定的值 $\bar{u}=\bar{u}(s)$—— 其中 s 表示 Γ 的弧长 —— 而且膜上没有外力的

1) 关于杆进一步的讨论, 见 12.12–13 节.

作用, 则平衡位置决定于以下的变分问题: 在平衡位置下, 位移 $u(x,y)$ 是这样一个函数, 它使积分 $\iint_G(u_x^2+u_y^2)dxdy$ 达到最小值, 在这里所采纳的比较函数 u 是所有在闭区域 G 上连续, 在其边界上取给定的边值 $\bar{u}(s)$, 并在区域内具有连续一阶微商及分段连续二阶微商[1)]的函数. 问题的欧拉方程是

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

因此求平衡位置的问题就相当于以下**边值问题**: 求以上**偏微分方程** (**势方程**)在 G 内的解, 要它在 G 的边界 Γ 上取给定的值.

现在我们作较为一般的假定, 即膜的内部受有面密度为 $f(x,y)$ 的外力, 膜的边界 (假设它可以在 Γ 上自由运动) 上受有一线密度为 $p(s)$ 的外力, 最后还假定膜的边界为一弹性力关于平衡位置, 该弹性力可由线密度为 $\sigma(s)$ 的弹性系数来刻画. 于是在位移 $u(x,y)$ 下膜的势能可表为

$$\iint_G\left[\frac{1}{2}\mu(u_x^2+u_y^2)+fu\right]dxdy+\int_\Gamma\left[p(s)u+\frac{1}{2}\sigma(s)u^2\right]ds.$$

同样, 我们也是求一个函数 $u(x,y)$ 就可以得出平衡位置, 这个函数使积分为一极小, 不受任何边条件的限制而只须满足上述连续性条件. 表示膜内部的平衡条件的欧拉方程是 (设取 $\mu=1$)

$$\Delta u = f(x,y),$$

自然边界条件则为

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u+p(s)=0.$$

这两个要求所表示的也是一个偏微分方程的边值问题.

假如令 p 等于零并令 σ 无限增大, 则从上述的一般情形我们又得到在边值 $u=0$ 之下求解方程 $\Delta u = f$ 的问题.

假如 $\sigma=0$, 一般说来我们的平衡问题没有解. 从物理上看来这是许可的; 因为一张在任意外力的作用下, 可以自由运动的膜, 不可能有稳定的平衡位置, 除非外力正好平衡. 以上事实很容易从变分原理加以证明: 为了要在 $\sigma=0$ 的情形我们的能量式具有下界, 方程

$$\iint_G fdxdy+\int_\Gamma pds=0 \tag{98}$$

必须成立. 事实上, 如果上式的左端不为零, 则对一常数位移 $u(x,y)=c$ 而言, 能量为 (98) 式左端的 c 倍, 因此可以取任意大的负值. 如果我们加上条件 (98), 则平衡或变分问题的解不是唯一确定的, 这是因为可以在 u 上加一任意常数而不改变能

1)往后, 在问题完全的处理中, 很重要的一点是二级微商的连续性条件可以去掉而不影响其解答.

量的值, 因此也不改变它的极小值. 为了使解是唯一的, 我们必须再加上一个条件. 通常习惯于加条件

$$\iint_G u dx dy = 0,$$

这条件的意义是膜的质心固定于一静止的位置.

由哈密顿原理, 我们可得到膜的运动方程, 注意动能可表为

$$T = \frac{1}{2}\rho \iint_G u_t^2 dx dy. \tag{99}$$

假设在膜的内部作用的外力有面密度 $f(x,y,t)$, 在边界上的外力有线密度 $p(s,t)$, 又假设边界上有弹性力的作用, 弹性系数为 $\sigma(s)$, 则哈密顿原理要求式子

$$\int_{t_0}^{t_1} \iint_G \left[\frac{1}{2}\rho u_t^2 - \frac{1}{2}\mu(u_x^2 + u_y^2) - f(x,y,t)u\right] dx dy dt$$
$$- \int_{t_0}^{t_1} \int_\Gamma \left(\frac{1}{2}\sigma u^2 + pu\right) ds dt$$

取定常值. 这个问题的欧拉方程是

$$\mu \Delta u - \rho u_{tt} - f(x,y,t) = 0;$$

自然边界条件是

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma n + p(s,t) = 0. \tag{100}$$

假如膜具有固定的边界, 也就是说, 假如在边界上 u 的值已给定为弧长的函数, 则预先给定的边值将代替条件 (100).

在平衡的情形, 极小原理不但给出了问题适当的表述, 而且还是分析以及解这个问题时有力的工具. 可是在动力学的问题中, 哈密顿原理的主要用处是用它形式地导出微分方程; 在进一步分析研究这些方程时, 哈密顿原理经常是不适用的, 因为它要求可取比较函数在固定的两个瞬时 t_0 和 t_1 取给定值, 这种条件在实际问题中一般不出现. 通常在动力学问题中我们所知道的是边界条件, 此外还有*初条件*, 也就是说在某个瞬时 $t=0$ 函数 $u(x,y,t)$ 和 $u_t(x,y,t)$ 所取的值. 因此动力学问题引出的是边值和初值的混合问题.

在板的情形, 情况是类似的. 一块板乃是一个二维的弹性体, 在平衡时它的形状是平面的, 它的形变势能可表为弯曲后主曲率的一个二次型的积分. 设变形后板的主曲率半径表为 ρ_1, ρ_2, 则势能密度可用式子表为

$$A\left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2}\right) + \frac{2B}{\rho_1 \rho_2},$$

其中 A 和 B 为决定于板的质料的常数. 设 $u, u_x, u_y, \cdots$ 为很小, 我们可以写出

$$\frac{2}{\rho_1}+\frac{2}{\rho_2}=\Delta u=u_{xx}+y_{yy},\ \frac{1}{\rho_1\rho_2}=u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2.$$

这样, 所要求的形变势能可表为

$$U_1=\iint_G[(\Delta u)^2-2(1-\mu)(u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2)]dxdy, \tag{101}$$

在上式中可差一个依赖于板的质料的常因子, 我们令这因子为 1.

在这形变势能上还必须加上相应于表面及边界上外力的能量, 假如边界给定, 则还有相应于边界上弯曲力矩的能量: 这些应该是

$$U_2=\iint_G fudxdy+\int_\Gamma p(s)uds+\int_\Gamma m(s)\frac{\partial u}{\partial n}ds;$$

此处 $f(x,y), p(s), m(s)$ 依次表示作用于面上, 边界上的力以及垂直于边界曲线的弯曲力矩 (事实上, 是它们的密度).

平衡仍旧决定于对某一适当的可取函数 $u(x,y)$ 而言 U_1+U_2 须为的极小这个条件 (这里的可取函数具有直到四级的连续微商, 可是这条件实际上可以大大地放宽而不影响问题的解). 在求我们的极小问题的欧拉方程和自然边界条件时, 我们必须按 4.5 节所简述地那样, 作变分 $\delta U=\delta U_1+\delta U_2$, 然后令它等于零. 我们于是得到

$$\delta U_1=\iint_G(\Delta\Delta u\delta u)dxdy-\int_\Gamma M\delta\frac{\partial u}{\partial n}ds-\int_\Gamma P\delta uds,$$

其中

$$M(u)=-\Delta u+(1-\mu)(u_{xx}x_s^2+2u_{xy}x_sy_s+u_{yy}y_s^2),$$

$$P(u)=\frac{\partial}{\partial n}\Delta u+(1-\mu)\frac{\partial}{\partial s}(u_{xx}x_nx_s+u_{xy}(x_ny_s+x_sy_n)+u_{yy}y_ny_s).$$

式中 x_n, y_n 和 x_s, y_s 依次为外向法线矢量和切线矢量的方向余弦. 由条件 $\delta U=0$, 我们得到平衡条件为欧拉方程

$$\Delta\Delta u+f=0,$$

以及 (因为在边界上没有事先加什么条件) 自然边界条件[1)]

$$P(u)-p=0,\ M(u)-m=0.$$

假如板在边上夹住, 也就是说在边界上给定 u 和 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 的值为零, 则以上自然边

1) 值得注意的是在板的变分问题中由于式子 $u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2$ 是一个散度式, 它不影响欧拉微分方程; 可是对自然边界条件的形式而言, 它有决定性的意义.

界条件须由条件 $u=0, \dfrac{\partial u}{\partial n}=0$ 来代替.假如板的边界被支住, 也就是说, 边界是固定的而在边界上的切平面不受约束, 则边条件为

$$u=0,\ \Delta u-(1-\mu)(x_s^2u_{xx}+y_s^2u_{yy}+2x_sy_su_{xy})=0. \tag{102}$$

立出板的运动微分方程时 (振动板的微分方程), 我们还是用哈密顿原理, 取动能的表示式为 (99). 我们所得的方程是

$$\mu\Delta\Delta u+\rho u_{tt}=0,$$

或者一般说来是

$$\mu\Delta\Delta y+\rho u_{tt}+f(x,y,t)=0,$$

相应各边界条件完全和前面平衡问题中的一样. 为要刻画一实际的物理问题, 在这类边条件之外还须附加初条件, 它们描写出了运动的初状态, 也就是要给定函数 $u(x,y,0)$ 和 $u_t(x,y,0)$.

4.11 互逆二次变分问题[1)]

由二次变分问题可得出数学物理的线性函数方程. 从一个较一般和较抽象的观点 (试和第 1 章 1.5.3 小节比较) 来考虑这类二次问题, 同时运用有启发性的几何语言[2)], 会使我们把问题看得更清楚, 尤其是关于 4.9 节所讨论的互逆性现象.

在线性矢量空间 Λ—— 其中矢量为 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\cdots$—— 中我们考虑一二次型 $Q(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p})$, 我们假设它是正定的. 上述矢量可以是函数或函数组. 例如可考虑

$$Q(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p})=\iint_G \boldsymbol{p}^2dxdy, \tag{1)}$$

1) 这一节是新版中加的.

2) 近来有些作者又重新讨论并改进了 4.9 节中所指出的理论. 见 J. L. Synge. The method of the hypercircle in function-space for boundary value problems. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, Vol. 191, 1941, 447–467; W. Prager and J.L. Synge. Approximations in elasticity based on the concept of function space. Q. App. Math., Vol. 5,1947, 241–269; J. L. Synge. The method of the hypercircle in elasticity when body forces are present. Q. App. Math., Vol. 6, 1948, 15–19 及其中所引文献. Synge 的文章引起人们注意几何解释的好处, 从这种解释可以推出精确解和近似解之间的距离. 此外可参看 J. B. Diaz and H. J. Greenberg. Upper and lower bounds for the solution of the first boundary value problem of elasticity. Q. App. Math.,Vol. 6, 1948, 326–331;H. J. Greenberg. The determination of upper and lower bounds for the solution of the Dirichlet problem. J. Math. Phys., Vol. 27, 1948, 161–182; J. B. Diaz and H. J. Greenberg. Upper and lower bounds for the solution of the first biharmonic boundary value problem. J. Math. Phys., Vol. 27, 1948, 193–201;J. B. Diaz. Upper and lower bounds for quadratic functionals. Proc. of the Symposium on Spectral Theory and Differential Problems, Still water,1951.

其中 $\boldsymbol{p}=\operatorname{grad}\varphi(x,y)$(在一区域 G 上); 或者

$$Q(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p})=\iint_G \boldsymbol{p}^2dxdy, \tag{2)}$$

其中 $\boldsymbol{p}=\Delta\varphi(x,y)$; 或者二次型:

$$Q(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p})=\int_0^1\int_0^1 K(x,y)p(x)p(y)dxdy. \tag{3)}$$

与此相应的诸双线型 $Q(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$ 的定义是很明显的.

我们把 $Q(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p})$ 解释为 $\boldsymbol{p}$ 的长度的平方. 若

$$Q(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})=0,$$

我们就说矢量 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ 正交. 对正交的矢量 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ 说来, 我们有

$$Q(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})=Q(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})=Q(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p})+Q(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})$$

(“直角三角形定理”).

设 $\boldsymbol{\Omega}$ 为矢量空间 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的线性子空间, 我们可以定义另一个和 $\boldsymbol{\Omega}$ 正交的线性子空间 $\boldsymbol{\Sigma}$, $\boldsymbol{\Sigma}$ 乃是和 $\boldsymbol{\Omega}$ 中所有矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 正交的诸矢量 $\boldsymbol{\sigma}$ 所形成的空间:

$$Q(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\sigma})=0.$$

在上面的讨论中有以下事实成立: 假如 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是和 $\boldsymbol{\Omega}$ 正交的线性子空间, 则 $\boldsymbol{\Omega}$ 是和 $\boldsymbol{\Sigma}$ 正交的线性子空间. $\boldsymbol{\Lambda}$ 的每一元素 $\boldsymbol{p}$ 皆可唯一地分解为 “投影”ω 及 σ 的和:

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\sigma}\quad(\boldsymbol{\omega}\text{在}\boldsymbol{\Omega}\text{中},\boldsymbol{\sigma}\text{在}\boldsymbol{\Sigma}\text{中}).$$

假如我们加上适当的连续性和可微性条件而给上述矢量以限制, 则保证变分问题的解存在的定理就保证了上面的分解式成立. 因此, 虽然我们是在一非完备的希尔伯特空间内讨论各种问题, 我们仍假定对这些非完备的空间而言投影定理成立.

现在我们来考虑两个变分问题.

Ⅰ: 给定 Λ 中的两个矢量 $\boldsymbol{p}_0$ 和 $\boldsymbol{q}_0$, 求

$$Q(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p})-2Q(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}_0)$$

的极小, 其中可取的比较矢量是这样的 $\boldsymbol{p}$, 它使得 $\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_0$ 在一预先给定的线性子空间 $\boldsymbol{\Omega}$ 内. 注意两个可取矢量的差属于 $\boldsymbol{\Omega}$, 而 $\boldsymbol{p}$ 本身则限制在一线性集 $\boldsymbol{\Omega}_0$ 之内, $\boldsymbol{\Omega}_0$ 内所包含的是 “平行于” 线性子空间 $\boldsymbol{\Omega}$ 的诸矢量.

作为第一个例子, 令矢量空间 $\boldsymbol{\Lambda}$ 所包含的矢量 $\boldsymbol{p}$ 是定义在区域 G 内的一对函数; $\boldsymbol{p}$ 的范数则给定为

$$Q(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p})=\iint_G \boldsymbol{p}^2 dxdy.$$

取 $\boldsymbol{p}_0=\text{grad}\,\varphi_0$, 其中 φ_0 为一给定函数, 并取 $\boldsymbol{\Omega}$ 为矢量 $\boldsymbol{\omega}=\text{grad}\,\varphi$ 组成的子空间, φ 在 G 的边界 Γ 上满足 $\varphi=0$. 子空间 $\boldsymbol{\Sigma}$, 即 $\boldsymbol{\Omega}$ 的正交补空间, 所包含的是满足 $\text{div}\,\boldsymbol{\sigma}=0$ 的矢量 $\boldsymbol{\sigma}$. 假如我们选 $\boldsymbol{q}_0=0$, 则对这个例子说来问题 I 就是以下的狄利克雷问题: 使积分

$\iint_G(\varphi_x^2+\varphi_y^2)dxdy$ 为极小, 且 φ 在 Γ 上满足边界条件 $\varphi-\varphi_0=0$.

其次, 令矢量空间 $\boldsymbol{\Lambda}$ 所包含的是定义在 G 上的函数 $\boldsymbol{p}$; 其范数则给定为

$$Q(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p})=\iint_G \boldsymbol{p}^2 dxdy.$$

取 $p_0=\Delta\varphi_0$, 其中 φ_0 为一给定函数, 并取 Ω 为函数 $\omega=\Delta\varphi$ 组成的子空间, 其中 φ 及其法向微商在 Γ 上为零. 于是子空间 $\boldsymbol{\Sigma}$ 包含满足 $\Delta\boldsymbol{\sigma}=0$ 的函数 σ. 假如我们选 $q_0=0$, 就得到包含 φ 的, 相应于边缘被夹住的板的变分问题.

设 $\boldsymbol{u}$ 使问题 I 中的泛函为极小. 由于 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{u}+\varepsilon\boldsymbol{\omega}$($\boldsymbol{\omega}$ 为 $\boldsymbol{\Omega}$ 中元素, ε 为任意数) 也是可取的, 故一级变分为零相当于条件

$$Q(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{q}_0,\boldsymbol{\omega})=0\quad \text{对所有}\boldsymbol{\Omega}\text{中的}\boldsymbol{\omega}\text{皆成立}.$$

因此和问题 I 的欧拉方程及相随的自然边界条件等当的事实是 $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{q}_0$ 为 $\boldsymbol{\Omega}$ 的正交补空间 $\boldsymbol{\Sigma}$ 内的元素.

极小化矢量 $\boldsymbol{u}$ 的唯一性现在看来是明显的. 因为假如 $\boldsymbol{u}'$ 也给出一极小, 则我们刚才已经说过 $\boldsymbol{u}'-\boldsymbol{q}_0$ 在 Σ 内; 因此 $(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{q}_0)-(\boldsymbol{u}'-\boldsymbol{q}_0)=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}'$ 是 $\boldsymbol{\Sigma}$ 中的矢量. 可是由可取矢量的条件 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{u}'$ 在 $\boldsymbol{\Omega}_0$ 内, 因此它们的差 $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}'$ 在 $\boldsymbol{\Omega}$ 内. 但子空间 $\boldsymbol{\Omega}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的交中只包含零矢量, 故 $\boldsymbol{u}'=\boldsymbol{u}$.

现在我们可以建立问题 I 的逆问题.

II: 求式子

$$Q(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})-2Q(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}_0)$$

的极小, 可取的比较矢量为所有使 $\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_0$ 在 $\boldsymbol{\Sigma}$ 内之矢量 $\boldsymbol{q}$. 假如当 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{v}$ 时上式达到极小, 则通过和上面类似的推理我们可以断定 $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{p}_0$ 在 $\boldsymbol{\Omega}$ 内.

因为 $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{q}_0$ 在 $\boldsymbol{\Sigma}$ 内而且 $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{q}_0$ 在 $\boldsymbol{\Sigma}$ 内, 故差 $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$ 在 $\boldsymbol{\Sigma}$ 内; 同样, 由问题 I 我们可以看出 $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}$ 在 $\boldsymbol{\Omega}$ 内. 可是因为在这两个正交子空间中只有零矢量是共同的元素, 所以 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}$.

因此问题 I 和 II 有同样的解 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}$.

在问题 I 和 II 的变分式上各加一常数项 $Q(\boldsymbol{q}_0,\boldsymbol{q}_0)$ 和 $Q(\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{p}_0)$, 我们可以把这些问题叙述为:

I：求从一固定矢量 $\boldsymbol{q}_0$ 到线性集 $\boldsymbol{\Omega}_0$ 的最短距离, 也就是说, 在所有 $\boldsymbol{\Omega}_0$ 的矢量中求一个 $\boldsymbol{p}$ 使

$$d(\boldsymbol{p})=Q(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}_0,\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}_0)$$

为极小.

II：求从一固定矢量 $\boldsymbol{p}_0$ 到线性集 Σ_0 的最短距离, 也就是说, 在所有 Σ_0 的矢量中求一个 $\boldsymbol{q}$ 使

$$d(\boldsymbol{q})=Q(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}_0)$$

为极小.

$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{q}=\boldsymbol{u}$ 这同一个解答给出上述两个问题的极小值 d_1 和 d_2.

这两个问题的互逆性表现在这样的事实中：一个问题的可取条件乃是另一问题的欧拉条件.

从几何上来看, 函数 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 可由图 2 来表示.

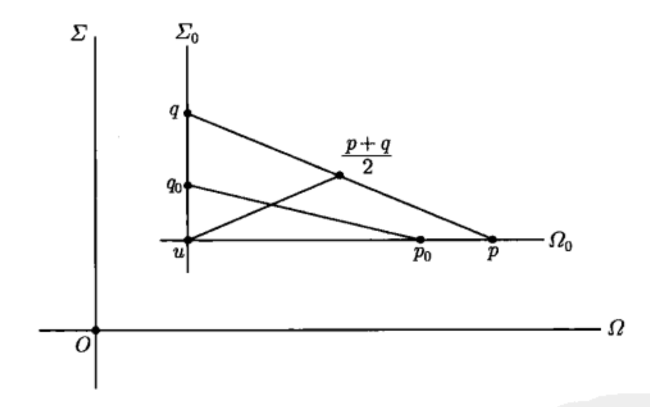


图 2

从这个图以及直角三角形定理可以看出有

$$d_1+d_2=Q(\boldsymbol{p}_0-\boldsymbol{q}_0,\boldsymbol{p}_0-\boldsymbol{q}_0)$$

和

$$Q(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{p},\boldsymbol{u}-\boldsymbol{p})+Q(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{q},\boldsymbol{u}-\boldsymbol{q})\\=4Q\left(\boldsymbol{u}-\frac{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}}{2},\boldsymbol{u}-\frac{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}}{2}\right),$$

其中 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 依次为二互逆问题中可取的任意两个矢量. 这些关系在分析上可以从这样的事实得出, 即 $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{p}$ 在 $\boldsymbol{\Omega}$ 内, $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{q}$ 在 Σ 内; 因此 $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{q}$ 正交, 而且

$$\begin{aligned}&4Q\left(\boldsymbol{u}-\frac{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}}{2},\boldsymbol{u}-\frac{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}}{2}\right)\\=&Q(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{p}+\boldsymbol{u}-\boldsymbol{q},\boldsymbol{u}-\boldsymbol{p}+\boldsymbol{u}-\boldsymbol{q})\\=&Q(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{p},\boldsymbol{u}-\boldsymbol{p})+Q(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{q},\boldsymbol{u}-\boldsymbol{q})\\=&Q(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}).\end{aligned}$$

以上的讨论显示了一个值得注意的事实：由两变分问题中某一个的上界可估出其逆问题的下界, 这是因为二极小值之和事先已知道. 这一个事实在联系到变分的直接方法时是很有用的.

此外, 与直角三角形定理相应的第二个关系[1)]说明：二互逆问题的共同解 $\boldsymbol{u}$ 和该二问题中的任意两个可取函数 $\boldsymbol{p}$ 及 $\boldsymbol{q}$ 的算术平均比较时, 相差的量等于 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 这两个函数间的距离的一半. 因此, 一旦 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 选定, 以 $(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})/2$ 为心 $|(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})/2|$ 为半径作出的球面给出了 $\boldsymbol{u}$ 的几何轨迹.

很容易把特殊的问题 (又可参看 4.12.12) 纳入这一般方案中. 例如在前面我们看到, 在以 Γ 为边界的区域 G 上调和微分方程的狄利克雷问题 (见 4.8 节) 相当于 $Q(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p})=\iint_G \boldsymbol{p}^2dxdy$. $\boldsymbol{p}$ 的空间 Ω_0 按定义为：$\boldsymbol{p}=\mathrm{grad}\ \boldsymbol{\varphi}(x,y)$, 在 Γ 上 $\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\varphi}_0=0, \boldsymbol{p}_0=\mathrm{grad}\ \boldsymbol{\varphi}_0(x,y)$, 其中 $\boldsymbol{\varphi}_0$ 为事先给定的函数. $\boldsymbol{q}$ 的空间 $\Sigma_0=\Sigma$ 可由 $\mathrm{div}\boldsymbol{q}=0, \boldsymbol{q}_0=0$ 来定义. 顺便可以提起注意的是在问题 II 中式子 $Q(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}_0)$ 可变换为边界积分 $\int_\Gamma \varphi_0 q_n ds$, 其中 q_n 是 $\boldsymbol{q}$ 的法向分量.

因此, 我们只要知道所给定的 $\boldsymbol{\varphi}$ 的边值, 就可以建立逆问题 II; 我们不必知道函数 $\boldsymbol{\varphi}_0(x,y)$.

对别的问题也有类似的事实成立, 例如边缘被夹住的板的问题. 在这问题中

$$Q(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p})=\iint_G \boldsymbol{p}^2dxdy,$$

$$\boldsymbol{p}=\Delta\boldsymbol{\varphi},\ \boldsymbol{p}_0=\Delta\boldsymbol{\varphi}_0,\ \Delta\boldsymbol{q}=0,\ \boldsymbol{q}_0=0,$$

并假设 $\varphi-\varphi_0$ 和它的法向微商在 Γ 上为零. 由于

$$Q(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}_0)=\int_\Gamma\left(\varphi_0\frac{\partial\boldsymbol{q}}{\partial\boldsymbol{n}}-\frac{\partial\varphi_0}{\partial n}\boldsymbol{q}\right)ds,$$

其中 $\partial/\partial\boldsymbol{n}$ 表示法向微商, 所以事实上问题 II 只牵涉到给定的 $\boldsymbol{\varphi}$ 和 $\partial\boldsymbol{\varphi}/\partial\boldsymbol{n}$ 的边值.

---

1) 在本问题中这个关系是由 Synge 和 Prager 指出的.

PDG

4.12 补充材料和练习

4.12.1 一给定微分方程的变分问题

对一给定的二阶常微分方程 $y'' = f(x,y,y')$ 说来，我们总能找到一个函数 $F(x,y,y')$ 使得在 $[F]_y = 0$ 中解出 y'' 后所得到的方程和上述微分方程完全一致[1)].

4.12.2 等周问题的可逆性

在条件

$$K=\int_{x_0}^{x_1} G(x,y,y')dx = 常数$$

下问题

$$J=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx = 定常值$$

的极值线和问题 $K=$ 定常值, $J=$ 常数中的极值线等同, 4.7.1 小节中的奇型情况除外.

4.12.3 圆形光线

下面的事实是本章命题的推论. 设光越过 x,y 平面时的速度和 y 成正比; 则由任一点放射出的光线为圆心在 $x-$ 轴上的圆周.

4.12.4 代多问题

"代多问题", 即在一给定长度的篱笆内围出面积最大的一块地来的问题, 可以引进一个权函数 $\rho(x,y)$ 而加以推广, 例如其中 $\rho(x,y)$ 代表土地的肥沃度. 在这个问题中就是要求一具有给定长度的闭曲线, 而使积分 $\iint_G \rho dxdy$ 在积过该曲线所包围的区域时取最大值. 试建立极值线所满足的微分方程.

4.12.5 空间问题的例

包围给定的体积而具有最小面积的曲面是球面[2)].

试考虑以一给定曲线为边界而具有最小面积的曲面, 要求它和以同一曲线为边界的另一给定的曲面共同包围出一给定的体积; 在这时候极值面为平均曲率为常数的曲面. 假如舍去关于体积的附加条件, 我们就得到最小曲面的微分方程 (见 4.3.4 小节), 这方程说明曲面的平均曲率为零.

---

1)见 O. Bolza. Vorlesurgen über Variationsrechnung. Leipzig and Berlin: Teubner, 1909,37–39.
2)见 W. Blaschke. Kreis und Kugel. Leipzig, 1916 中的参考文献.

4.12.6 示性曲线及其应用[1)]

在求积分 $\int_{t_0}^{t_1} \Im(x,y,\dot{x},\dot{y})dt$ 的极值时 (设 $\Im$ 对 $\dot{x},\dot{y}$ 而言为正齐一次的), 我们考虑曲线

$$\Im(x,y,\xi,\eta)=1,$$

当 x,y 固定时, 它代表 ξ,η 平面上的一条曲线. 这条曲线叫做示性曲线; 它使我们能够从几何上来解释许多重要的关系. 对三维问题而言示性曲线变为 ξ,η,ζ 空间中以 $\Im(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)=1$ 为方程的示性曲面.

若 $\Im_{\dot{x}}\delta x+\Im_{\dot{y}}\delta y=0$, 则方向 $(\delta x,\delta y)$ 为 $(\dot{x},\dot{y})$ 的横方向. 可是在 $\dot{x}/\Im,\dot{y}/\Im$ 这点示性曲线的切线方程为

$$\left(\xi-\frac{\dot{x}}{\Im}\right)\Im_{\dot{x}}+\left(\eta-\frac{\dot{y}}{\Im}\right)\Im_{\dot{y}}=0$$

或

$$\xi\Im_{\dot{x}}+\eta\Im_{\dot{y}}=1.$$

因此横方向是示性曲线在它和原点到 $(\dot{x},\dot{y})$ 的射线相交之处的切线方向. 显然, 当且仅当示性曲线和过原点诸直线的交角为直角时, 横截性才和正交性相同, 也就是说, 当且仅当示性曲线是以原点为心的圆时两者才相同. 在这种情形, 由于 $\Im$ 是齐次的. 我们有 $\Im(x,y,\dot{x},\dot{y})=\varphi(x,y)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$. 假如极值线和横截线方向间的关系是对称的, 则过原点而平行于示性曲线在 P 点的切线的直线和示性曲线相交于一点, 在这一点示性曲线的切线平行于 OP.

在研究极值折线时示性曲线特别有用, 所谓极值折线也就是在某点 x_0,y_0 具有棱角 (不连续的斜率) 的极值线. 我们希望知道在什么样的情况下一条由 (x_1,y_1) 引向 (x_0,y_0), 到达 (x_0,y_0) 时的方向为 $(\dot{x}_0^-,\dot{y}_0^-)$, 然后沿另一方向 $(\dot{x}_0^+,\dot{y}_0^+)$ 由 (x_0,y_0) 出发而终止于 (x_2,y_2) 的曲线可以给出极值. 在曲线具有连续转动的切线的区间上, 它必须满足欧拉方程. 为了研究在棱角处的情况, 我们假设极值线是曲线族

$$x(t)+\varepsilon\xi(t),\ y(t)+\varepsilon\eta(t)$$

中的一条, 其中 $\xi(t),\eta(t)$ 是在端点为零的连续可微函数. 我们作一阶变分, 也就是说, 对 ε 微商再令 $\varepsilon=0$. 假如我们分别对两个线段这样求变分, 则除相应于棱角的边界项外所有各项皆为零; 相应于端点的项为零因为端点是固定的, 积分为零因为二线段皆有极值性. 因此, 我们有

$$\xi(t_0)\Im_{\dot{x}}(x_0,y_0,\dot{x}_0^-,\dot{y}_0^-)+\eta(t_0)\Im_{\dot{y}}(x_0,y_0,\dot{x}_0^-,\dot{y}_0^-)$$

1) 参看 C. Carathéodory. Über die starken Maxima und Minima bei einfachen Integralen. Math. Ann., Vol. 62, 1906, 449–503.

$$-\xi(t_0)\Im_{\dot{x}}(x_0,y_0,\dot{x}_0^+,\dot{y}_0^+)-\eta(t_0)\Im_{\dot{y}}(x_0,y_0,\dot{x}_0^+,\dot{y}_0^+)=0,$$

因为 $\xi(t_0)$ 和 $\eta(t_0)$ 是任意的, 就有 "魏尔斯特拉斯 - 埃德曼顶点条件"

$$\Im_{\dot{x}}(x_0,y_0,\dot{x}_0^-,\dot{y}_0^-)=\Im_{\dot{x}}(x_0,y_0,\dot{x}_0^+,\dot{y}_0^+),$$
$$\Im_{\dot{y}}(x_0,y_0,\dot{x}_0^-,\dot{y}_0^-)=\Im_{\dot{y}}(x_0,y_0,\dot{x}_0^+,\dot{y}_0^+).$$

所以在示性曲线和矢量 $(\dot{x}_0^-,\dot{y}_0^-)$ 及 $(\dot{x}_0^+,\dot{y}_0^+)$ 相交的两点上, 示性曲线的二切线重合. 曲线在顶点的两个方向乃是由原点引向示性曲线的重切线上二切点的矢径的方向.

4.12.7 变动的区域

考虑积分

$$J=\int_{x_0}^{x_1}F(x,u,u')dx,$$

其中可变动而依赖于 ε 的不仅是函数 $u(x)$, 而且还有上下限 x_0 和 x_1; 于是积分的一级变分除了通常的那些项外还包含由积分区间的变动而产生的项. 说得确定一些, 一级变分是

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}[F]_u\delta u dx+(F_{u'}\delta u+F\delta x)_{x_0}^{x_1}, \tag{103}$$

其中我们令

$$\delta u=\varepsilon\left(\frac{\partial u(x,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0},\delta x_1=\varepsilon\left(\frac{\partial x_1(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0},\delta x_0=\varepsilon\left(\frac{\partial x_0(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0},$$

$[F]_u$ 则为 F 的欧拉泛函微商.

在二维 (或多维) 的情形, 当积分区域随一参数 ε 变动时, 类似的公式成立. 为了要得出积分

$$J=\iint_G F(x,y,u,u_x,u_y)dxdy$$

的变分, 我们假定依赖于参数 ε 的区域 G^*(用 x^*,y^* 表示坐标) 通过变换

$$x^*=X(x,y;\varepsilon),$$
$$y^*=Y(x,y;\varepsilon) \tag{104}$$

映像为原区域 G. 我们假定这变换是一一对应的和连续可微分的, 且当 $\varepsilon=0$ 时它退化为恒等变换. 我们在 G^* 的点 (x^*,y^*) 上指定新函数值 $u^*=u^*(x^*,y^*;\varepsilon)$, 这个值在旧坐标中则变为

$$u^*=u^*(X(x,y,\varepsilon),Y(x,y,\varepsilon))=U(x,y,\varepsilon). \tag{104a}$$

这样我们原有的函数 $u(x,y)$ 就代表曲面族 $u^*(x^*,y^*;\varepsilon)$ 中相应于 $\varepsilon=0$ 的那个曲面. 该族中每一曲面 (ε 固定) 的参数表示系由方程 (104) 和 (104a) 给出, 其中 x 和 y 为参数.

现在我们作积分

$$J(\varepsilon)=\iint_{G(\varepsilon)}F[x^*,y^*,u^*(x^*,y^*;\varepsilon),u_x^**(x^*,y^*;\varepsilon),u_y^**(x^*,y^*;\varepsilon)]dx^*dy^*,$$

然后引进 x,y 为新自变数而把它变换为对固定区域 G 的积分

$$J(\varepsilon)=\iint_G F[X,Y,u^*(X,Y;\varepsilon),u_x^**(X,Y;\varepsilon),u_y^**(X,Y;\varepsilon)]\frac{\partial(X,Y)}{\partial(x,y)}dxdy.$$

对 ε 求微商就得出一阶变分. 为方便计我们先引进以下符号:

$$\delta x=\varepsilon\left(\frac{\partial X}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0},\ \delta y=\varepsilon\left(\frac{\partial Y}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0},$$
$$\delta u=\varepsilon\left(\frac{\partial U(x,y;\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}=\varepsilon\left(\frac{\partial u^*(X,Y;\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0},$$
$$\delta u_x=\varepsilon\left(\frac{\partial u_x^**(x,y;\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0},\ \delta u_y=\varepsilon\left(\frac{\partial u_y^**(x,y;\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}.$$

于是

$$\begin{aligned}\delta J=\iint_G[&F_x\delta x+F_y\delta y+F_u\delta u+F_{u_x}\delta u_x+F_{u_y}\delta u_y\\&+F(\delta x)_x+F(\delta y)_y]dxdy.\end{aligned}$$

假如不用以上变分而用对固定变量的变分:

$$\bar{\delta}u=\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}u^*(x,y;\varepsilon)\right)_{\varepsilon=0},$$

我们可以把上述积分写成另一形式. 在这里我们以 (x,y) 代替独立变数 (x^*,y^*), 变分 $\bar{\delta}u$(变量是固定的) 和变分 δu(变量随 ε 而改变) 之间的关系则为恒等式

$$\delta u=\bar{\delta}u+u_x\delta x+u_y\delta y. \tag{105}$$

同样我们有

$$\delta u_x=(\bar{\delta}u)_x+u_{xx}\delta x+u_{xy}\delta y,$$
$$\delta u_y=(\bar{\delta}u)_y+u_{yx}\delta x+u_{yy}\delta y.$$

把这些式子引进 δJ 中, 我们就得到

$$\delta J=\iint_G\{[F]_u\bar{\delta}u+(F_{u_x}\bar{\delta}u)_x+(F_{u_y}\bar{\delta}u)_y+(F\delta x)_x+(F\delta y)_y\}dxdy$$

或

$$\delta J = \iint_G [F]_u \bar{\delta} u dx dy + \int_\Gamma \left(F_{u_x} \frac{\partial x}{\partial n} + F_{u_y} \frac{\partial y}{\partial n} \right) \bar{\delta} u ds$$
$$+ \int_\Gamma F \left(\delta x \frac{\partial x}{\partial n} + \delta y \frac{\partial y}{\partial n} \right) ds,$$

其中 n 为外向法线, s 为 G 的边界 Γ 的弧长. 注意在这个公式中, 正如我们猜测的那样, J 的变分已分开为两部分, 一部分是区域固定而 u 改变时所产生的, 另一部分可以认为是由于区域变动而产生的; 区域的变动系由边界点上位移矢量 (和 ε 成正比) 的法向分量表出.

4.12.8 诺特关于不变变分问题的定理、质点力学问题中的积分[1]

我们考虑依赖于连续参变量 α 的一族变换:

$$\begin{aligned} x^* &= X^*(x, y, u; \alpha), \\ y^* &= Y^*(x, y, u; \alpha), \\ u^* &= U^*(x, y, u; \alpha). \end{aligned} \tag{106}$$

我们假定相应于 $\alpha = 0$ 这个值的变换是恒等变换. 相应于每一曲面 $u = u(x, y)$, 上述变换族定出一曲面族 $u^* = u^*(x^*, y^*; \alpha)$, 它依赖于 α, 并具有参数表示

$$\begin{aligned} x^* &= X^*(x, y, u(x, y); \alpha) = X(x, y; \alpha), \\ y^* &= Y^*(x, y, u(x, y); \alpha) = X(x, y; \alpha), \\ u^* &= U^*(x, y, u(x, y); \alpha) = U(x, y; \alpha); \end{aligned}$$

(x, y 为参数).

我们现在假定积分

$$J = \iint_G F(x, y, u, u_x, u_y) dx dy$$

的值在变换 (106) 下保持不变, 也就是说, 对任一区域 G 有

$$J^* = \iint_{G^*} F(x^*, y^*, u^*, u^*_x*, u^*_y*) dx^* dy^* = \iint_G F dx dy,$$

其中 G^* 为当 (x, y) 跑过 G 时点 (x^*, y^*) 所跑过的区域, 这里我们显然有

$$\delta J = \alpha \left(\frac{\partial J^*}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} = 0,$$

1)E. Noether. Invariante Variationsprobleme. Nachr. Ges. Göttingen (math.-phys. Kl.), 1918, 235–257.

因此从上一小节的结果我们就得到

$$
\begin{aligned}
0 = \iint_G \Big\{ & [F]_u \bar{\delta} u + \frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x} \bar{\delta} u) + \frac{\partial}{\partial u}(F_{u_y} \bar{\delta} u) \\
& + \frac{\partial}{\partial x}(F \delta x) + \frac{\partial}{\partial y}(F \delta y) \Big\} dx dy.
\end{aligned} \tag{107}
$$

和前面一样, 这里我们令

$$
\begin{aligned}
\delta x &= \alpha \left(\frac{\partial X^*}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} = \alpha \left(\frac{\partial X}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0}, \\
\delta y &= \alpha \left(\frac{\partial Y^*}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} = \alpha \left(\frac{\partial Y}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0},
\end{aligned} \tag{108}
$$

由 (105) 式, 我们还有

$$
\bar{\delta} u = \alpha \left(\frac{\partial U}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} - (U_x + U_u u_x)_{\alpha=0} \delta x - (U_y + U_u u_y)_{\alpha=0} \delta y. \tag{109}
$$

因为按假设方程 (107) 对任一区域 G 成立, 所以右端的被积函数必须为零, 也就是说, 我们必须有

$$
[F]_u \bar{\delta} u + \frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x} \bar{\delta} u + F \delta x) + \frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y} \bar{\delta} u + F \delta y) = 0.
$$

在多个因变数的情形我们可以得到类似的公式. 例如, 若积分

$$
J = \iint_G F(x, y, u, v, u_x, v_x, u_y, v_y) dx dy
$$

在连续变换

$$
\begin{aligned}
x^* &= X(x, y, u, v; \alpha), \quad y^* = Y(x, y, u, v; \alpha), \\
u^* &= U(x, y, u, v; \alpha), \quad v^* = V(x, y, u, v; \alpha)
\end{aligned}
$$

下不变, 我们就有

$$
\begin{aligned}
& [F]_u \bar{\delta} u + [F]_v \bar{\delta} v + \frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x} \bar{\delta} u + F_{v_x} \bar{\delta} v + F \delta x) \\
& + \frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y} \bar{\delta} u + F_{v_y} \bar{\delta} v + F \delta y) = 0,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\bar{\delta} u = & \alpha \left(\frac{\partial U}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} - (U_x + U_x u_x + U_v v_x)_{\alpha=0} \delta x \\
& - (U_y + U_u u_y + U_v v_y)_{\alpha=0} \delta y,
\end{aligned} \tag{109a}
$$

$$\bar{\delta}v = \alpha\left(\frac{\partial V}{\partial\alpha}\right)_{\alpha=0} - (V_x + V_u u_x + V_v v_x)_{\alpha=0}\delta x - (V_y + V_u u_y + V_v v_y)_{\alpha=0}\delta y.$$

这些结果很容易推广到一个或多于两个自变数的情形. 对一个自变数而言, 可求积得出极值线的一个第一积分:

$$F_{u'}\delta u + F_{v'}\delta v + F\delta x = \alpha \cdot \text{常数}.$$

这里的 $\delta u, \delta v, \delta x$ 为 (108) 和 (109a) 所给出的 x 的函数.

例如, 我们可以对问题 $\int_{x_0}^{x_1} F(u, u')dx = \min.$ 来验证这些结果. 由于被积函数不显含 x, 故积分在连续变换

$$x^* = x + \alpha, \quad u^* = u$$

之下不变. 因此我们对极值线可得积分 $F - u'F_{u'} =$ 常数. 这是我们在 4.4 节已知的结果.

假如积分 J 在一包含 n 个参数的变换族之下保持不变, 我们就可以得到散度形欧拉式的几何独立的线性组合, 因此就得出 n 个线性独立的第一积分.

上述事实可由质点力学问题的积分加以说明. 一质点组中各质点的轨道乃是问题

$$\delta J = \delta\int_{t_0}^{t_1}(T - U)dt = 0$$

的极值线, 其中 $T = \frac{1}{2}\sum m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$, 而势能 U 则只依赖于诸质点间的相对位置, 也就是说, 在整个系统做一转动或移动时它是不变的.

例如在连续变换

$$t^* = t,\ x^* = x + \alpha,\ y^* = y,\ z^* = z$$

$$(\text{也就是 } \delta t = \delta y = \delta z = 0,\ \delta x = \alpha),$$

或者

$$t^* = t,\ x^* = x\cos\alpha + y\sin\alpha,$$

$$y^* = -x\sin\alpha + y\cos\alpha,\ z^* = z,$$

$$(\text{也就是 } \delta t = \delta z = 0,\ \delta x = \alpha\delta y,\ \delta y = -\alpha x)$$

下, 积分是不变的. 因此由上面的讨论, 有

$$T_{\dot{x}} = \sum m\dot{x} = \text{常数},$$

$$yT_{\dot{x}} - xT_{\dot{y}} = \sum m(y\dot{x} - x\dot{y}) = \text{常数}.$$

这些关系和置换 x, y, z 而得出的方程合起来表示出线动量和角动量的守恒.

假如 T 和 U 不显含时间变数 t, 我们可以从积分 $\int_{t_0}^{t_1}(T-U)dt$ 在变换 $t' = t+\alpha, \delta t = \alpha$ 下不变这一事实按同样的方式得出能量积分[1)].

假如积分 J 在含自变数的任意函数 p 及其直到 k 级的微商的变换

$$x^* = X\left(x, y, u, v, p(x,y), \frac{\partial}{\partial x}p(x,y), \cdots, \frac{\partial^k}{\partial y^k}p(x,y)\right)$$

下保持不变, 那么我们就得到诸欧拉式及其直到 k 级全微商的一线性组合, 它恒等于零, 也就是说欧拉方程不是互相独立的.

一个简单的例子是齐次形积分

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \Im(x, y, \dot{x}, \dot{y})dt.$$

当我们用 $t(\tau), x(t(\tau)), y(t(\tau)), dx(t(\tau))/d\tau, dy(t(\tau))/d\tau$ 代替 $t, x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)$ 时积分保持不变. 因此欧拉式 $[\Im]_x, [\Im]_y$ 间有关系

$$\dot{x}[\Im]_x + \dot{y}[\Im]_y = 0.$$

4.12.9 重积分的横交条件

设要求积分

$$\iint_G F(x, y, z, x_u, y_u, z_w, x_v, y_v, z_v)dxdv$$

的极小, 附加条件是曲面 $[x(u,v), y(u,v), z(u,v)]$ 的边界在一给定曲面 $\varphi(x,y,z) = 0$ 上; 把用于曲线的各个步骤作形式的推广我们就会得到边界条件

$$\begin{vmatrix} F_{x_u} & F_{x_v} & \varphi_x \\ F_{y_u} & F_{y_v} & \varphi_y \\ F_{z_u} & F_{z_v} & \varphi_z \end{vmatrix} = 0,$$

只要出现于式中的微商存在而且在边界上足够规则. 不过关于这个条件并未有过严格的分析或证明.

1)详细的讨论见 E. Bessel-Hagen. Über die Erhaltungssätze der Elektrodynamik. Mathematische Annalen, Volume 84, 1921, 258–276.

4.12.10 曲面上的欧拉微分式

设 p,q,r 空间一曲面的参数表示为 $p=p(\xi,\eta), q=q(\xi,\eta), r=r(\xi,\eta)$, 并设在这曲面上的线元素为 $ds^2=ed\xi^2+2fd\xi d\eta+gd\eta^2$, 则表示式

$$Q[u,u]=\frac{gu_\xi^2-2fu_\xi u_\eta+eu_\eta^2}{eg-f^2}$$

与参数的选择无关. 于是相应于面积分

$$\iint_G Q[u,u]\sqrt{eg-f^2}d\xi d\eta$$

的欧拉微分式为

$$\Delta u=\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{gu_\xi-fu_\eta}{\sqrt{eg-f^2}}\right]+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{-fu_\xi+eu_\eta}{\sqrt{eg-f^2}}\right],$$

而

$$\frac{\Delta u}{\sqrt{eg-f^2}}$$

与参数的选择无关.

4.12.11 静电学中的汤姆生原理

令 u,v,w 为一电容器内电场强度的分量, 也就是说空间中以二闭曲面 Γ_1 和 Γ_2 为界的区域 G 中的场. 设该场无源, 也就是

$$u_x+u_y+u_z=0, \tag{110}$$

并设在曲面 Γ_1 和 Γ_2 的电荷分别为 $+Q$ 和 $-Q$:

$$\begin{aligned}&\iint_{\Gamma_1}(ux_n+vy_n+wz_n)ds=Q\\&\iint_{\Gamma_2}(ux_n+vy_n+wz_n)ds=-Q.\end{aligned} \tag{111}$$

于是在静电平衡时, 由积分

$$\frac{1}{2}\iiint_G(u^2+v^2+w^2)dxdydz$$

(可差一常数) 所给出的场的能量必须为极小. 应用拉格朗日乘子法, 令 (110) 和 (111) 的乘子依次为 $\lambda(x,y,z)$ 和 μ_1,μ_2, 我们就得到欧拉方程

$$u=\lambda_x,\quad v=\lambda_y,\quad w=\lambda_z \tag{112}$$

PDG

以及自然边界条件

$$\lambda = \mu_1 = 常数 \quad (在\Gamma_1上)$$

$$\lambda = \mu_2 = 常数 \quad (在\Gamma_2上). \tag{113}$$

所以以 u, v, w 为分量的场矢量是一位势 λ 的梯度, λ 在每一曲面上皆为常数, 并满足位势方程 $\Delta\lambda = 0$. 这个结果不用乘子法也可以得出, 只要把矢量 (u, v, w) 表为另一矢量的旋度, 从而消去附加条件 (110).

4.12.12 弹性体的平衡问题、卡斯泰尔诺沃原理

4.11 节中的理论的另一个例子是：一各向同性弹性体平衡时势能最小的原理和卡斯蒂利亚诺原理相等当的事实. 在建立三维弹性体的平衡条件之前, 我们先回顾一下弹性学的数学理论中的一些基本知识.

假设所讨论的物体在静止时占据 x, y, z 空间的一个区域 G, G 具有分段平滑的边界面 Γ. 假设由于一些力的作用物体发生形变, 由上述静止位置变到一个新的平衡位置, 物体的每一个点 (x, y, z) 都经过一个小位移 (u, v, w). 我们定义应变为

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{11} = u_x,\ \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(u_y + v_x),\ \varepsilon_{13} = \frac{1}{2}(u_z + w_x),\\
&\varepsilon_{21} = \frac{1}{2}(v_x + u_y),\ \varepsilon_{22} = v_y,\ \varepsilon_{23} = \frac{1}{2}(v_z + w_y),\\
&\varepsilon_{31} = \frac{1}{2}(w_x + u_z),\ \varepsilon_{32} = \frac{1}{2}(w_y + v_z),\ \varepsilon_{33} = w_z,
\end{aligned} \tag{114}$$

定义体膨胀为

$$\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}.$$

由于形变而产生的弹性力由应力张量的九个分量给出：

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix},$$

这个张量也是位置的函数并满足对称关系 $S_{12} = S_{21}, S_{23} = S_{32}, S_{31} = S_{13}$.

应变和应力间有一线关系即胡克定律：

$$\begin{aligned}
&S_u = a\varepsilon_{11} + b\varepsilon, && S_{12} = a\varepsilon_{12}, && S_{13} = a\varepsilon_{13},\\
&S_{21} = a\varepsilon_{21}, && S_{22} = a\varepsilon_{22} + b\varepsilon, && S_{23} = a\varepsilon_{23},\\
&S_3 \ = a\varepsilon_{31}, && S_{32} = a\varepsilon_{32}, && S_{33} = a\varepsilon_{33} + b\varepsilon,
\end{aligned} \tag{115}$$

其中 a 和 b 为与物质有关的正的常数.

假设在弹性体的每一点上有一个力 P 作用着, P 的三个分量的密度为 P_1, P_2, P_3 (单位体积上作用的力); 此外, 假定有一表面力 p 作用在物体的表面 Γ 上的每一点, $\boldsymbol{p}$ 的三个分量的面密度为 p_1, p_2, p_3. 于是在物体内部平衡条件为

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial S_{11}}{\partial x}+\frac{\partial S_{21}}{\partial y}+\frac{\partial S_{31}}{\partial z}+P_1=0,\\
&\frac{\partial S_{12}}{\partial x}+\frac{\partial S_{22}}{\partial y}+\frac{\partial S_{32}}{\partial z}+P_2=0,\\
&\frac{\partial S_{13}}{\partial x}+\frac{\partial S_{23}}{\partial y}+\frac{\partial S_{33}}{\partial z}+P_3=0,
\end{aligned}\tag{116}$$

或者用矢量符号写是

$$\mathrm{div}\mathfrak{S}=-P,$$

在边界上的平衡条件则为

$$\begin{aligned}
&S_{11}x_n+S_{21}y_n+S_{31}z_n-p_1=0,\\
&S_{12}x_n+S_{22}y_n+S_{32}z_n-p_2=0,\\
&S_{13}x_n+S_{23}y_n+S_{33}z_n-p_3=0,
\end{aligned}\tag{117}$$

或者用矢量符号写是

$$S_n=p$$

(下标 n 表示 Γ 的外向法线).

现在的问题就是要定出每一点的位移和应力, 假如已知量为: G 中的力 P_1, P_2, P_3, 在边界的一部分 Γ_1 上的表面力 $p_1=\bar{p}_1, p_2=\bar{p}_2, p_3=\bar{p}_3$, 以及在边界的另一部分 Γ_2 上的位移[1)]

$$u=\bar{u},\quad v=\bar{v},\quad w=\bar{w}.\tag{118}$$

平衡状态现在仍旧由最小势能原理确定

Ⅰ: $U[u,v,w]$

$$\begin{aligned}
=&\frac{1}{2}\iiint_G[\varepsilon_{11}S_{11}+2\varepsilon_{12}S_{12}+\varepsilon_{22}S_{22}+2\varepsilon_{23}S_{23}+\varepsilon_{33}S_{33}+2\varepsilon_{31}S_{31}]dxdydz\\
&-\iiint_G(P_1u+P_2v+P_3w)dxdydz\\
&-\iint_{\Gamma_1}(p_1u+p_2v+p_3w)ds.
\end{aligned}$$

1) 也可以给定边界上的法向位移和切向力, 或切向位移和法向力. 无须多说的是无论 Γ_1 或 Γ_2 都可以是整个的边界曲面.

在作这个积分的变分时, 变量函数为位移 u, v, w, 它们在边界 Γ_2 上取给定的值. 应力分量可按照 (115) 式用应变分量 ε 表出; 应变分量则可按关系 (114) 由位移给出.

在 G 内和在边界 Γ_1 上的平衡条件 (116) 和 (117) 不仅作为 U 的变分问题的欧拉方程和自然边界条件得出.

假如我们对最小势能原理应用前面所讨论的互逆变分问题的理论, 我们就可以得出另一变分问题, 所谓“**卡斯蒂利亚诺原理**”这原理要求形变功为最小.

为了按照 4.11 节的理论建立这两个互逆的变分问题, 我们运用矢量符号并引进以下定义: 首先, 我们考虑两个任意的对称张量 $\mathfrak{S}$ 和 ε, 它们之间的关系为上述胡克方程 (115); 假如此外张量 ε 是由一以 u, v, w 为分量的矢量场 $\boldsymbol{s}$ 按关系 (114) 导出, 也就是说, 假如 ε 为形变 $\boldsymbol{s}$ 的应变张量, 我们就说 $\mathfrak{S}$ 满足**协调性条件**, 或 $\mathfrak{S} = \{\boldsymbol{s}\}$. 我们无须明显写出这些条件, 不过它们确定了 $\mathfrak{S}$ 为一形变 $\boldsymbol{s}$ 的应力张量. 利用 (115) 我们可以把表示式 U 中的第一个积分写为

$$\iiint_G \left[a\sum_{i,k}\varepsilon_{ik}^2 + b(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})^2\right]dxdydz,$$

或者用 $\mathfrak{S}$ 来写是 $U = Q(\mathfrak{S}, \mathfrak{S})$, 其中 Q 为一正定二次积分, 把它写出来是

$$Q(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}) = \iiint \frac{1}{a}\left[\sum_{i,k} S_{ik}^2 - \frac{b}{a+3b}(S_{11}+S_{22}+S_{33})^2\right]dxdydz. \tag{119}$$

对这二次型而言以下格林恒等式成立: 若 $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ 为二对称张量, 其中 $\mathfrak{C} = \{\boldsymbol{c}\}$ 为形变 $\boldsymbol{c}$ 的应力张量, 则有

$$Q(\mathfrak{B}, \mathfrak{C}) = -\iiint_G \boldsymbol{c}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{B}\,dxdydz + \iint_\Gamma \boldsymbol{c}\mathfrak{B}_n ds. \tag{120}$$

现在我们考虑张量 $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{S}, \mathfrak{T}$ 等所形成的空间的两个互逆线性子空间 Ω 和 Σ, Ω 包含满足条件

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{D} = 0 \quad (\text{在}G\text{中}), \quad \mathfrak{D}_n = 0 \quad (\text{在}\Gamma_1\text{上})$$

的对称张量 $\mathfrak{D}$, Σ 包含满足条件

$$\mathfrak{Z} = \{\boldsymbol{s}\} \quad (\text{在}G\text{中}), \quad \boldsymbol{s} = 0 \quad (\text{在}\Gamma_2\text{上})$$

的张量 $\mathfrak{Z}$. 由 (120) 可得这两个空间的互逆性.

现在我们考虑二张量 $\mathfrak{S}^0$ 和 $\mathfrak{T}^0$, 它们仅受下述条件限制

$$\mathfrak{S}^0 = \{\boldsymbol{s}^0\} \quad \text{在 } G \text{ 内}, \tag{a}$$

(其中 $\boldsymbol{s}^0$ 为在 Γ_2 满足 $\boldsymbol{s}^0=\boldsymbol{s}$ 的任意应变) 以及

$$\mathrm{div}\mathfrak{T}^0=-\boldsymbol{p}\quad(\text{在 } G \text{ 中}),\quad \mathfrak{T}_n^0=\bar{\boldsymbol{p}}\quad \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上}. \tag{b}$$

此外, 我说称张量 $\mathfrak{S}$ 和 $\mathfrak{T}$ 为可取的, 假如 $\mathfrak{S}-\mathfrak{S}^0$ 在 Σ 内, $\mathfrak{T}-\mathfrak{T}^0$ 在 Ω 内. 这样规定后, 问题

$$\text{I}^*:\qquad Q(\mathfrak{S}-\mathfrak{T}^0,\quad \mathfrak{S}-\mathfrak{T}^0)=\min.$$

$$\text{II}^*:\qquad Q(\mathfrak{T}-\mathfrak{S}^0,\quad \mathfrak{T}-\mathfrak{S}^0)=\min.$$

就在 4.11 节的意义下为互逆的. 利用 (120) 并舍去由数据预先已 (包含 $\mathfrak{S}^0$ 和 $\mathfrak{T}^0$) 知的项, 就得到互逆问题的以下形式:

$$\text{I}:\qquad Q(\mathfrak{S},\mathfrak{S})-2\iiint_G \boldsymbol{sP}dxdydz-2\iint_{\Gamma_1}\boldsymbol{s}\bar{\boldsymbol{p}}ds=\min.$$

这就是原先的最小势能原理, 及

$$\text{II}:\qquad Q(\mathfrak{T},\mathfrak{T})-2\iint_{\Gamma_2}\bar{\boldsymbol{s}}\mathfrak{T}_n ds=\min.$$

这就是卡斯蒂利亚诺最小形变功的原理. 张量 $\mathfrak{T}$ 的法向分量 $\mathfrak{T}_n$ 系由 (117) 表出; 在 G 中的变分条件即协调性条件, 这里没有把它明显写出.

在这两个互逆问题中, 我们又一次看到其中一个的变分条件是另一个的可取条件.

此外可以注意的是在建立问题 I 和 II 时如果只考虑 G 的内部的话, 所有与 $\mathfrak{S}^0$ 和 $\mathfrak{T}^0$ 有关的东西都不出现. 因此表述这些问题时可以不造张量 $\mathfrak{S}^0$ 和 $\mathfrak{T}^0$(而去解一些方程个数未能把解唯一确定的偏微分方程).

用卡斯蒂利亚诺原理来处理有些力学的问题时会比用最小势能原理来得简单. 例如, 在弹性梁的理论中, 类似于卡斯蒂利亚诺的原理可以把问题化为一个通常的极小问题. 这一点可以从下面的事实看出: 我们可以用只包含有限个参数的函数去满足梁的齐次微分方程: 于是把函数空间分为正交子空间就得出只依赖于有限多个参数的空间 Σ_2 而问题 II 则化为一通常的极小问题.

4.12.13 翘曲的变分问题

设一杆其两端受一纵向力 P 的紧压, 它可以处于稳定或不稳定平衡中; 也就是说, 在一微小的横向弯曲后它将回到平衡位置或者 “翘曲” 下去, 这要看 P 的大小是否超过一临界值 P_0, 即 “翘曲力”. 在第一种情形对小变形而言直杆是处在具有最小势能的位置; 在第二种情形则不是如此.

假如在平衡中的杆长度为 l, 以 $u(x)$ 表其横向位移 $(0\leqslant x\leqslant l)$, 则其位能为

—— 可差一质料常数 ——

$$U = \int_0^l (u'')^2 dx - P \int_0^l (u')^2 dx.$$

第一项是弯曲能, 第二项是伸长能 (像弦的情形).

对充分小的 P 值而言, 在边条件 $u(0) = u(l) = 0$ 下 U 的极小值为零[1]. 另一方面, 对充分大的 P 而言, U 可以是负的; 因为对任意可取函数 u 我们只需选

$$P > \frac{\int_0^l (u'')^2 dx}{\int_0^l (u')^2 dx}.$$

翘曲力 P_0, 也就是使 U 的极小值为零的 P 中最大的一个, 显然可以表为

$$\frac{\int_0^l (u'')^2 dx}{\int_0^l (u')^2 dx}$$

的极小, 边界条件则为 $u(0) = u(l) = 0$. 和这相当的事实是 P_0 是当边界条件为 $u(0) = u(l) = 0$ 时在条件

$$\int_0^l (u')^2 dx = 1$$

下

$$\int_0^l (u'')^2 dx$$

的极小值. 这个事实可以这样表述: $P_0 = \lambda$ 是微分方程

$$u'''' + \lambda u'' = 0$$

在边界条件为 $u(0) = u(l) = 0, u''(0) = u''(l) = 0$ 时的第一个本征值. 这类本征值问题以及其变分法的处理将在下两章中来讨论.

---

1)例如, 当 $P < 1/l^2$ 时就是如此, 因为由 $\int_0^l u' dx = 0$ 知存在一点 x_0 使 $u'(x_0) = 0$. 因此

$$u'(x) = \int_{x_0}^x u''(x) dx, \quad (u')^2 \leqslant l \int_0^l (u'')^2 dx, \quad \int_0^l (u')^2 dx \leqslant l^2 \int_0^l (u'')^2 dx.$$

参 考 文 献

关于详细参考文献, 参阅 Lecat 所著以下各书:

Lecat, M: Bibliographie du calcul des variations 1850–1913. Gand, Paris, 1913.

Lecat, M: Bibliographie du calcul des variations depuis les oligines jusqu'a 1850 comprenant la liste des travaux, qui ont préparéce calcul. Gand, Paris, 1916.

教本

这里我们仅提出最重要的:

Bliss, G. A.: Calculus of Variations. Open Court, Chicago, 1924.

Bolza, O.: Vorlesungen über Variationsrechnung. B. G. Teubner, Leipzig and Berlin, 1909.

Hadamard, J.: Lecons sur le calcul des variations, Vol. I. A.Hermann et fils, Paris, 1910.

Kneser, A.: Lehrbuch der Variationsrechnung. F. Vieveg und Sohn, Braunschweig, 1925.

Moigno, M., and Lindelöf, L. L.: Calcul des variations. Mallet-Bachelier, Paris, 1861.

Tonelli, L.: Fondamenti di calcolo delle variazioni, Vols. I and II. N. Zanichelli, Bologna, 1921 and 1923.

Vivanti, G.: Elementi del calcolo delle variazioni. Giuseppe Principato, Messina, 1923.

专刊及散篇论文

下列论文来自 Enzyklopädie der math. Wiss., 1904–1916:

Hellinger, E.: Die allgemeinen Anspätze der Mechanik der Kontinua. Vol. 4D, 601–694.

Kneser, A.: Variationsrechnung, Vol. 2A, 571–625.

Zermelo, E., and Hahn, H.: Weiterentwicrlung der Variationsrechnung in den letzten Jahren, Vol. 2A, 626–641.

百科全书的法文版:

Lecat, M.: Calcul des variations, Tome II, Vol. 6, 1–288.



第 5 章　振动和本征值问题

在第 5 章和第 6 章里我们要讨论数学物理中的线性微分方程的一些重要问题, 特别是那些与振动现象相关的问题, 本征函数方法将始终占中心地位.

5.1　线性微分方程述引

5.1.1　叠加原理

函数 u 和它的直到一定阶数的微商的齐次线性组合

$$L[u] = Au + Bu_x + \cdots + Cu_{xx} + \cdots$$

称为 u 的线性齐次微分式 (或微分算子), 微商的最高阶数称为微分式的阶数, 式子中的系数是自变量的已知函数. 线性微分算子

$$L = A + B(\partial/\partial x) + \cdots + C(\partial^2/\partial x^2) + \cdots$$

满足基本关系

$$L[c_1u_1 + c_2u_2] = c_1L[u_1] + c_2L[u_2], \tag{1}$$

c_1, c_2 是任意常数. 一般的线性微分方程具下述形式:

$$L[u] = f(x, y, \cdots),$$

其中 f 是自变量的已知函数, 若 $f \equiv 0$ 则微分方程称为齐次的, 否则就是非齐次的.

在本章中我们差不多只讨论线性微分算子; 这类算子是线性齐次函数算子的一个特例. 作为其他的例子有积分式

$$\iint_G K(x, y; \xi, \eta)u(\xi, \eta)d\xi d\eta,$$

算子

$$\theta[u] = \frac{2}{h^2\pi}\int_0^{2\pi}\{u(x + h\cos\theta, y + h\sin\theta) - u(x, y)\}d\theta,$$

或差分算子

$$\frac{1}{h^2}\{u(x+h, y) + u(x-h, y) + u(x, y+h) + u(x, y-h) - 4u(x, y)\}.$$

如果假定 u 有直到二阶的连续微商, 则易证最后两式当 $h \to 0$ 时都趋于微分算子 Δu. 令这样一些线性算子的线性组合等于某一已知函数我们就构成一线性函数方

程. 积分、差分和微分方程都属于这一类型. 方程 (1) 表出了算子 $L[u]$ 的线性齐次性.

线性齐次微分方程以及一般的任意线性齐次函数方程的解都具有下述**叠加性**: 如果 u_1, u_2 是方程的两个解, c_1, c_2 是任意常数, 则 $c_1u_1 + c_2u_2$ 也是一个解. 更普遍一点, 我们可以把任意数目的已知特解 $u_1, u_2, \cdots$ 与常数 $c_1, c_2, \cdots$ 组合起来而得一新的解 $c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots$. 由解 $u_1, u_2, \cdots$ 的无穷序列所形成的收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n$ 也代表一个解, 如果微分算子 $L[u]$ 可以逐项地运用到级数上去的话.

如果已知函数方程 $L[u] = 0$ 的一个解 $u(x, y, \cdots; \alpha)$, 解中含参数 α, 则可以构建新的解

$$v = \int w(\alpha) u(x, y, \cdots; \alpha) d\alpha;$$

$w(\alpha)$ 是一个任意函数. 积分区域可以随意选. 唯一的限制是: 积分必须存在, 而且 L 必须可以作用到积分号下去, 在 $w(\alpha)$ 为分段连续, 积分区域为有限的特殊情形下, 上述条件都满足.

如果齐次方程完全解出, 则从非齐次方程的一个解可以得出它所有的解; 因为把这一个解和齐次方程的每一个解相加, 就可以得到非齐次方程所有的解了.

5.1.2 齐次和非齐次问题、边界条件

在我们要考虑的问题中微分方程须和边界条件或初条件一起被满足 (参看第 4 章 4.10 节). 如果边界条件和微分方程都是齐次的, 则问题称为齐次的. 在这种情形中, 如果 u 是一个解而 c 是常数, 则 cu 也是一个解. 齐次边界条件通常包含一些数值间的关系, 这些数值是所求函数 u 和它的导数 $u_x, \cdots$ 在问题中的区域 G 的边界 Γ 上所取的数值. 这一类条件的简单例子为: $u = 0$ 或 $\partial u/\partial n = 0$, 其中 $\partial/\partial n$ 表示外法线方向的微商.

如果给的是线性非齐次的边界条件——例如, 边界值 $u = f$ (不全等于零)——我们可以得出一个与之相抵而含齐次边界条件的问题如下: 假定要处理的是一个线性齐次方程 $L[u] = 0$, 并且边界值 f 可以这样连续地引申到 G 的内部去, 使 $L[f] = g$ 是 G 中的一个连续函数. 那么, 对于新的未知函数 $v = f - u$, 我们就有以 $v = 0$ 为齐次边界条件的微分方程 $L[v] = g$. 反过来, 如果给的是有齐次边界条件的非齐次线性方程, 而且知道这方程的一个特解, 那就可以用减法得到一个齐次方程和非齐次边界条件的问题. 一般言之: **非齐次边界条件的齐次微分方程在实质上和齐次边界条件的非齐次微分方程相抵**[1].

1) 但是要注意, 在第一步将非齐次边界条件问题变为齐次条件问题时, 所作关于连续性和可微性的假定, 在原来的问题中是不必需的.

5.1.3 形式关系、伴随微分式、格林公式

我们将简单地讨论某些形式关系. 特别我们将考虑被积函数是齐次二次式的变分问题所引起的微分式; 这样的微分式称为自伴微分式.

(a) 一个独立变数. 我们来看二次式

$$Q[u,u]=au'^2+2bu'u+du^2,$$

其中 a,b,d 是给定的 x 的函数, $u(x)$ 是变量函数. 在区间 (x_0,x_1) 上积分对称变线式

$$Q[u,v]=au'v'+b(u'v+v'u)+duv,$$

用分部积分消去 v 的导数, 就得到 "格林公式"

$$\int_{x_0}^{x_1}Q[u,v]dx=-\int_{x_0}^{x_1}vL[u]dx+(au'+bu)v\Big|_{x_0}^{x_1} \tag{2}$$

这里面的微分式

$$L[u]=(au')'+(b'-d)u,$$

除差一因子 -2 外, 与被积函数 $Q[u,u]$ 的欧拉微分式相合. 同样, 因为 $Q[u,v]$ 是对称的, 有

$$\int_{x_0}^{x_1}Q[u,v]dx=-\int_{x_0}^{x_1}uL[v]dx+(av'+bv)u\Big|_{x_0}^{x_1} \tag{2a}$$

从 (2) 和 (2a) 我们得到对称的格林公式

$$\int_{x_0}^{x_1}(vL[u]-uL[v])dx=a(u'v-v'u)\Big|_{x_0}^{x_1} \tag{2b}$$

如果起初是一个任意的变线式

$$B[u,v]=au'v'+bu'v+cuv'+duv$$

而不是对称的变线式, 则分部积分后我们得到如下的公式:

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1}B[u,v]dx&=-\int_{x_0}^{x_1}vL[u]dx+(au'+cu)v\Big|_{x_0}^{x_1}\\&=-\int_{x_0}^{x_1}uM[v]dx+(av'+bv)u\Big|_{x_0}^{x_1}\end{aligned} \tag{3}$$

$$\int_{x_0}^{x_1}(vL[u]-uM[v])dx=[a(u'v-v'u)+(c-b)uv]\Big|_{x_0}^{x_1} \tag{4}$$

由于要求 (4) 式左方的积分可以由函数及其微商在边界上的数值来表示, 微分式

$$M[v] = (av')' + (bv)' - cv' - dv$$

就同微分式

$$L[u] = (au')' - bu' + (cu)' - du$$

唯一地相互关系着. 我们称之为彼此互伴. 如果 $L[u]$ 和 $M[u]$ 恒等, 则微分式 $L[u]$ 称为自伴, 它们可从同一个二次式导出 (见上).

微分式 $pu'' + ru' + qu$ 的伴式是 $(pv)'' - (rv)' + qv$. 因此,

$$p' = r$$

是一个微分式自伴的必要和充足条件.

由关系 $a = p, b' - d = q$, 可以用不同的方法构成与 $(pu')' + qu$ 相应的二次形 $Q[u, u]$.

一个任意的线性微分式 $pu'' + ru' + qu$ 可以变换成一个自伴线性微分式: 我们可以乘以一个适当的、不等于零的因子

$$\rho(x) = e^{\int [(r-p')/p]dx},$$

也可以引进一新的独立变数

$$x' = \int e^{-\int [(r-p')/p]dx} dx$$

来代替 x, 或者引进一新的因变数

$$v = ue^{\int [(r-p')/p]dx}$$

来代替 u.

(b) 几个独立变数. 对于线性二阶偏微分方程, 也有类似于公式 (2) 的关系. 被积函数为二次型

$$Q[u, u] = p(u_x^2 + u_y^2) + qu^2$$

的情形是一个重要的例子. 与这二次式相关的变线式是

$$Q[u, v] = p(u_x v_x + u_y v_y) + quv.$$

在边界 Γ 为分段光滑的区域 G 上积分 $Q[u, v]$, 分部积分后就得出格林公式

$$\iint_G Q[u, v]dxdy = -\iint_G vL[u]dxdy + \int_\Gamma pv\frac{\partial u}{\partial n}ds \tag{5}$$

其中

$$L[u] = (pu_x)_x + (pu_y)_y - qu.$$

这里我们假设在闭区域 G 中 v 连续并有分段连续的一阶微商, u 则本身和一阶微商连续而有分段连续的二阶微商. 方程 (5) 中, s 代表弧长, $\partial/\partial n$ 代表外法线方向的微分.

如果 v 同样满足 u 所满足的条件, 我们可以在公式中把 u 和 v 对调, 然后从 (5) 式减去这个式子, 就得到对称的格林公式

$$\iint_G (vL[u]-uL[v])dxdy=\int_\Gamma p\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)ds. \tag{5a}$$

当 $p=1, q=0$ 时, 我们的 —— 自伴 —— 微分式 $L[u]$ 就是位势的拉普拉斯式 Δu, 而公式 (5) 和 (5a) 就是熟知的势论中的格林公式.

同线性常微分方程的情形一样, 任何偏微分式 $L[u]$ 都有一伴式 $M[v]$, 只要 $vL[u]-uM[v]$ 能表为一散度.

5.1.4 线性函数方程——线性方程组的类似和极限情形

任一微分方程总可以看作是一差分方程的极限情形：我们以相应的差商代替每一微商, 而令 h 表差商中独立变数的增量 (所谓网眼宽度). 这样, 微分方程就变成一组线性方程 *, 其中的未知量只是 u 在格子点 $x, y, \cdots$ 上的函数值, 各格子点相互间的距离为 h 的整数倍. 同样, 积分方程和别的函数方程也可以用线性方程组来代替. 在第 II 卷中我们将系统地发挥这一概念, 特别是为了微分方程的数值解法. 这里, 微分方程和差分方程的相类似只是作为一种指导性的原则提出. 它引导我们预期线性微分方程的问题会同线性代数方程的相应问题十分相似 (前者可从后者经极限过程产生). 这一猜测将在很普遍的假设下得到证实.

例如, 在微分方程中也有下述两种情况：如果同一个齐次微分式相应的齐次问题有唯一的解 $u=0$, 则非齐次问题一定有一个, 而且只有一个解.

但是如果齐次问题有一非零解, 则非齐次问题只是在一定的线性条件下才有解, 而且解不是唯一的. 和第 1 章一样, 线性地含一参数 λ 的齐次微分式占有特殊的地位. 我们只注意 λ 的那些使齐次问题有非零解的数值, 这些数值称为问题的本征值, 相应的解称为本征函数.

以差分方程代替连续体物理中的微分方程相当于用一个有限自由度的系统来代替连续介质.

5.2 有限自由度的系统

和第 4 章 4.10 节一样, 我们考虑一个自由度为 n, 由广义坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 所表示的系统; 这系统的动能和势能是下列二次型

* 指代数方程. —— 译者

PDG

$$T = \sum_{h,k=1}^{n} a_{hk}\dot{q}_h\dot{q}_k, \quad U = \sum_{h,k=1}^{n} b_{hk}q_hq_k,$$

a_{hk}, b_{hk} 是常系数.

由动能的物理意义, T 的二次型是正定的. 我们假定 U 也是正定的, 则我们知道稳定平衡在 $q_1 = q_2 = \cdots = q_n = 0$ 时出现. 假使我们指定非零数值给某一些坐标 q_h, 或者给这些 q_h 以非齐次的约束条件, 我们就得一个与原来的静止态 $q_h = 0$ 不同的新的平衡态. 在有限自由度的情形中, 去找约束下的平衡位置的问题在数学表述中并不引进特殊新的东西; 但是当 $n \to \infty$ 时, 这问题就引到典型的偏微分方程的边值问题了.

5.2.1 简正形振动、简正坐标、运动的普遍理论

设所研究的系统的运动遵从微分方程

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{hk}\ddot{q}_k + b_{hk}q_k) = P_h(t) \quad (h = 1, 2, \cdots, n) \tag{6}$$
$$(a_{hk} = a_{kh}, b_{hk} = b_{kh}),$$

函数 $P_h(t)$ 表示作用在系统上的给定的外力的分量. 我们要找这组微分方程的一个解 $q_h(t)$, 它满足预先给定的初位置 $q_h(0)(h = 1, 2, \cdots n)$ 及初速度 $\dot{q}_h(0)(h = 1, 2, \cdots n)$. 如果外力 $P_h(t)$ 都等于零, 则系统的运动或振动称为自由的.

用第 1 章里二次型的理论, 很容易解决这运动的问题. 正定的二次型

$$G = \sum_{h,k=1}^{n} a_{hk}x_hx_k, \quad F = \sum_{h,k=1}^{n} b_{hk}x_hx_k$$

可以用一个适当的线性变换

$$x_h = \sum_{k=1}^{n} \tau_{hk}\xi_k, \quad \xi_h = \sum_{k=1}^{n} \tilde{\tau}_{hk}x_k \tag{7}$$

化为

$$G = \sum_{h=1}^{n} \xi_h^2, \quad F = \sum_{h=1}^{n} \lambda_h\xi_h^2.$$

因为 U 和 T 都是正定的, 所以 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 都是正数. 因之, 用新的所谓简正坐标

$$q_h = \sum_{k=1}^{n} \tau_{hk}\eta_k, \quad \eta_h = \sum_{k=1}^{n} \tilde{\tau}_{hk}q_k \tag{7a}$$

来表示时, 动能和势能就取下面的形式

$$T = \sum_{h=1}^{n} \dot{\eta}_h^2, \quad U = \sum_{h=1}^{n} \lambda_h\eta_h^2;$$

运动方程则为

$$\ddot{\eta}_h + \lambda_h \eta_h = N_h(t),$$

其中

$$N_h(t) = \sum_{l=1}^{n} P_l(t) \tau_{lh}$$

是外力的"简正坐标". 在这些微分方程中, 未知函数 η_h 是分离开的.

把"简正坐标"的名词普遍化常常会很方便, 普遍化的"简正坐标"包括那些使动能和势能取下列形式

$$T = c\sum_{h=1}^{n} \dot{\eta}_h^2, U = \sum_{h=1}^{n} \lambda_h^* \eta_h^2$$

的坐标, 其中 $\lambda_h = \lambda_h^*/c = \nu_h^2$.

对于自由振动, $N_h(t) = 0$, 我们立刻得到下列形式的解:

$$\begin{aligned}\eta_h &= y_h \cos \nu_h (t - \varphi_h) \quad (\nu_h = \sqrt{\lambda_h}) \\ &= a_h \cos \nu_h t + b_h \sin \nu_h t \ (h = 1, 2, \cdots, n).\end{aligned} \tag{8}$$

这里的 a_h, b_h 或 y_h, φ_h 是积分任意常数, 我们把那些除去第 h 个简正坐标为 $\eta_k = y_h \cos \nu_h (t - \varphi_h)$ 之外, 其余的简正坐标都是零的自由运动, 叫作系统的第 h 个**简正形振动**或**本征振动**, **振幅**为 y_h, **位相**为 φ_h. 当我们只说第 h 个简正形振动时, 我们是指函数 $\eta_h = \cos \nu_h t$; 即振幅为 1, 位相为 0 的第 h 个简正形. ν_i 称为系统的**本征频率**, 或**音调**; 后者是从声学中借用来的. 假使在变换式 (7a) 中, 我们以 $\cos \nu_h$ 代 η_h, 令所有其他的 η_i 都为零, 就得到用原来的坐标 q_k 表示的第 h 个简正形.

系统的每一自由运动可以看作是不同振幅及位相的本征振动的叠加. 那 $2n$ 个积分常数 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$, 作为任意参量, 恰够用来调整解答, 使它合于预先给定的初态; 就是说, 得到这样的一个解, 它的坐标取预给的初值及初速度.

为了要把这初值问题的解形式地表示出来, 我们将 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 这些量看作是一个 n 维矢量 $\boldsymbol{q}$ 的分量. 如将分量为 $\tau_{1i}, \tau_{2i}, \cdots, \tau_{ni} (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的矢量表为 e_i, 则由 (7a) 和 (8), 有

$$\boldsymbol{q}(t) = \sum_{i=1}^{n} e_i y_i \cos \nu_i (t - \varphi).$$

从这代表一般的自由运动的表达式, 立刻可得关系

$$\begin{aligned}\boldsymbol{q}(0) &= \sum_{i=1}^{n} e_i y_i \cos(\nu_i \varphi_i) \\ \dot{\boldsymbol{q}}(0) &= \sum_{i=1}^{n} e_i y_i \nu_i \sin(\nu_i \varphi_i),\end{aligned} \tag{9}$$

其中矢量 $\boldsymbol{q}(0), \dot{\boldsymbol{q}}(0)$ 描写给定的初态.

如果为简单起见, 我们假设 T 已是公式 $T=\sum_{i=1}^{n}\dot{\boldsymbol{q}}_i^2$ 而 e_i 这些"本征矢量"组成一完整的正交矢量系 (参看第 2 章 2.1 节); 则以 e_h 乘 (9), 得关系

$$e_h\boldsymbol{q}(0)=y_h\cos(\nu_h\varphi_h)$$
$$e_h\dot{\boldsymbol{q}}(0)=\nu_h y_h\sin(\nu_h\varphi_h),$$

由此立刻可以定出振幅 y_h 和位相 φ_h.

注意, 本征振动可以定义为系统的这样一种运动: 坐标 q_k 之间的比例与时间无关; 换言之, 即 $q_k=v_k g(t)$, v_k 与时间无关. 把 q_k 的这些表达式代入方程 (6), 令 $P_i=0$, 我们得到方程

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} b_{ik}v_k}{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}v_k}=-\frac{\ddot{g}(t)}{g(t)}.$$

从这里可以看出式子的右端是一个与 i 和 t 无关的常数, 令这常数为 λ, 我们立刻得到表述 G 和 F 的本征值问题的方程

$$\sum_{k=1}^{n}(b_{ik}-\lambda a_{ik})v_k=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n),$$

于是, 这和前面根据变换 (7a) 的说法之间的联系也就清楚了.

我们现在来看*受迫运动*的问题, 这时外力 $P_h(t)$ 不全为零. 要解决这问题, 只要找出一般形式的微分方程

$$\ddot{\eta}_h+\lambda_h\eta_h=N_h(t)$$

的一个解就够了.

对于初值 $\eta_h(0)=(0)$ 及 $\dot{\eta}_h(0)=0$, 这个解是 [1)]

$$\eta_h(t)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_h}}\int_0^t N_h(\tau)\sin\sqrt{\lambda_h}(t-\tau)d\tau; \tag{10}$$

一般的受迫运动则是这个特殊运动和自由运动的叠加.

假定外力 $N_h(t)$ 是频率为 ω_h 的周期性力, 例如, $N_h=\alpha_h\cos\omega_h(t-\delta)$. 如果 $\omega_h^2\neq\lambda_h$, 则公式 (10) 显示出, 坐标 η_h 的运动是一个频率为 ω_h 的纯振动和一个频

1) 这个解可以解释如下: 本来是连续的外力用不连续的、作用时间为 Δt 的瞬时冲力来代替, 然后令 $\Delta t\to 0$.

率为 $\sqrt{\lambda_h}$, 的本征振动相叠加的结果. 但是如果 $\omega_h^2 = \lambda_h$, 即如果发生共振, 则 η_h 的受迫运动不再与激发力 $N_h(t)$ 同音, 而由 (10) 式容易看出有

$$\eta_h(t) = \frac{\alpha_h t}{2\omega_h} \sin \omega_h (t - \delta) + \frac{\alpha_h \sin \omega_h \delta}{2\omega_h^2} \sin \omega_h t,$$

且当 t 增加时 $|\eta_h|$ 不再是有界的了.

5.2.2 振动系统的一般性质

把振动数的平方 $\lambda_1, \lambda_2. \cdots, \lambda_n$ 由小到大排起来: $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$. 按第 1 章 1.4 节, λ_p 可定义为: 当变数 x_h 受到条件 $G = \sum_{h,k=1}^{n} a_{hk} x_h x_k = 1$, 以及另外 $p-1$ 个附加条件

$$\sum_{h=1}^{n} \alpha_{hj} x_h = 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots, p-1) \tag{11}$$

限制时, 二次型 $F = \sum_{h,k=1}^{n} b_{hk} x_h x_k$ 的极小值中的极大值; (11) 中的 α_{hj} 是任意的. 由此立刻得到关于本征值及其相应音调的几个定理 (其证明见第 1 章 1.4 节).

定理 I : 一个振动系统的第 p 个泛音, 是所有那些从这给定系统加上 p 个形如 (11) 的、任意选择的限制而得的系统的各基音中最高的一个.

定理 II : 如果对一系统 S 加上 r 个形如 (11) 的条件而得一“受 r 重限制的”系统 S', 则这受限制的系统的频率 $\nu_1', \nu_2', \cdots, \nu_{n-r}'$ 不小于自由系统的各相应频率 $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_{n-r}$, 也不大于频率 $\nu_{r+1}, \nu_{r+2}, \cdots, \nu_n$; 即

$$\lambda_p \leqslant \lambda_p' \leqslant \lambda_{p+r}, \nu_p \leqslant \nu_p' \leqslant \nu_{p+r} \quad (p = 1, 2, \cdots, n-r).$$

定理III: 当惯性增加时, 基音和每一泛音的音调都降低 (或保持不变).

所谓惯性增加, 我们了解为改变系统使动能 T' 变大, 即当位能保侍不变时, 两系统动能之差 $T' - T$ 总大于零.

定理IV: 如果增加系统的紧张度, 则基音和每一泛音的音调都升高 (或保持不变).

增加系统的紧张度意味改变系统, 使对于同样的坐标值, 位能增大而动能不变.

毋须强调, 如果取消一些限制条件, 或减少质量, 或使系统松弛 (就是说减轻系统的紧张度), 那么基音和泛音的变化, 在每一情形中都和定理 II 至IV所指出的变化相反.

5.3 弦的振动

一个自由度数目为有限的系统, 当本征振动 (同步振动) 知道时, 全部运动也就

知道. 对于一个连续的系统也是如此. 我们要讨论的是连续系统的这样的自由振动, 即所谓驻定振动, 其中偏离 u 可以表为只与时间有关的 $g(t)$ 和只与位置有关的 $v(x)$ 的乘积, $v(x)$ 称为形状因子或振形. 一任意振动现象可以用这种本征振动的叠加来表示.

我们用几个例子来阐明这些概念.

5.3.1 均匀弦的自由运动

首先我们看一个最简单的例子: 两端固定的均匀弦的振动. 弦的偏离 $u(x,t)$ 满足微分方程

$$cu_{xx} = \rho u_{tt}, \quad \text{或} \quad u_{xx} = \mu^2 u_{tt} \quad \left(\mu = \sqrt{\frac{\rho}{c}}\right) \tag{12}$$

及边界条件: $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$(参看第 4 章 4.10 节). 为简单起见, 我们选时间的单位使 $\mu = 1$. 我们的问题是要找形式为 $u = v(x)g(t)$, 满足 (12) 的函数, 对于这样的函数, 微分方程 (12) 可写为

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{\ddot{g}(t)}{g(t)}.$$

它左方与 t 无关而右方则与 x 无关, 因此两方必须等于同一常数 $-\lambda$. 由边界条件 $v(0)g(t) = v(\pi)g(t) = 0$, 有 $v(0) = v(\pi) = 0$. 因此 $v(x)$ 将由微分方程

$$v'' + \lambda v = 0 \tag{13}$$

及边界条件

$$v(0) = v(\pi) = 0 \tag{13a}$$

定出. 并非对于常数 λ 的任意数值这些条件都能得到满足. 事实上从微分方程 (13) 的普遍解 $c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ 的形式, 可以断论, 只要而且只有当 $\lambda = n^2$ (n 为整数) 时边界条件才能满足. 相应的解因此具有形式 $v_n = \sin nx$. 数值 $1, 2^2, 3^2, \cdots$ 和函数 $\sin x, \sin 2x, \cdots$ 依次称为由微分方程 (13) 和边界条件 (13a) 确定的本征值问题的本征值和本征函数.

对于 $g(t)$ 我们得 $g = a\cos nt + b\sin nt$, 其中 a 和 b 是任意常数. 因此, 对于每一正整数 n, 有方程 (12) 的一个形如 $\sin nx(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$ 的解. 这样得到的谐运动称为弦的本征振动, 相应的数 $n = \nu_n$ 则称为相联的本征频率. 我们可以取和数

$$u = \sum_n \sin nx(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

来作为更普遍的解; 和数可以取有限项, 也可以取无穷项. 在后一情形中, 只要做定级数一致收敛并且可以对于每一变数逐项微分两次就够了.

现在如果我们用适当的方法选择系数 a_n, b_n, 就可以使解式合于由函数 $u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x)$ 所定的任意一初态. 按傅里叶级数的理论, a_n, b_n 可以如此决定, 使

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \sin nx.$$

把这样决定的系数代到 $u(x,t)$ 的级数里, 就得到所求的解 [1].

如果弦所受的是别的一些边界条件, 我们也得到很类似的结果. 例如, 设起点固定, (即 $u(0,t)=0$), 而终点依照方程 $u_x = -hu (h > 0)$[2] 与它的静止位置弹性地相连. 这时, 如果令 $u(x,t) = v(x)g(t)$, 就得到下述关于 $v(x)$ 的本征值问题: 决定常数 $\lambda = \nu^2$ 使微分方程 $v'' + \lambda v = 0$ 有一个满足边界条件 $v(0) = 0, v'(\pi) + hv(\pi) = 0$ 的非零解 v. 头一个边界条件使 v 必须是 $\sin \nu x$ 的形状. 后一边界条件则引出超越方程 $h \sin \nu\pi = -\nu \cos \nu\pi$. 如 $h \neq 0$, 我们可以用作图法在 $z - \nu$ 平面上找直线 $z = -(1/h)\nu$ 和曲线 $z = \tan \nu\pi$ 的各支的交点; 这些交点就是超越方程的根. 于是我们又得到一序列的本征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ 及相应的本征函数 $\sin \nu_1 x, \sin \nu_2 x, \cdots$ 和本征振动 $(a \cos \nu_1 t + b \sin \nu_1 t) \sin \nu_1 x, \cdots$. 此外, 对于第 n 个本征频率, 我们立得“**渐近**”**关系** $\lim\limits_{n\to\infty} (\nu_n/n) = 1$.

在弦的终点是“自由的”(即 $h = 0$ 因之 $u_x = 0$) 的特殊情形中, 我们有 $\nu_n = n - \frac{1}{2}$, 因此

$$v_n = \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)x.$$

如前，我们可以构成一无穷级数

$$u(x,t) = \sum_n \sin \nu_n x (a_n \cos \nu_n t + b_n \sin \nu_n t)$$

来作为 (12) 的普遍解. 用适当方法选常数 a_n, b_n, 又可使这解满足一任意预给的初态. 为了这目的, 我们需要去研究**把一个任意函数** $w(x)$ **在区间** $0 \leqslant x \leqslant \pi$ **中按函数** $\sin \nu_n x$ **展开的可能性**; 这些函数 $\sin \nu_n x$ 是微分方程 (12) 在边界条件

$$v(0) = 0, \quad hv(\pi) = -v'(\pi) \tag{14}$$

下的本征函数. 在 5.14 节中我们将研究这问题. 目前我们只指出函数 $v_n = \sin \nu_n x$ 的**正交性**; 就是说, 它们有这样的性质:

$$\int_0^\pi v_n v_m dx = 0, \quad 如\ \nu_n \neq \nu_m. \tag{15}$$

---

1) 这些说法在假定函数 $\varphi, \psi, \varphi', \varphi'', \psi'$ 都是分段平滑时是对的. 如果我们不要求这些函数以及它们的导数的傅氏展开, 而只是用它们的傅氏系数来刻画它们, 则这些条件尚可放宽.

2) 参看第 4 章 4.10.2 小节. 在那里, 这些边界条件是从位能中多有一边界项而推导出来的.

这性质很容易立刻证明: 以 v_m 乘方程 $v''+\nu_n^2 v_n=0$, 而以 v_n 乘方程 $v_m''+\nu_m^2 v_m=0$, 把得到的方程相减, 然后积分, 得

$$(\nu_n^2-\nu_m^2)\int_0^\pi v_n v_m dx+\int_0^\pi \frac{d}{dx}(v_n' v_m-v_m' v_n)dx=0,$$

随此, 用 (14), 得正交性.

5.3.2 受迫振动

一条两端固定的弦, 在外力 $Q(x,t)$ 作用下, 它的运动由非齐次微分方程

$$u_{x_x}=u_{tt}-Q(x,t) \tag{16}$$

表征. 要找偏离 $u(x,t)$, 我们把 $Q(x,t)$ 在瞬时 t 按本征函数 $\sin nx$ 展开为

$$Q(x,t)=\sum_{n=1}^\infty Q_n(t)\sin nx,\quad Q(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi Q(x,t)\sin nxdx.$$

同样, 假定所求的解展开为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^\infty q_n(t)\sin nx,\quad q_n(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(x,t)\sin nxdx.$$

现在我们试图通过解无穷序列的常微分方程

$$-n^2 q_n(t)=\ddot{q}_n(t)-Q_n(t) \tag{17}$$

来满足方程 (16). 这些方程的解是

$$q_n(t)=\frac{1}{n}\int_0^t Q_n(t')\sin n(t-t')dt'+a_n\cos nt+b_n\sin nt, \tag{17a}$$

其中 a_n, b_n 是任意常数, 由初条件来确定. 如果级数 $\sum\limits_n q_n(t)\sin nx$ 收敛并且可以逐项微分两次, 那它就是所要的方程 (16) 的解. 处理非齐次方程的另一方法将在 5.5.2 小节和 5.14.1 小节中讨论.

对于受迫运动, 我们可以避免用展开定理而得到结果. 假定有一解 $u(x,t)$ 存在, 我们把 $Q_n(t)$ 和 $q_n(t)$ 看作是 $Q(x,t)$ 和 $u(x,t)$ 按上述方程定义的傅里叶系数而试图用 $Q_n(t)$ 来确定 $q_n(t)$. 为此, 先以 $\sin nx$ 乘方程 (16) 并在基本区域上积分. 然后用分部积分变换左方立得 (17), 这样仍旧又得到 (17a). 由于正交函数组 $\sin nx$ 的完整性, 函数 $u(x,t)$ 就可以唯一地用这样得到的展开系数来表征.

像在 5.2 节中一样, 我们特别注意的是 $Q_n(t)$ 为调和或正弦式的情形:

$$Q_n(t)=a\cos\omega t+b\sin\omega t.$$

于此, 当 $\omega^2 \neq n^2$ 时, $q_n(t)$ 可以表为频率为 ω 的一个正弦式函数和频率为 n 的另一个正弦式函数的线性组合, 而在共振的情形, 即 $\omega^2 = n^2$ 的情形, $q_n(t)$ 变为无限 (参看本章 5.2.1 小节).

在本章中所要讨论的关于一般的连续振动系统的那些关系式中, 以上关于均匀的振动弦的关系式是典型的. 一般说来, 要点在于决定简正形, 讨论它们的完整性以及展开定理是否适用的问题. 但这时我们就不能引用像傅氏级数理论那样现成的理论了. 为了不打断思路, 我们把关于本征函数的完整性的证明移到 5.14 节中去讨论.

5.3.3 一般的不均匀的弦和施图姆–刘维尔本征值问题

我们现在来看一非均匀弦的一般方程

$$(pu_x)_x = \rho u_{tt},$$

其中 $p(x)$ 代表弹性模量与截面积的乘积, $\rho(x)$ 代表单位长的质量. 我们要找这方程的解, 它满足某些齐次的边界条件. 我们依旧试找形如 $u = g(t)v(x)$ 的解, 而得

$$(pv')' : v\rho = \ddot{g} : g.$$

要这等式成立, 两边必须各等于同一常数, 譬如说 $-\lambda$. 于是就有 $v(x)$ 的一个常微分方程

$$(pv')' + \lambda\rho v = 0, \tag{18}$$

而 $g(t)$ 则满足 $\ddot{g} + \lambda g = 0$. 如果令 $\lambda = \nu^2$——λ 的负值不在考虑之列, 这一点将立刻自明 —— 则 u 的形式为

$$u = v(x)(a\cos\nu t + b\sin\nu t);$$

函数 $v(x)$ 必须由微分方程 (18) 和边界条件来确定, 像均匀弦的特殊情形一样, 我们面对的是*本征值问题*: 确定方程 (18) 的 "*本征值*" λ, *使一满足边界条件的非零解存在*. 这解称为属于本征值 λ 的*本征函数*; 除一任意常数因子外它是完全确定了的. 常常出现的是下列类型在起点和终点的边界条件[1]

1. $v(0) = 0$	和	$v(\pi) = 0$	(两端固定的弦),
2. $h_0 v(0) = v'(0)$	和	$-h_1 v(\pi) = v'(\pi)$	(两端受弹性联系),
3. $v'(0) = 0$	和	$v'(\pi) = 0$	(自由端点),
4. $v(0) = v(\pi)$	和	$p(0)v'(0) = p(\pi)v'(\pi)$;	

条件 4 可以解释为周期性条件, 如果 $p(0) = p(\pi)$.

1) 变分法显示, 这些条件包括了自然边界条件的主要类型 (参看第 4 章, 第 6 章).

注意, 按照问题的物理性质, 函数 p 和 ρ 在区间 $0 \leqslant x \leqslant \pi$ 中都是正的, 我们将明白地假定如此. 其次, h_0 和 h_1 都必须是正的, 如果弦的静止位置相应于一稳定平衡 [1].

上面所表述的问题是施图姆和刘维尔首先开始研究的, 因此称为**施图姆–刘维尔问题**. 这问题尚可略为推出, 如果我们把 (18) 代以微分方程

$$(pv')' - qv + \lambda \rho v = 0, \tag{19}$$

其中 q 是给定的连续函数. 变换自变数和因变数, 可以把微分方程化为简单的标准形式. 例如, 经变换 $z = v\sqrt{\rho}$, 方程 (19) 成为

$$\frac{d}{dx}(p^* z') - (q^* - \lambda) z = 0, \tag{20}$$

其中

$$p^* = \frac{g}{\rho}, q^* = -\frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{d}{dx}\left(p \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{\rho}}\right) + \frac{q}{\rho}.$$

如果 $q = 0$, 我们引进新变数 $\xi = \displaystyle\int \frac{dx}{p(x)}$ 来代替 x 然后又使用 x 来代替 ξ, 方程 (19) 可以变换为

$$v'' + \lambda \sigma v = 0, \quad \sigma = \rho p.$$

另一关于微分方程 (19) 的重要变换为

$$u = \sqrt[4]{p\rho v}, t = \int_0^x \sqrt{\frac{\rho}{p}} dx, l = \int_0^\pi \sqrt{\frac{\rho}{p}} dx. \tag{20a}$$

这时, 方程 (19) 成为

$$a'' - ru + \lambda u = 0, \tag{19a}$$

其中 r 代表一连续函数 [2].

相应于微分方程 (19) 的本征函数 v 和 (正的) 本征值 λ, 有弦的频率 $\nu = \sqrt{\lambda}$ 的本征振动

$$v(x)(a_\nu \cos \nu t + b_\nu \sin \nu t).$$

如前, 施图姆–刘维尔问题的本征函数也提供一正交函数组. 这一普遍性质可以从微分方程推出, 设 λ_n, λ_m 是不同的两个本征值, v_n, v_m 为相应的本征函数. 像本节第 1 小节中一样, 我们有

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_0^\pi \rho v_n v_m dx + \int_0^\pi \frac{d}{dx}(p[v_n' v_m - v_n v_m']) dx = 0.$$

---

1) 参看第 4 章 4.10.2 小节.

2) $r = (f''/f) + q/\rho, f = \sqrt[4]{\rho p}$.

边界条件使左方第二项等于零, 因此函数 $\sqrt{\rho v_i}$ 是正交的, 即,

$$\int_0^\pi \rho v_n v_m dx = 0.$$

我们可以假设, 并将假设这些函数已规一化. 在 5.14 节中我们将证明: 微分方程 (19) 在给定的边界条件下的本征值 λ, 当它们按大小排列时, 形成一可数序列 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots$, 并且相应的本征函数组是一个完备的正交组. 每一具有分段连续的一阶和二阶微商并满足本征值问题的边界条件的连续函数都可以展为本征函数的一个绝对并一致收敛的极数

$$f = \sum_{n=1}^\infty c_n v_n, \quad c_n = \int_0^\pi \rho f v_n dx.$$

这个展开定理使解式

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^\infty v_n(x)(a_n \cos \nu_n t + b_n \sin \nu_n t)$$

能够去适合一预给的初态.

施图姆-刘维尔问题 (除去那些有周期性连界条件的问题)[1] 的所有本征值都是单重的, 就是说, 与同一本征值 λ 相应, 不能有两个互相独立的本征函数 v, v^*. 如果真有这样两个函数, 那么不管边界条件如何, 每一个 (19) 的解都可以表为 $cv + c^*v^*$; 于是每一个解将会满足加于本征函数的齐次边界条件. 这样的结论对于边界条件 1, 2 和 3 说来是矛盾的, 因为这些条件包含 $v(0)$ 和 $v'(0)$ 的齐次关系, 而对于 (19) 的一个解, $v(0)$ 和 $v'(0)$ 之值可以任意地预先给定.

当 $q \geqslant 0, h_0 \geqslant 0, h_1 \geqslant 0$ 时, 所有本征值 λ 都是正的. 事实上

$$\begin{aligned}\lambda = \lambda \int_0^\pi \rho v^2 dx &= -\int_0^\pi [(pv')'v - qv^2]dx \\ &= \int_0^\pi (pv'^2 + qv^2)dx - pv'v\big|_0^\pi,\end{aligned}$$

而右方在 1 至 4 各边界条件的情形中是正的. **如果相应的本征函数代表一周期振动, 则本征值必须是正的. 只要有一个负的本征值, 就会出现一非周期运动, 而不是相应的简正形运动, 以后我们将看到, 这种情形只能出现有限次数, 即使 q 是负的**[2].

弦的受迫运动可以用第 2 小节中关于均匀弦的同样方法来分析. 但如果非齐次方程 $(pu_x)_x = \rho u_{tt} - Q(x,t)$ 中的外力 $Q(x,t)$ 是周期性的: $Q(x,t) = \varphi(x)e^{i\omega t}$[3],

1) 在这种情形中, $\lambda = n^2 (n = 1, 2 \cdots)$ 是 $y'' + \lambda y = 0$ 的双重本征值, 两本征函数为 $\sin nx$ 及 $\cos nx$.

2) 参看第 6 章 6.2 节.

3) 当我们用复数时, 总是表示方程和解中的实部和虚部应当分开来考虑.

我们常用下述程序[1]：把解 u 写成 $u=v(x)e^{i\omega t}$, 得到与 (18) 相联的、$v(x)$ 的非齐次方程

$$(pv')'+\lambda\rho v=-\varphi(x)\qquad(\lambda=\omega^2).$$

要决定解 $v(x)$ 的展开系数

$$\gamma_n=\int_0^\pi \rho v v_n dx,$$

我们以 $v_n(x)$ 乘微分方程, 把结果在基本区域上积分, 用分部积分变换第一项, 然后考虑到 v_n 的微分方程; 这时, 立得 $\gamma_n(\lambda-\lambda_n)=-c_n$, 因之

$$\gamma_n=-\frac{c_n}{\lambda-\lambda_n},\ \text{其中}\ c_n=\int_0^\pi \varphi v_n dx.$$

在共振的情形中, 这方法失去意义, 因为这时外力的频率 $\sqrt{\lambda}=\omega$ 等于本征频率 $\sqrt{\lambda_n}=\omega_n$ 之一, 而系数 c_n 不等于零.

对于外力 $Q(x,t)$ 为任意的一般情形, 我们可以把它化为刚才讨论过的特殊情形; 那就是, 借助一傅里叶级数或一傅里叶积分, 把 $Q(x,t)$ 按谱分解为 t 的函数 (参看第 2 章 2.5 节和 2.6 节).

5.4 杆的振动

一均匀杆的横振动的微分方程为

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0.$$

在这情形中, 我们仍旧考虑本征振动 (为简单起见, 我们只限于讨论均匀的杆, 因为非均匀的杆并不提供超出 5.3 节中已处理的内容). 同前我们令 $u=v(x)g(t)$, 得

$$-\frac{v''''}{v}=\frac{\ddot g}{g}=-\lambda,$$

即

$$v''''-\lambda v=0,\quad \ddot g+\lambda g=0,\tag{21}$$

其中常数 λ 如此决定, 使所得的解在杆的两端满足四个预给的齐次边界条件. 我们仍假定杆的静止位置是在区间 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 之中. 边界条件有下列各种不同的形式 (参看第 4 章 4.10 节):

1. 在 $x=0$ 及 $x=\pi$ 处, $v''(x)=v'''(x)=0$ (两端自由),
2. 在 $x=0$ 及 $x=\pi$ 处, $v(x)=v''(x)=0$ (两端支住),

1) 在这方面可参考第 1 章 1.3.6 小节中的代数类似.

3. 在 $x=0$ 及 $x=\pi$ 处，$v(x)=v'(x)=0$，　　(两端夹住)
4. 在 $x=0$及$x=\pi$ 处，$v'(x)=v'''(x)=0$，
5. $\left.\begin{array}{ll} v(0)=v(\pi), & v''(0)=v''(\pi), \\ v''(0)=v''(\pi), & v'''(0)=v'''(\pi). \end{array}\right\}$ (周期性)

在所有这些情形中，本征函数和本征值都可以明显地给出，因为如果假定 $\lambda \neq 0$[1) 而 $\sqrt[4]{\lambda}=\nu$，则 (21) 中第一个方程的通解为

$$v=c_1\cos\nu x+c_2\sin\nu x+c_3e^{\nu x}+c_4e^{-\nu x}$$

或

$$v=\xi_1\cos\nu x+\xi_2\sin\nu x+\xi_3\cosh\nu x+\xi_4\sin h\nu x.$$

如 $\lambda=0$ 则通解退化成一三次多项式 $v=\xi_1+\xi_2x+\xi_3x^2+\xi_4x^3$.

任何适当的一组四个齐次边界条件都产生 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 的一组四个齐次方程 $\sum a_{ik}\xi_k=0(i=1,2,3,4)$. 要得到一个非零解. 必须令行列式 $|a_{ik}|=0$. 由此得到一个关于本征值 λ 的超越方程. 这方程的每一个根给出一个或多个本征函数. 这些函数可以取为规一的. 在杆两端自由的特殊情形中，ν 所应满足的超越方程为

$$\cosh\nu\pi\cos\nu\pi=1.$$

除去函数 $\xi_1+\xi_2x$ 属于双重本征值 $\lambda=0$ 之外，其他尚未规一的联属本征函数为

$$\begin{aligned} v=&(\sin\nu\pi-\sin\mathrm{h}\nu\pi)(-\cos\nu x+\cos\mathrm{h}\nu x)\\ &-(\cos\nu\pi-\cos\mathrm{h}\nu\pi)(\sin\nu x+\sin\mathrm{h}\nu x).\end{aligned}$$

两端夹住的杆的解可以从上述两端自由的杆的解，经过两次微分得到，因为微分而得的函数同时满足微分方程以及两端夹住的边界条件. 此外，两端夹住的杆的每一本征函数还可以从自由杆的相应本征函数，经过两次积分并选适当的积分常数得到. 其本征值为同一超越方程的正解; 本征函数的表达式则为

$$\begin{aligned} v=&(\sin\nu\pi-\sin\mathrm{h}\nu\pi)(-\cos\nu\pi x+\cos\mathrm{h}\nu x)\\ &-(\cos\nu\pi-\cos\mathrm{h}\nu\pi)(-\sin\nu x+\sin\mathrm{h}\nu x).\end{aligned}$$

杆的问题之不同于弦的振动在于可以出现重本征值. 例如，在两端自由的杆的问题中 $v=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$ 和 $v=x\sqrt{3/\pi^3}$ 这两个规一的、线性无关的本征函数都属于本征值零. 但是，在两端夹住的杆的情形中，这两个本征函数和本征值 $\lambda=0$ 都因两次微分而消失.

---

1) 像 5.3 节中一样，容易证明 $\lambda\geqslant 0$.

在所有讨论过的情形中, 方程 (21) 的诸本征函数成一正交组. 仍令 λ_n, λ_m 为不同的两本征值, v_n, v_m 为相应的本征函数. 分部积分两次, 我们得

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_0^\pi v_n v_m dx = (v_n v_m''' - v_m v_n''' - v_n' v_m'' + v_m' v_n'')\Big|_0^\pi,$$

其右方因齐次边界条件而为零. 以后 (5.14 节) 我们将证明**这组本征函数是完备的; 任意函数, 只要具有连续的一阶和二阶以及分段连续的三阶和四阶微商, 就可以依这些函数来展开.**

杆的横振动理论的其余方面与弦的理论很类似, 毋须在此多述.

5.5 膜 的 振 动

5.5.1 关于均匀膜的一般本征值问题

一振动的均匀膜的微分方程 $\Delta u = u_{tt}$ 也同样引到一个本征值问题, 不过这本征值问题是属于一偏微分方程的. 设静止时膜在 $x-y$ 平面上占一边界为 Γ 的区域 G; 其余的假设和符号都和第 4 章 4.10.3 小节的相同. 我们先看最简单的边界条件, $u=0$, 即**紧绷在一固定架上的膜**. 如果令 $u(x,y,t) = v(x,y)g(t)$, 立得函数 $v(x,y)$ 与 $g(t)$ 间的关系

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\ddot{g}}{g} = -\lambda.$$

由此知 λ 为一常数, 我们令它等于 ν^2. 求函数 $v(x,y)$ 和常数 λ 相当于解下述**本征值问题**: 决定参数 λ—— 本征值 —— 使微分方程

$$\Delta v + \lambda v = 0 \tag{22}$$

有一不恒等于零的解 $v(x,y)$, 它在 $G+\Gamma$ 上连续, 在 G 内在连续的一阶和二阶微商, 在边界上为零; 我们可选它为规一的. 本征值必须是正的, 这点在我们写 $\lambda = v^2$ 时已表示出来, 它可以由下述方程证明:

$$\iint_G (v_x^2 + v_y^2)dxdy = -\iint_v v\Delta v dxdy = \lambda \iint_G v^2 dxdy;$$

这方程是由 (22) 式两方乘 v, 积分, 并应用格林公式 (参看 5.1 节) 得到的, 因此, 方程 $\ddot{g}/g = -\lambda = -\nu^2$ 的普遍解为 $g = a\cos\nu t + b\sin\nu t$, 这是一个时间的周期函数. 于是振动方程的解

$$u(x,y,t) = v(x,y)(a\cos\nu t + b\sin\nu t)$$

就相应于**一频率为 $\nu = \sqrt{\lambda}$ 的本征振动**.

关于本征振动的存在问题, 或者更精确些, 关于一个可数的无穷本征值序列 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ 和相应的本征函数 $v_1(x,y), v_2(x,y), \cdots$ 的存在问题, 以及相应关于完备性和关于级数展开的定理, 都将在 5.14 节中说明, 这里, 我们只注意下述正交性: 任意两个属于不同本征值 λ_i, λ_k 的本征函数 v_i, v_k 正交; 即

$$\iint_G v_i v_k dxdy = 0.$$

和以前一样, 这一关系可以根据从 (22) 式应用格林公式和边界条件 $u = 0$ 而得的公式

$$(\lambda_i - \lambda_k) \iint_G v_i v_k dxdy = -\iint_G (v_k \Delta v_i - v_i \Delta v_k) dxdy = 0$$

来证明.

对于任意预给的初条件 $u(x,y,0) = f(x,y), u_t(x,y,0) = g(x,y)$, 一紧绷着的自由振动的膜的运动可以表达按本征函数展开的级数

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x,y)(a_n \cos \nu_n t + b_n \sin \nu_n t), \tag{23}$$

其中的系数 a_n, b_n 由初条件及公式

$$a_n = \iint_G f(x,y) v_n(x,y) dxdy, \quad b_n = \frac{1}{v_n} \iint_G g(x,y) v_n(x,y) dxdy$$

确定. 在推导这一结果时, 我们假设级数 (23) 收敛并可逐项微分足够多次.

如果预给的边条件的形式是 $\partial u/\partial n = -\sigma u$ (这条件表示膜与边界弹性地相连), 情形也类似. 这里, σ 是一个正的量, 一般是边界上位置的函数. 这情形的本征值问题可以和上面完全一样地来表述, 其初值问题的解可以同样利用展开定理求得. 这里的本征值 λ 是正数. 为了证明这一点, 以 v 乘方程 (22) 然后在 G 上积分, 用格林公式 (5.1 节) 并注意边界条件 $\sigma v + \partial v/\partial n = 0$, 立得

$$\lambda \iint_G v^2 dxdy = \iint_G (v_x^2 + v_y^2) dxdy + \int_\Gamma \sigma v^2 ds.$$

和以前一样, $\nu = \sqrt{\lambda}$ 是相应的本征振动的频率. 属于不同的本征值 λ_i 和 λ_k 的本征函数也是正交的.

用适当的装置, 可以得到自由膜的极限情形 $\sigma = 0$. 有趣的是, 虽然所有其他边界条件都导致正的本征值, 这情形却容许 $\lambda = 0$, 所属的本征函数 $v(x,y) =$ 常数.

5.5.2 受迫运动

由微分方程

$$\Delta u = u_{tt} - Q(x,y,t) \tag{24}$$

所表示的一个膜的强迫运动可以用 5.3.2 小节中的方法来处理. 我们可以把外力 $Q(x,y,t)$ 和所要求的函数 $u(x,y,t)$ 都表成按自由振动膜的本征函数 $v_n(x,y)$ 展开的级数: $Q(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}q_n(t)v_n(x,y)$ 和 $u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)v_n(x,y)$, 然后从微分方程

$$\ddot{u}_n+\lambda_n u_n=q_n$$

定出系数 $u_n(t)$. 或者, 假定有一周期性的外力, 我们把 Q 和 u 展为傅氏级数, 这时我们只需解一特殊的形如 (24) 的方程, 其中外力是一个简单的周期函数 $\varphi(x,y)e^{i\omega t}$, 解的形式则为 $v(x,y)e^{i\omega t}$, 函数 $v(x,y)$ 满足微分方程

$$\Delta v+\lambda v=\varphi(x,y)\qquad(\lambda=\omega^2). \tag{25}$$

这方程可以用依本征函数展开的方法来求解, 令 $v(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n v_n$; 系数 γ_n 由 5.3 节末尾一段所述方法可定为

$$\gamma_n=\frac{c_n}{\lambda-\lambda_n}\qquad(\lambda=\omega^2),$$

其中 $c_n=\iint_G \varphi v_n dxdy$.

5.5.3 节线

在弦或杆的情形中, 使本征函数 v_n 为零的那些点特别有意思; 它们称为所属本征振动 $v_n e^{i\nu_n t}$ 的节点. 同样, 在膜的本征振动中有所谓节线, 它们就是曲线 $v_n(x,y)=0$. 在本征振动中, 沿这些曲线 —— 节线 —— 膜是静止的. 现在我们来讨论几个例子 (尚可参见第 6 章 6.6 节).

5.5.4 矩形膜

膜的本征值问题与区域的选择有关, 因此引出一些特殊问题. 这里我们要讨论关于所占区域为 $G(0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b)$ 的矩形膜的一些特殊问题. 与边界条件 $u=0$ 或 $\partial u/\partial n=0$ 相应的本征值和本征函数都是立刻可知的. 在前一情形中, 本征值为 $\lambda=\pi^2\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)(n,m=1,2,3,\cdots)$, 相应的但未规一化的本征函数为 $\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$. 在后一情形中, 本征值为 $\lambda=\pi^2\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)(n,m=0,1,2,\cdots)$, 相应的本征函数则为 $\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$; 如前面所指出, $\lambda=0$ 在这里也是一个本征值 (注意, 紧绷着的矩形膜的本征函数可以从自由膜的本征函数对 x 和 y 微分得到).

这样得到的本征函数已经是这问题的本征函数的全部. 这一点可以从 $\sin(n\pi x/a)\sin(m\pi y/b)$ 是区域 G 内的一完备正交函数组, 因此不可能再有一个和它们正交

的函数存在这一事实看出. 任何另外一个本征函数, 如果它的本征值不同于上述的 λ, 则这函数就要与所有上述的正弦乘积正交; 如果它的本征值同于上述 λ 之一, 并且它不是这一本征值所属的诸正弦乘积的线性组合, 那么从它减去这些正弦乘积的一个适当的线性组合, 就可得一函数和这些正弦乘积以及其他正弦乘积正交. 所以, 任何一新的本征函数必恒等于零.

其他如展开定理等相当于两个变数的傅氏级数的情形, 这些我们在第 2 章中已讨论过.

我们所讨论的例子显示, 在膜的情形中, 重本征值极易出现. 只要矩形的边长之比 $a:b$ 是有理数, 方程 $n^2/a^2+m^2/b^2=n'^2/a^2+m'^2/b^2$ 就可能有不为零的整数解 m,n,m',n', 于是就有重本征值出现. 例如 G 是一个正方形 $a=b=\pi$, 则 $m'=n, n'=m$ 就是这样的解, 相应于边界条件 $u=0$ 的本征函数则为 $\sin mx\cos ny$ 及 $\sin nx\sin my$. 于是, 在正方形区域的情形中, 一本征值的重数问题就化为数论的问题: 有多少种不同的方法可以把一个数 ν^2 表为两个平方之和[1]——$\nu^2=n^2+m^2$?

本征函数 $\sin nx\sin my$ 的节线为平行于坐标轴的线. 但在重本征值的情形中, 许多其他的节线可以出现. 正方形情形中的函数 $\alpha\sin mx\sin ny+\beta\sin nx\sin my$ 的

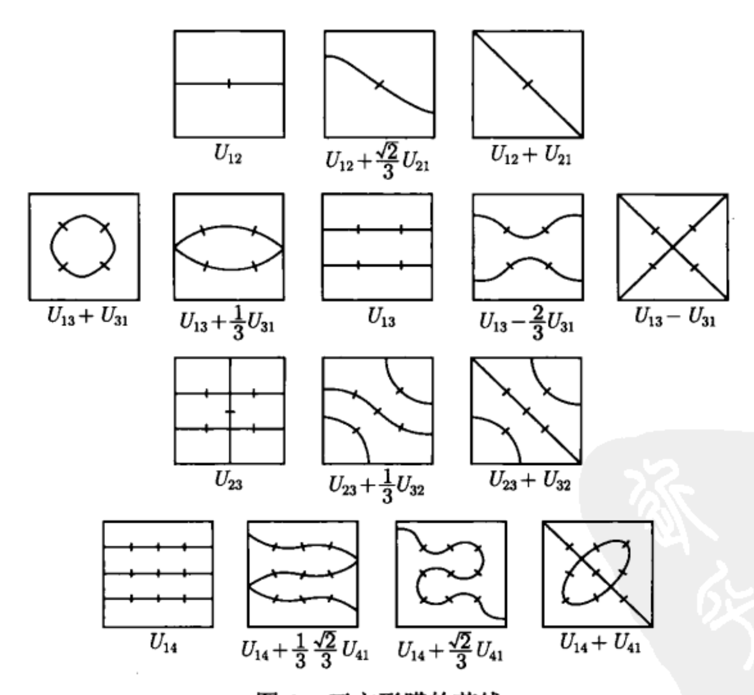


图 3　正方形膜的节线

1) 关于这方面可参考 Dirichlet-Dedekind. Vorlesungen über Zahlentheorie. §68 第四版. Braunschweig: F. Vieweg und Sohn, 1894 出版, 164-166 页.

零值就是一个例子. 从下面的图形 [1], 可以看到一些典型的例子. 这样的 u_{mn} 代表函数 $\sin mx \sin ny$.

5.5.5 圆形膜、贝塞尔函数

圆形膜的情形也可以明晰地处理. 我们假定圆的半径为 1.

这一本征值问题的微分方程用极标可写为

$$v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta} + \lambda v = 0, \tag{26}$$

(参看第 4 章 4.8.2 小节). 如前, 如果是紧绷的膜, 则边界条件为 $v(1,\theta) = 0$. 如果令 $v(r,\theta) = f(r)h(\theta)$ 以试解方程 (26), 我们立得关系

$$\frac{r^2\left(f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) + \lambda f(r)\right)}{f(r)} = -\frac{h''(\theta)}{h(\theta)} = \text{常数} = c.$$

由于 $v(r,\theta)$, 因之 $h(\theta)$, 必须是 θ 的以 2π 为周期的周期函数 —— 否则 v 不会是单值的, 常数 c 应等于 n^2, n 是任何不小于零的整数. 于是我们得

$$h(\theta) = a\cos n\theta + b\sin n\theta,$$

而 $f(r) = y$ 则满足

$$r^2y'' + ry' + (r^2\lambda - n^2)y = 0. \tag{27}$$

现在的问题是找本征值 λ, 使这微分方程有一解满足边界条件 $f(1) = 0$ 并在 $r = 0$ 连续. 作变换 $r\sqrt{\lambda} = \rho(\lambda \neq 0)$, 或令 $\lambda = k^2$ 而有 $kr = \rho$, 方程即 (27) 变为

$$\frac{d^2y}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dy}{d\rho} + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2}\right)y = 0. \tag{28}$$

这贝塞尔方程的解称为*贝塞尔函数*. 贝塞尔函数无论在数学分析或数理物理中都起特殊重要的作用, 我们将在第 7 章中详细研究它. 现在只需指出, 我们可用幂级数 $y(\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m\rho^m$ 求得方程 (28) 之解

$$y(\rho) = J_n(\rho) = \frac{\rho^n}{2^n n!}\left\{1 - \frac{\rho^2}{2(2n+2)} + \frac{\rho^4}{2\cdot 4\cdot(2n+2)(2n+4)} - \cdots\right\},$$

我们称它为*第 n 级的贝塞尔函数*. 很容易用简单的判别法看出这级数对于 ρ 的任何值都收敛, 也就是说, 贝塞尔函数 $J_n(\rho)$ 是整超越函数. 在 $n = 0$ 的特殊情形, 我们有级数展开

$$J_0(\rho) = 1 - \frac{\rho^2}{2^2} + \frac{\rho^4}{2^2 4^2} - \frac{\rho^6}{2^2 4^2 6^2} + \cdots.$$

1) 其中一部分摘自 Pockels 的书 (见参考文献).

注意, 从级数展开立刻可得的关系

$$J_0'(\rho) = -J_1(\rho). \tag{29}$$

我们可以把 (27) 式的解写成

$$y_n = J_n(kr) \quad (k^2 = \lambda), \tag{30}$$

常数 k 由边界条件 $y_n(1) = 0$, 即 $J_n(k) = 0$ 决定. 因此 (27) 式的本征值 $\lambda = k^2$ 就是贝塞尔函数的零点的平方. 关于这些零点存在的问题以后我们将加以证明. 每一函数 J_n 实际上有无穷多个实零点, 我们用 $k_{n,m}(m = 1, 2, 3, \cdots)$ 来表示它们. 用了这样的符号, 本征函数就可以写成

$$J_n(k_{n,m}r)(\alpha \cos n\theta + \beta \sin n\theta).$$

这式中的常数 α 和 β 尚还是任意的. 这指示出, 除了属于 $n = 0$ 的本征函数外, 所有本征值都至少是二重的, 因它们附属有两个线性无关的本征函数 $J_n \cos n\theta$ 和 $J_n \sin n\theta$. 这些本征函数的节线是一些圆: $\rho =$ 常数和一些径线: $\theta =$ 常数. 本征振动由下式表示

$$u = J_n(k_{n,m}r)(\alpha \cos n\theta + \beta \sin n\theta)(a \cos k_{n,m}t + b \sin k_{n,m}t).$$

对于更为普遍的边界条件 $\partial u/\partial r = \sigma u$($\sigma$ 为常数), 差不多所有上面的讨论都保持不改. 但决定本征值的边界条件稍有不同, 它应该是

$$kJ_n'(k) = -\sigma J_n(k).$$

函数 $J_n(k_{n,m}r)$ 是膜的全部的本征函数. 我们可以这样来证明: 注意每一本征函数 v 都是 θ 的以 2π 为周期的周期函数, 并且有直到二阶的连续微商. 因此它可以展为傅里叶级数

$$v(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(r) e^{in\theta}.$$

把这级数代入方程 (26) 中, 我们立刻看到每一项 $f_n(r)e^{in\theta}$ 都独自满足微分方程.

从普遍的展开定理知道, 一个函数 $w(r, \theta)$, 如果在边界上等于零而且在圆内连续并有直到二阶的连续微商, 那它就可以展为一绝对且一致收敛的级数

$$w(r, \theta) = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_{nm} J_n(k_{n,m}r) \cos n(\theta - \theta_{n,m}).$$

例如, 设 w 与 θ 无关, 那么上述展开就表示, 任意一个 r 的函数, 只要它当 $r = 1$ 时为零并且在区间 $0 \leqslant r \leqslant 1$ 中有直到二阶的连续微商, 那它就可以在这区间中依贝塞尔函数 $J_0(k_{0,m}r)$ 展开.

从膜的方程的本征函数的普遍正交关系出发, 对 θ 积分, 可得贝塞尔函数, 或函数 (30) 之间的正交关系

$$\int_0^1 rJ_n(k_{n,i}r)J_n(k_{n,j}r)dr = 0 \quad (i \neq j).$$

这关系也可以用现已熟悉的方法直接从方程 (27) 导出. 显然, 这种正交关系对于更普遍一点的边界条件 $kJ_n'(k) = -\sigma J_n(k)$ 也还是对的.

要把函数 $J_n(k_{n,m}r)$ 规一化, 可用关系

$$2\int_0^1 J_n^2(kr)rdr = J_n'^2(k), \tag{31}$$

它的证明如下: 以 ry' 乘 $J_n(kr) = y$ 的微分方程

$$(ry')' + \left(rk^2 - \frac{n^2}{r}\right)y = 0,$$

并由 0 积分至 r. 分部积分后得关系

$$2k^2\int_0^r ry^2dr = (ry')^2 + (r^2k^2 - n^2)y^2.$$

令 $r = 1$ 并注意 $y(1) = J_n(k) = 0$ 即得方程 (31).

于是函数

$$\frac{\sqrt{2}}{J_n'(k_{n,m})}J_n(k_{n,m}r)$$

就是方程 (27) 的规一化的本征函数. 关于贝塞尔函数理论的其他结果, 读者可参看第 7 章或这方面的专著.

5.5.6 不均匀的膜

不均匀的膜的微分方程

$$p\Delta u + p_xu_x + p_yu_y - qu = \rho(x, y)u_{tt},$$

(其中 p, ρ 在 G 内都是正的) 也导致一本征值问题. 与 5.3 节中的普遍施图姆–刘维尔问题类似, 这问题也是要决定 λ 的值, 使微分方程

$$L[v] + \lambda\rho v = p\Delta v + p_xv_x + p_yv_y - qv + \lambda\rho v = 0$$

有一规一化的并满足预给的齐次边界条件的解. 借助格林公式

$$\iint_G \{v_2L[v_1] - v_1L[v_2]\}dxdy = \int_\Gamma p\left(v_2\frac{\partial v_1}{\partial n} - v_1\frac{\partial v_2}{\partial n}\right)ds = 0$$

[见本章公式 (5a)], 我们得到正交关系

$$\iint_G \rho v_i v_j dxdy = 0,$$

v_i, v_j 是对应于不同本征值 λ_i, λ_j 的本征函数. 我们一般这样来定本征函数, 使函数 $\sqrt{\rho} v_i$ 成一正交规一系, 即

$$\iint_G \rho v_i^2 dxdy = 1.$$

在 5.14 节中, 我们将从一普遍的观点来处理关于**本征值的存在, 完备性和展开定理**等问题. 这些定理断言, 一个有一、二阶连续微商并满足边界条件的函数 $f(x,y)$ 可以展为一级数: $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x,y), c_n = \iint_G \rho f v_n dxdy.$

5.6 板的振动

5.6.1 概述

由一均匀板的振动的微分方程

$$\Delta\Delta u + u_{tt} = 0,$$

令 $u = v(x,y)g(t), g(t) = \alpha e^{\pm i\nu t}$ 或 $g(t) = a\cos\nu t + b\sin\nu t$, 可得本征值方程

$$\Delta\Delta v - \lambda v = 0 \quad (\lambda = \nu^2). \tag{32}$$

作为边界条件的我们可取

$$u = 0, \frac{\partial u}{\partial n} = 0; \text{即}, v = 0, \frac{\partial v}{\partial n} = 0$$

(**夹住的板**). 对应于两不同本征值的**本征函数的正交性**可以用 5.1 节中同样的方法 (用格林公式) 来证明. 唯一主要的区别是: 现在的本征值问题由两个齐次边界条件来表征, 这是由于问题中的偏微分方程是四阶的原故.

5.6.2 圆形边界

从分析的角度来看, 板的问题要比膜难一些. 例如, 矩形边界的情形就不能用熟悉的函数来处理. 唯一已经明显地处理了的边界是圆. 引进极坐标 r, θ, 我们又复得到贝塞尔函数. 令 $\lambda = k^4$, 可以把微分方程用符号形式写为

$$(\Delta\Delta - k^4)v = 0$$

或

$$(\Delta - k^2)(\Delta + k^2)v = 0,$$

其中算子 Δ 代表

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}.$$

假定把 v 展为傅里叶级数:

$$v=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y_n(r)e^{in\theta},$$

则级数的每一项都必满足微分方程; 换言之, y_n 必须是

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{n^2}{r}-k^2\right)\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{n^2}{r^2}+k^2\right)y=0$$

的解. 我们可以找到这微分方程的两个线性无关而且在 $r=0$ 是正规的解: $J_n(kr)$ 和 $J_n(ikr), i=\sqrt{-1}$. 于是函数

$$v(r,\theta)=J_n(kr)(a_1\cos n\theta+b_1\sin n\theta)+J_n(ikr)(a_2\cos n\theta+b_2\sin n\theta)$$

是 (32) 的解. 要满足边界条件 $v(1,\theta)=0, v_r(1,\theta)=0$, 必须

$$J_n(k)a_1+J_n(ik)a_2=0,\quad J_n(k)b_1+J_n(ik)b_2=0,$$
$$J_n'(k)a_1+iJ_n'(ik)a_2=0,\quad J_n'(k)b_1+iJ_n'(ik)b_2=0.$$

因此, 本征频率 k 满足超越方程

$$\frac{J_n'(k)}{J_n(k)}=\frac{iJ_n'(ik)}{J_n(ik)},$$

其中虚单位事实上不再真的出现这一点, 可由贝塞尔函数的级数展开看出. 对于详细情形, 读者仍须参考文献.

5.7 关于本征函数法的一般性问题

在讨论了上面的一些例子之后, 我们现在来阐明这方法的核心内容.

5.7.1 振动及平衡问题

令 G 为空间自变数 $x,\cdots$ 的一个区域; 它可以是 x 轴上的一个区间, 也可以是 $x-y$ 平面上, 或 x,y,z 空间中的一个具有分段平滑的边界的区域. 设有一充满这区域的连续体, 其状态由一函数 $u(x,\cdots;t)$ 表征; u 恒等于零相当于稳定平衡. 设 $L[u]$ 是由于系统的势能的变化而引起的在 G 内确定的一个自伴线性微分式, 它包含空间变数 $x,\cdots.\rho(x,\cdots)$ 是质量密度. 亦为给定的空间的函数 $Q(x,\cdots,t)$ 是给定的外力. 我们的目的是去找微分方程

$$L[u] = \rho u_{tt} - Q \tag{33}$$

的解, 它满足预给在 G 的边界 Γ 上不含时间的齐次边界条件, 以及由关系

$$u(x, \cdots; 0) = \varphi(x, \cdots), \quad u_t(x, \cdots; 0) = \psi(x, \cdots)$$

所表示的预给的初态. 我们并设所有出现的微商都是连续的.

平衡的情形相当于假设所有函数都与 t 无关, 并且没有初条件. 这样我们就得到一个平衡的边值问题, 而不是初–边值混合的振动问题.

从自由运动中, 也就是说从齐次微分方程

$$L[u] = \rho u_{tt} \tag{33a}$$

的合于预给齐次边界条件的解之中, 我们通过“同步”: $u = v(x, \cdots)g(t)$ 的要求, 区别出所谓本征振动. 每一个这种本征振动有一常数 λ 与之相伴. 这常数即本征值, 它使 $\ddot{g} + \lambda g = 0$, 因之

$$g(t) = a \cos \sqrt{\lambda} t + b \sin \sqrt{\lambda} t,$$

并且

$$L[v] + \lambda \rho v = 0, \tag{34}$$

其中 v 必须满足上述为 u 而设的边界条件. 这种特殊性质的问题称为本征值问题, 它的内容是定参数 λ——本征值—— 使齐次微分方程 (34) 在预给的边条件之下, 有非零解 (本征函数). 于是满足原方程 (33a) 的解就具有以下形式

$$u = (a \cos \sqrt{\lambda} t + b \sin \sqrt{\lambda} t) v(x, \cdots).$$

在有限区域 G 的情形, 下述事实一般都是对的: 本征值 λ 成一可数的无穷序列 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$. 有一组相伴的本征函数 $v_1, v_2, \cdots$, 它是第 2 章 2.1 节中所述意义下的完备组, 各函数满足正交关系 [1)]

$$\int_G \rho v_i v_k d\tau = 0 \quad (i \neq k),$$

$$\int_G \rho v_i^2 d\tau = 1.$$

此外还有展开定理: 每一具有连续 $L[w]$ 的函数 w, 如果满足预给的齐次边界条件, 就可以依本征函数展为一个绝对并一致收敛的级数:

$$w = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu v_\nu, \quad c_\nu = \int_G \rho w v_\nu d\tau.$$

1) 符号 $\int_G f d\tau$ 的意思是把函数 $f(x, \cdots)$ 在区域 G 上积分.

根据这些性质 —— 对每一问题都需要加以证明 (参看 5.14 节)—— 我们得到一无穷序列的本征振动 $(a\cos\sqrt{\lambda_\nu}t+b\sin\sqrt{\lambda_\nu}t)(x,\cdots)$. 从这些本征振动我们得到 (33a) 的初值问题的解, 只要适当地选常数 a_ν, b_ν:

$$a_\nu=\int_G \rho\varphi v_\nu d\tau, \quad b_\nu=\frac{1}{\sqrt{\lambda_\nu}}\int_G \rho\phi v_\nu d\tau.$$

对于非齐次方程 (33), 假定边界条件是齐次的 (这假定并不损伤结果的普遍性; 这一点在 5.1 节和 5.2 节中已讨论到), 那么问题的解 $u(x,\cdots;t)$ 就可以用定 u 对 v_ν 的展开系数 $\gamma_\nu(t)$ 的方法求出. 这方法就是: 以 v_ν 乘 (33) 式, 把所得式子在 G 上积分, 然后用 5.1 节中的格林公式 (5a) 变换左方, 并应用边界条件及 v_ν 的本征值方程 (33), 得

$$\ddot{\gamma}_\nu+\lambda_\nu\gamma_\nu=Q_\nu(t),$$

其中 $Q_\nu(t)$ 是已知的 $Q(x,\cdots;t)\rho^{-1}$ 对 v_ν 的展开系数. 这方程的一个特解是

$$\gamma_\nu=\frac{1}{\sqrt{\lambda_\nu}}\int_0^t Q_\nu(\tau)\sin\sqrt{\lambda_\nu}(t-\tau)d\tau.$$

用这些系数作出的函数是 (33) 的一个特解. 所有其他的解可以从这特解加上 (33a) 的一个解得到. 因此所要讨论的初值问题化为解齐次方程 (33a).

平衡问题, 即微分方程

$$L[u]=-Q(x,\cdots)$$

在齐次边界条件下的边值问题, 也可以用本征函数的方法来处理. 我们同样得到方程 $\lambda_\nu\gamma_\nu=Q_\nu$, 从它求出所要的解 u 对 v_ν 的展开系数

$$\gamma_\nu=\frac{1}{\lambda_\nu}\int_G Qv_\nu d\tau.$$

于是按展开定理, 解为

$$u=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{v_\nu}{\lambda_\nu}\int_G Qv_\nu d\tau.$$

如果在这式子中, 积分和求和可以对调, 我们就会得到一个函数

$$K(x,\cdots,\xi,\cdots)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{v_\nu(x.\cdots)v_\nu(\xi,\cdots)}{\lambda_\nu},$$

用它可以把边值问题的解写为

$$u(x,\cdots)=\int_G Q(\xi,\cdots)K(x,\cdots;\xi,\cdots)d\tau,$$

其中的积分变量是 $\xi\cdots$. 这个函数 K 称为 $L[u]$ 的**"格林函数"**. 在 5.14 节中我们要用很不相同的方式来表征它. 它并将成为比现在的形式做法更深入一些的研究的出发点.

5.7.2 热传导及本征值问题

热传导的理论同样也导致本征值问题. 适当地选择时间和长度的单位, 热传导方程可写为

$$L[u] = u_t,$$

其中 u 表示温度, 为位置 (x, y, z) 和时间 t 的函数. 从一边界面为 Γ 的均匀物体 G 向周围温度恒等于零的无穷媒质的热辐射在表面 Γ 上可以用边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = 0$$

来表征, 其中 σ 是一个正的物理常数. 这条件说明这样的情况: 沿内法线方向的温度变化率和由物体外部到内部的温度跃变成正比. 我们要找热传导方程的一个解, 使它满足这一边界条件和预给的, 在 $t = 0$ 时的初条件.

把 u 写为 $u = v(x, y, z)g(t)$, 立得方程

$$\frac{L[v]}{v} = \frac{\dot{g}}{g} = -\lambda.$$

因此我们就有了下面的关于 v 的本征值问题: 在 G 内 $L[v] + \lambda v = 0$, 在表面 Γ 上 $\partial v/\partial n + \sigma v = 0$; 对于一本征值 λ 及其本征函数 v, 微分方程的相应解具有形状

$$u = ave^{-\lambda t}.$$

利用展开定理可以使解满足一给定的初态, 即, 使 $u(x, y, z; 0)$ 等于一任意给定的函数 $\varphi(x, y, z)$, 这函数在 G 内连续并有连续的一、二阶微商, 而且满足边界条件. 因为如果本征函数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ 及其相属的本征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ 成一完备系, 那么所求的解就可以由公式

$$u(x, y, z; t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x, y, z)e^{-\lambda_n t}$$

给出, 其中 $c_n = \iiint_G \varphi v_n dxdydz$.

附带提一下, 由于本征值 λ 是正的这一特性, 解 $u(x, y, z; t)$ 当 t 增加时渐近地趋于零, 正如问题的物理性质所预期的那样.

如果考虑的不是热传导的齐次方程而是非齐次方程

$$L[u] = u_t - Q(x, y, z),$$

其中假定了函数 Q 不含时间, 那么在与前相同的 u 的边界条件下, 用我们的一般方法可得一解, 这解当 $t \to \infty$ 时变成方程

$$L[u] = -Q(x, y, z)$$

的相应边值问题的解.

5.8 三维连续体的振动、分离变数法

在三维连续体的振动理论 (例如声学、弹性学或电动力学) 中, 要处理的方程是

$$\Delta u = u_{tt},$$

其中 Δu 是含三个变数的势表示式. 这方程所引起的边值问题是方程

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

加上相应的齐次边界条件.

常常有这样的情形：基本区域的特殊形状容许我们把这边值问题的解的变数作进一步的分离. 因此得到包含较少个自变数的若干新边值问题.

下述情形就是一个例子：在 $x-y$ 平面的区域 G 上立起一个两端以平面 $z=0$ 和 $z=\pi$ 为界的柱形区域. 取 $u=0$ 为边界条件. 用代换 $u=f(z)v(x,y)$, 这问题立刻可以化为平面区域 G 上的相应问题而我们得到

$$-\frac{f''}{f}=\frac{\Delta v}{v}+\lambda=k=\text{常量},$$

$$f=\sin\sqrt{k}z$$

其中 $k=1^2,2^2,3^2,\cdots.v$ 的方程为 $\Delta v+(\lambda-n^2)v=0$, 它的本征值和相应于平面区域 G 的本征值只差 $-n^2$ 这一项, 而两者的本征函数则全同.

像以前屡次说过的那样, 可以从本征函数组的完备性知道我们所得到的就是柱体问题在所给边值下的全部本征函数.

如果柱体树立在一矩形区域上, 那区域就是一个矩形六面体, 例如 $0\leqslant x,y,z\leqslant\pi$ 的立方, 这时我们得到本征值 $l^2+m^2+n^2(l,m,n=1,2,3,\cdots)$ 和本征函数 $\sin lx\sin my\sin nz$.

作为另一个例子我们考虑. 一个半径为 1 的圆球区域 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$ 的振动方程. 引入球极坐标 r,θ,φ, 振动方程变为 (参看第 4 章 4.8.2 小节)

$$\Delta u+\lambda u=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2u_r\sin\theta)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{u_\varphi}{\sin\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}(u_\theta\sin\theta)\right]+\lambda u=0.$$

假定我们要找形式为 $u=Y(\theta,\varphi)f(r)$ 的解, 即得

$$\frac{(r^2f')'+\lambda r^2f}{f}=-\frac{1}{Y\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{Y_\varphi}{\sin\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}(Y_\theta\sin\theta)\right]=k,$$

k 为一常数. 常数 k 必须这样决定, 使微分方程

$$\Delta^*Y+kY=\frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{Y_\varphi}{\sin\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}(Y_\theta\sin\theta)\right]+kY=0$$

有一个在整个球面上连续的解. 所以这解必须是 φ 的周期函数, 周期为 2π, 并且在 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 处正规 (即在这两点函数都趋于一与 φ 无关的极限). 在 7.5 节中我们将看到, 这一要求只有在 $k=n(n+1)(n=0,1,2,\cdots)$ 时才得到满足; 这时, 解是球调和函数 $Y_n(\theta,\varphi)$(参看一下 5.9 节). 对于 $f(r)$ 我们有方程

$$(r^2f')'-n(n+1)f+\lambda r^2 f=0,$$

它的在 $r=0$ 为正规的解是函数

$$S_n(\sqrt{\lambda}r)=\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}r)}{\sqrt{r}}$$

(参考 5.5 节和 5.10 节). 现在我们来从边界条件定参数 λ. 例如边界条件是 $u=0$, 则 λ 由方程 $J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda})=0$ 决定. 令 $\lambda_{n,1},\lambda_{n,2},\cdots$ 表这方程的根, 我们得到边值问题的解 $u=Y_n(\theta,\varphi)S_n(\sqrt{\lambda_{n,h}}r)$. 在第 7 章 7.5 节中我们将证明, 这些解形成一完备正交系, 因此也就给出微分方程的全部本征函数及本征值.

5.9　本征函数和势论中的边值问题

势论中的边值问题是: 决定一函数 u, 使它在区域 G 的内部满足微分方程 $\Delta u=0$, 在边界上取预给的值. 按照 5.1 节和 5.2 节中所述, 这可以化为在边值条件 $u=0$ 下解非齐次方程 $\Delta u=f$ 的问题. 后者可用 5.7 节中把 f 和 u 按方程

$$\Delta v+\lambda v=0$$

的本征函数展开的方法来求解. 但对于适当的特殊区域 G, 我们可以改用较简单的方法: 分离变数把问题中自变量的数目变少. 下面我们用几个重要的例子来说明这步骤.

5.9.1　圆、球、球壳

我们先看两个自变量的情形; 取半径等于 1 以原点为心的圆为 G. 用极坐标写 Δu 可得下述边值问题: 求方程

$$r(ru_r)_r+u_{\varphi\varphi}=0$$

在预给边值 $u(1,\varphi)=f(\varphi)$ 条件下的解, 此处 $f(\varphi)$ 是一个周期为 2π 并具有分段连续一阶微商的连续周期函数. 假设我们暂时不管边界条件而要求找这齐次方程的形如 $u=v(r)w(\varphi)$ 的解, 则它和通常情形一样引到本征值问题

$$w''+\lambda w=0;$$

边界条件为周期条件 $w(0)=w(2\pi), w'(0)=w'(2\pi)$. 这问题的本征值是 $\lambda=n^2$ (n 为整数), 相属的本征函数为 $w=a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi$. 对于 $v(r)$ 我们得到方程 $r(rv')'-n^2v=0; v=r^n$ 和 $v=r^{-n}$ 是这方程的两个线性无关的解. 于是我们得到原方程在圆内为正规的特解

$$(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi)r^n,$$

其中 a_n 和 b_n 是任意常数 (这些解的特征也可以这样刻画: 它们是微分方程 $\Delta u=0$ 的解, 而且是 x 和 y 的 n 次齐次整有理函数).

按傅氏级数的理论, 我们可以用叠加的手续得到这边值问题所要的解

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}r^n(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi),$$

系数 a,b 是预给边值的傅氏系数 (参考第 4 章 4.2 节).

三维的情形与此十分相似. 取单位球 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$ 作为 G; 这时, 出现的就不是三角函数而是拉普拉斯的球调和函数. 事实上, 用极坐标 r,θ,φ 可以把方程变为

$$(r^2u_r)_r+\frac{1}{\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi}+\frac{1}{\sin\theta}(u_\theta\sin\theta)_\theta=0,$$

再设 $u=v(r)Y(\theta,\varphi)$, 即得 v 之微分方程

$$(r^2v')'-\lambda v=0, \tag{35}$$

它的通解是

$$v=c_1r^{\alpha_1}+c_2r^{\alpha_2},$$

c_1,c_2 是任意常数而 α_1,α_2 则是二次方程

$$\alpha(\alpha+1)=\lambda$$

的根.

关于 Y, 我们得到和 5.8 节中相同的本征值问题, 其中的微分方程是

$$\Delta^*Y+\lambda Y=\frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}Y_{\varphi\varphi}+(Y_\theta\sin\theta)_\theta\right]+\lambda Y=0; \tag{36}$$

λ 必须如此决定, 使这方程有一非零解, 并且这解在整个球体中具有直到二阶的连续微商.

对于 $Y(\theta,\varphi)$ 我们的要求是, 在球的极点 $\theta=0$, $\theta=\pi$, 它也要正规. 这要求的正确性可以这样来看出: 算子 Δ 在坐标系转动下是不变的, 而 $r=1$ 时 Δ 变为 Δ^*, 故此 Δ^* 在坐标转动下也不变. $\theta=0,\theta=\pi$ 之所以是方程 (36) 的奇点, 完全

是坐标系的一种特殊选择的结果. 因此, 很自然地要求球的两极是函数 Y 的正规点 (换言之, 作为球面上位置的函数, Y 应处处满足同样的正规性条件).

要决定本征值 λ 及相属的本征函数 Y, 最简单的方法和 5.8 节类似, 是去研究 $\Delta u = 0$ 的那些是 x, y, z 的 n 次齐次整有理函数的解 $u = U_n$. 把这些解用极坐标写成 $U_n = r^n Y_n(\theta, \varphi)$, 就可以看出 Y_n 是方程 (36) 的解. 和这 $(2n+1)$ 个 Y_n 函数相应的本征值算出来是

$$\lambda = n(n+1).$$

在第 7 章 7.5 节中将证明, 这样定出来的函数 Y_n 乃是我们问题中本征函数的全体.

还有, 我们可以证明完备性和展开定理, 证法和对于施图姆–刘维尔函数所用的相似. 根据展开定理, 把解叠加成 $u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n Y_n$, 就可以找到 $\Delta u = 0$ 的一个解它在球面上取预给之值.

不但函数 $u = r^n Y_n$ 而且 $u = r^{-(n+1)} Y_n$ 也是 $\Delta u = 0$ 的解, 虽然后者在零点有一奇点. 因此把 $r^n Y_n$ 和 $r^{-(n+1)} Y_n$ 两解叠加, 我们可以找到 $\Delta u = 0$ 的一个解它在两同心球上取预给的值, 在两球壳之间正规.

如果特殊地考虑那些只与 θ 有关而与 φ 无关的球调和函数 (就是说, 如果假定 $Y_\varphi = 0$), 那么微分方程的形式为

$$\frac{1}{\sin\theta}(Y_\theta \sin\theta)_\theta + \lambda Y = 0.$$

令 $x = \cos\theta$, 这方程就变为勒让德多项式的方程 (参考第 2 章方程 (20)). 勒让德多项式 $P_n(\cos\theta)$ 是球调和函数的一种特例.

如果我们考虑球面上一任意区域 G, 并试求微分方程 (36)

$$\Delta^* Y + \lambda Y = 0$$

之解 $Y(\theta, \varphi)$, 要它在 G 内正规, 在 G 的边界上满足齐次边界条件 (例如要求函数在那里为零), 那我们就得到球调和函数的推广. 属于这区域的本征函数 $Y_1, Y_2, \cdots$ 称为球面调和函数 [1]. 从上面的计算可知, 如果 α 和 λ 之间满足关系

$$\alpha(\alpha+1) = \lambda,$$

那么函数 $r^\alpha Y(\theta, \varphi) = u(x, y, z)$ 就是微分方程 $\Delta u = 0$ 的解, 它在以球心为顶点以 G 为底的锥体中 (顶多除去原点) 连续.

1) 参考 W. Thomson 和 P. G. Tait 合著的 Treatise on Natural Philosophy, 卷一. Cambridge: Cambridge University Press, 171-218 页, 1886.

球面调和函数的方程 $\Delta^*Y+\lambda Y=0$ 是普遍微分方程

$$\Delta^*Y+\lambda Y=\frac{1}{\sqrt{eg-f^2}}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{e\dfrac{\partial Y}{\partial y}-f\dfrac{\partial Y}{\partial x}}{\sqrt{eg-f^2}}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{g\dfrac{\partial Y}{\partial x}-f\dfrac{\partial Y}{\partial y}}{\sqrt{eg-f^2}}\right)+\lambda Y=0$$

的一个特例; 这普遍方程对应于一以 $ds^2=edx^2+2fdxdy+gdy^2$ 为线元素的任意曲面. 在第 4 章 4.8.2 小节中, 我们注意到这方程的不变性. 它可以看作是由面上一“曲形膜”的振动方程. 如果曲面是一个球, 那么引用极坐标, 这方程就变为方程 (36).

5.9.2 柱形区域

另一个能够明晰地解出的例子就是势论中对于柱形区域的边值问题; 柱体树立在 $x-y$ 平面的区域 G 上, 以平面 $z=0$ 和 $z=\pi$ 为界. 我们设柱体侧面上的边值恒等于零, 在两个底平面上, 边值为任意的可以两次连续微分的函数, 它们在两底的周界 Γ 上等于零. 现在我们来找 $\Delta u=0$ 的形如 $u=f(z)v(x,y)$ 的解, 并如前得到 f 和 v 的微分方程 $f''/f=-\Delta v/v=\lambda$, 其中 λ 如此来定, 使存在一在 Γ 上等于零的本征函数 $v(x,y)$. 设 $v_1,v_2,\cdots$ 是完备的本征函数组, $\lambda_1,\lambda_2\cdots$ 为相应本征值, 那么, 由展开定理, 我们就可以定出无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_ne^{\sqrt{\lambda_n z}}+b_ne^{-\sqrt{\lambda_n z}})v_n(x,y)$ 中的系数 a_n,b_n 使极数当 $z=0$ 和 $z=\pi$ 分别取边界值. 这级数就是我们的边值问题的解, 只要它本身以及将它逐项微分一次和二次 (任意对 x,y 或 z) 所得的级数一致收敛.

5.9.3 拉梅问题

在实质上, 用分离变数法, 把势论中的边值问题约化为单个变量的函数的本征值问题的最普遍情形的*共焦矩形六面体*的情形. 所谓共焦矩形六面体就是这样的区域, 它的界面是: 两椭球面的各一部分, 两单叶双曲面的各一部分和两双叶双曲面的各一部分; 这些面都属于同一共焦族.

$$\frac{x^2}{s-e_1}+\frac{y^2}{s-e_2}+\frac{z^2}{s-e_3}=1$$

(参考第 4 章 4.8.4 小节). *差不多所有通常能明晰地处理的边值问题都可以看做是这“拉梅”问题的特殊或极限情形。*如果我们引用椭球坐标 $\rho=f(u),\sigma=g(v),\tau=h(w)$ (按第 4 章中所用符号), 则势方程 $\Delta T=0$ 成为

$$\Delta T=\frac{[g(v)-h(w)]T_{uu}+[f(u)-h(w)]T_{vv}+[f(u)-g(v)]T_{ww}}{[g(v)-h(w)][f(u)-h(w)][f(u)-g(v)]}=0.$$

显然，我们可以得到形如

$$T = U(u)V(v)W(w)$$

的解, 如果我们能够找到两个任意常数 λ, μ 使下面三个常数分方程得以满足

$$U'' + [\lambda f(u) + \mu]U = 0, \tag{37}$$

$$V'' - [\lambda g(v)] + \mu V = 0, \tag{38}$$

$$W'' + [\lambda h(w) + \mu]W = 0. \tag{39}$$

各方程中的变数 u, v, w 分别位于下述区间内:

$$u_2 \leqslant u \leqslant u_1, \quad v_2 \leqslant v \leqslant v_1, \quad w_2 \leqslant w \leqslant w_1.$$

这些区间是由下列条件定出来的:

$$\rho_2 \leqslant f(u) \leqslant \rho_1, \quad \sigma_2 \leqslant g(v) \leqslant \sigma_1 \quad \tau_2 \leqslant h(w) \leqslant \tau_1.$$

因此, 六面体为下述形式的条件所确定

$$\rho_1 \geqslant \rho \geqslant \rho_2 \geqslant \sigma_1 \geqslant \sigma \geqslant \sigma_2 \geqslant \tau_1 \geqslant \tau \geqslant \tau_2.$$

以坐标 ρ, σ, τ 代替 u, v, w 并一般地以 s 表自变量, Y 表因变量, 这时方程 (37), (38) 和 (39) 可以统写为

$$\varphi(s)\frac{d^2Y}{ds^2} + \frac{\varphi'(s)}{2}\frac{dY}{ds} + (\lambda s + \mu)Y = 0,$$

其中

$$\varphi(s) = 4(s - e_1)(s - e_2)(s - e_3).$$

这方程 (*拉梅方程*) 的解是与常数 λ, μ 的选择有关的函数. 这些函数一般不能表为初等超越函数. 它们称为*拉梅函数*. 这些函数已被广泛地研究过, 虽然对于它们的数值计算的方法发展得还较少. 这里, 我们只说出相关的本征值问题. 很清楚, 如果对于特殊情形：在共焦六面体的五个面上边值等于零, 势论的边值问题得到解决, 那么势论的一般边值问题也就得到解决. 这时, 普遍边值问题的解是六个这种特殊解的和. 例如, 假定对于 $\tau = \tau_2$ 指定了非零的边值. 我们要找拉梅方程 (37), (38), (39) 的解 U, V, W，使有 $U(u_1) = U(u_2) = V(v_1) = V(v_2) = W(w_1) = 0$，而 $W(w_2)$ 不受限制. 这样, 乘积

$$T = U(u)V(v)W(w)$$

将是 $\Delta T = 0$ 的一个解, 它当 $\rho = \rho_2$, $\rho = \rho_1$, $\sigma = \sigma_2$, $\sigma = \sigma_1$, $\tau = \tau_1$ 时为零. 但是, 我们将看到, 所给条件并非对于任意选择的 λ, μ 都满足. 因此, 我们有了一种新的

本征值问题, 即所谓两个参量的本征值问题, 在这问题中, 相属成对的本征值 λ, μ 必须这样来定, 使方程 (37) 和 (38) 有分别在 $u = u_1, u = u_2$ 和 $v = v_1, v = v_2$ 处为零的解.

这一本征值问题与普遍单参量的问题相似: 存在无穷对本征值 λ_i, μ_i 及相应的解 U_i, V_i. 任何一个 u, v 的函数, 只要在矩形 $u_2 \leqslant u \leqslant u_1, v_2 \leqslant v \leqslant v_1$ 中连续并有直到二阶的连续微商, 而且在矩形的边界上等于零, 它就可以展为一绝对且一致收敛的级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i U_i(u) V_i(v);$$

级数是对所有与本征值对相应的拉梅乘积 $U_i(u) \cdot V_i(v)$ 求和. 还有, 对应于不同本征值对的拉梅乘积满足正交关系

$$\int_{u_2}^{u_1} \int_{v_2}^{v_1} [f(u) - g(v)] U_i(u) V_i(v) U_k(u) V_k(v) dv du = 0.$$

要解我们的边值问题, 我们对每一对本征函数 U_i, V_i 附一函数 $W_i(w)$, 这函数当 (39) 式中的 $\lambda = \lambda_i, \mu = \mu_i$ 时满足 (39), 且常 $w = w_1$ 时等于零 (根据微分方程理论的一般存在定理这样一个解存在). $W_i(w)$ 当 $w = w_2$ 时不等于零, 否则 $T = UVW$ 就会是 $\Delta T = 0$ 的边值为零的非零解, 而这是和势论的基本事实矛盾的.

于是在 $w = w_2$ 处的边值可以展为级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i W_i(w_2) U_i(u) V_i(v),$$

而级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i U_i(u) V_i(v) W_i(w)$$

代表所求的对于六面体的势论边值问题的解. 上面并于展开定理的表述似乎要求 T 的边界值在六面体的各边上等于零. 但事实上这限制是不必要的, 进一步研究会看出这点.

我们的变参量本征值问题很容易化为一单参量问题; 自然, 结果是一偏微分方程, 令 $Z(u,v) = U(u)V(v)$, 其中 $U(u)$ 是方程 (37) 的解, $V(v)$ 是方程 (38) 的解. 以 V 乘第一个方程, U 乘第二个方程, 相加, 就得到 $Z(u, v)$ 的偏微分方程

$$Z_{uu} + Z_{vv} + \lambda[f(u) - g(v)]Z = 0. \tag{40}$$

这微分方程也可以直接从 $\Delta T = 0$, 设 $T = Z(u,v)W(w)$ 而得到. 显然, 本征值 $\lambda = \lambda_i$, 及其相属的本征函数 $Z_i = U_i(a)V_i(v)$ 是微分方程对于矩形 $G: u_2 \leqslant u \leqslant u_1$,

$v_2 \leqslant v \leqslant v_1$ 及边界条件 $Z=0$ 这一本征值问题的解. 由于 (40) 具有 $\Delta Z+\lambda\rho Z=0$ 的形式, 其中函数 $\rho=f(u)-g(v)$ 在整个矩形 G 中是正的, 所以这本征值问题和上面讨论过的是一类的; 我们也有类似的关于本征值的存在及依本征函数的展开定理等问题. 这些问题将在以后讨论[1]. 目前我们假定对于矩形 G 存在无穷个本征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$ 以及相属的在边界上为零的本征函数 $Z_1,Z_2,\cdots$; 一任意函数可以依 λ_i 和 Z_i 如上述展开. 现在我们来证明所有本征函数 Z_i 都是拉梅乘积 $U(u)V(v)$, 或至多是有限多个属于同一本征值 λ 的拉梅乘积之和.

证明: 令 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$ 及 $Z_1,Z_2,\cdots$ 表示 (40) 的本征值和相应本征函数的完备系. 设 λ_h 为某一本征值, 我们来看常微分方程

$$\frac{d^2X}{du^2}+[\lambda_h f(u)+\mu]X=0$$

的本征值问题; 边界条件为 $u=u_1$ 和 $u=u_2$ 时 $X=0$. 以 $\mu_1,\mu_2,\cdots$ 和 $X_1,X_2,\cdots$ 分别表示那无穷多个相属的本征值和本征函数. 任何一个在区间 $u_2\leqslant u\leqslant u_1$ 中连续且有直到二阶的连续微商并在 $u=u_1$ 和 $u=u_2$ 之处为零的函数, 可以依这些本征函数展开. 特别地, 对于含 v 作参量的函数 $Z(u,v)$ 说来, 这样的展开成立. 我们把这展开写为

$$Z(u,v)=\sum_{n=1}^{\infty}=Y_n(v)X_n(u),$$

其中

$$Y_n=\int_{u_2}^{u_1}Z(u,v)X_n(u)du.$$

把 Y_n 对 v 微分两次并用分部积分, 得

$$\begin{aligned}\frac{d^2Y_n}{dv^2}&=\int_{u_2}^{u_1}Z_{vv}(u,v)X_n(u)du\\&=\int_{u_2}^{u_1}\{-Z_{uu}-\lambda_h[f(u)-g(v)]Z\}X_n du\\&=\int_{u_2}^{u_1}Z\left(-\frac{d^2X_n}{du^2}-\lambda_h[f(u)-g(v)]X_n\right)du\\&=[\mu_n+\lambda_h g(v)]Y_n.\end{aligned}$$

这表示 Y_n 是方程 (38) 在区域 $v_2\leqslant v\leqslant v_1$ 及所给边界条件下的一个本征函数. 换言之, λ_h,μ_n 两数及其相属函数 $X_n(u),Y_n(v)$ 组成我们的双参量本征值问题的解, 只要 $Y_n(v)$ 不恒等于零. 但从开头的考虑知道, 每一乘积 X_nY_n 都是 (40) 的相应于本征值 λ_h 的一个本征函数, 而对于这微分方程, 每一本征值只能有有限的重数

1) 参看 5.14 节及 5.15 节.

(在下节中证明). 因此, 在这些以 u 和 v 为变量的函数 X_nY_n 中, 只能有有限的 k 个是线性独立的. 此外, 我们还可以假定没有一个 X_n 或 Y_n 恒等于零, 因为如果不然, 那就可以干脆地略去这样的项. 由此可知, 任意 $k+1$ 个乘积 X_nY_n 都满足一个线性关系

$$\sum_{\nu=1}^{k+1} c_\nu X_{n\nu} Y_{n\nu} = 0.$$

如果对变量 v 指定数值且使所有的 Y_{n_ν} 都不等于零, 则上式变为 X_{n_ν} 之间的一个线性方程. 但这不可能, 因为属于不同本征值 μ 的本征函数是线性独立的. 因此, 展开式 $Z = \Sigma X_nY_n$ 最多只能有 k 项, 这就是我们所要证明的.

现在我们可以在所指出的限制下把一个任意函数依本征函数 Z_i 展开而得下述结果: 任一函数, 只要它在矩形 $u_2 \leqslant u \leqslant u_1, v_2 \leqslant v \leqslant v_1$ 中连续, 并有直到二阶的连续微商, 且在矩形的边上等于零, 它就可以展为一拉梅乘积的级数.

5.10 施图姆–刘维尔型问题、奇异边界点

分离变数所导致的本征值问题常常是施图姆–刘维尔型微分方程的本征值问题. 方程的形式为

$$(pu')' - qu + \lambda\rho u = 0,$$

但与 5.3 节中处理过的有所不同, 那就是, 在基本区域的端点有方程的奇点出现, 譬如 $p(0) = 0$. 根据问题的性质, 我们在这些奇异端点加上一些条件, 例如要求解连续或有界, 或趋于无穷但不超过一定的阶. 这些条件代替了以前的齐次边条件.

5.10.1 贝塞尔函数

以贝塞尔方程 (参考 5.5.5 小节)

$$(xu')' - \frac{n^2}{x}u + \lambda xu = 0 \tag{41}$$

为例 (这方程是数学物理中最常见的). 对于这方程, 由于 $p(0) = 0$, 5.3.3 小节中所作的假定 —— 在整个基本区域 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 中 $p > 0$—— 不成立. 换言之, $x = 0$ 这一点是贝塞尔方程的奇点, 要求解在这点保持有限就代表一边界条件. 在这种情形中, 我们的问题是要找一个解, 它在 $x = 0$ 处保持有限, 在 $x = 1$ 处, 譬如说为零. 这问题的本征函数就是贝塞尔函数 $J_n(\sqrt{\lambda}x)$, 其中本征值 $\lambda = \lambda_{n,m}$ 由在 $x = 1$ 处的边界条件定出为一超越方程的诸根.

与此相伴的正交函数 $z = \sqrt{x}J_n(\sqrt{\lambda}x)$ 可用方程

$$z'' - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2}z + \lambda z = 0 \tag{42}$$

来表征; 这方程可直接从贝塞尔方程得到 (这里我们用的是 5.3.3 小节中所说的普遍变换的一个特例.) 对函数 $\zeta = z/x = J_n(\sqrt{\lambda}x)/\sqrt{x}$ 我们得到方程

$$(x^2\zeta')' - \left(n^2 - \frac{1}{4}\right)\zeta + \lambda x^2\zeta = 0. \tag{43}$$

5.10.2 任意阶的勒让德函数

施图姆–刘维尔型方程

$$[(1-x^2)u']' + \lambda u = 0 \tag{44}$$

也是属于上述类型的问题. 边界条件为: 在方程的两个奇点 $x = +1$ 和 $x = -1$ 处, u 保持有限. 基本区域是 $-1 \leqslant x \leqslant +1$. 我们从第 2 章 2.8 节知道 $\lambda = n(n+1)$ 是本征值, 勒让德函数 $P_n(x)$ 是本征函数.

很容易证明, 勒让德多项式是这本征值问题的唯一的解. 例如, 我们可以从第 2 章 2.8 节所证明的, 勒让德函数作成一完备正交系这一事实来推出这一点. 下面我们给出另外一种不依赖于上述事实的证法. 我们注意到, 任何一个函数 $u = f(x)$, 如果它满足方程 (44), 那么函数 $u = f(-x)$ 也满足这方程. 显然, 函数 $f(x)+f(-x)$ 和 $f(x)-f(-x)$ 也都是解, 其中一个是偶函数, 另一个是奇函数, 并且至少有其中之一不恒等于零, 因为按假设, u 是不恒等于零的. 于是, 我们只要证明, (44) 的每一个在 $-1 \leqslant x \leqslant +1$ 中连续的偶函数和奇函数解 u 都是勒让德多项式, 并且 λ 必须是形如 $n(n+1)$ 的数目即可. 如果把解 (它是解析的) 写成一幂级数: $u = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$, 立刻从方程 (44) 得递推公式

$$a_\nu = \frac{(\nu-1)(\nu-2)-\lambda}{\nu(\nu-1)} a_{\nu-2}. \tag{45}$$

如果 u 是偶函数, 所有 ν 为奇数的 a_ν 都要等于零. 如果 u 是奇函数, 所有 ν 为偶数的 a_ν 都应如此. 如 $\nu - 2h > 0$, 则由 (45) 立得

$$a_\nu = \frac{1}{\nu}\left[1 - \frac{\lambda}{(\nu-1)(\nu-2)}\right]\left[1 - \frac{1}{(\nu-3)(\nu-4)}\right]\cdots$$
$$\cdots\left[1 - \frac{\lambda}{(\nu-2h+1)(\nu-2h)}\right] k a_k, \tag{46}$$

其中 $k = \nu - 2h$. 当且仅当 λ 形如 $n(n+1)$ 时, u 的级数才有有限项数. 在这样的情形中, 我们立刻看出 u 是第 n 个勒让德多项式. 对于 λ 的所有其他值, 我们得到的都是一个无穷级数, 这级数按初等判别法对于 $|x| < 1$ 收敛. 我们把 k 固定得很大, 使上述乘积中所有的因子都是正的 (a_k 可以假设是正的). 根据熟知的定理,

(46) 式右方当 $\nu \to \infty$ 时收敛于一正极限; 因此, 当 $\nu > k$ 时 $a_\nu > c/\nu, c$ 是一个正的常数. 这样, $\sum_{n=k}^{\nu} a_n x^n$ 的绝对值就可以任意大, 只要 $|x|$ 足够地接近于 1 而 ν 足够大. 这表示 $\lim_{x \to \pm 1} |u(x)| = \infty$, 因此 λ 不是本征值 [1].

我们很容易从勒让德多项式的微分方程用一具有普遍性的方法导出其他种类的正交本征函数组. 这方法是: 把 (44) 式对 x 求微商, 得到函数 $u'(x)$ 的一个微分方程. 如前, 只有当 $\lambda = n(n+1)$ 时才有在区间两端都是正规的一个解, 那就是 $P_n'(x)$. 这样所得的关于 $P_n'(x)$ 的方程还不是自伴的. 引进 $P_n'(x)\sqrt{1-x^2} = z_n$ 作为未知函数, 我们可以使它自伴; 新方程为

$$[(1-x^2)z']' - \frac{z}{1-x^2} + \lambda z = 0.$$

其相属本征值为 $\lambda = n(n+1)(n = 1, 2, 3, \cdots)$, 本征函数为

$$z_n = \sqrt{1-x^2} P_n'(x).$$

函数 $z_n = P_{n,1}(x)$ 称为**第一阶的联属勒让德函数** (函数 $P_n(x) = P_{n,0}(x)$ 有时也称为第零阶的勒让德函数). 勒让德函数 $P_{n,1}(x)$ 满足正交关系

$$\int_{-1}^{1} P_{n,1} P_{m,1} dx = 0 \quad 若 m \neq n.$$

同样, 微分 (44) h 次, 我们得到函数

$$(1-x^2)^{h/2} \frac{d^h}{dx^h} P_n(x) = P_{n,h}(x)$$

的微分方程

$$[(1-x^2)z']' - \frac{h^2 z}{1-x^2} + \lambda z = 0, \tag{47}$$

其本征值为 $\lambda = n(n+1)(n = h, h+1, \cdots)$, 相属本征函数为 $P_{n,h}(x)$, 它们也是相互正交的, 这些函数称为**第 h 阶的联属勒让德函数**. 它们可以用易于验证的方程

$$\int_{-1}^{1} P_{n,h}^2 dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+h)!}{(n-h)!}$$

来规一化. 可以证明, 我们所得的是 (47) 的全部本征值和本征函数. 证明的方法和用于勒让德多项式的相同.

---

1) 上述讨论与阿贝尔或高斯的收敛判别法密切相关; 参考 A. Kneser. Zur Theorie der Legendreschen Polynome. Tôhoku Math. J., 第 v 卷, 1914, 第 1-7 页.

5.10.3 雅可比及切比雪夫多项式

第 2 章 2.9 节中的*雅可比多项式*是勒让德多项式的推广. 这些多项式的微分方程可以写成下面施图姆–刘维尔的形式:

$$[(1-x^2)^{p-q+1}x^q u']' + \lambda(1-x)^{p-q}x^{q-1}u = 0.$$

第 n 个雅可比多项式所属的本征值是 $\lambda = n(p+n)$, 边界条件为: 解在 $x=0$ 和 $x=1$ 保持有限. 和上面一样, 有两个方法来证明雅可比多项式是这本征值问题的唯一的解.

还有一个例子就是*切比雪夫多项式*, 它相应于施图姆–刘维尔型方程

$$(\sqrt{1-x^2}u')' + \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}u = 0,$$

边界条件为解在 $x=\pm 1$ 处正规. 切比雪夫多项式 $T_n(x)$ 的相应本征值是 $\lambda = n^2$. 和以前一样, 这些 λ 和 T_n 已包括所有的本征值及本征函数.

5.10.4 埃尔米特及拉盖尔多项式

埃尔米特多项式 $u = H_n(x)$ 及其相应的正交函数 $v = H_n e^{-x^2/2}$ 可分别表征为本征值问题 (参考第 2 章 2.9.4 小节)

$$(e^{-x^2u'})' + \lambda e^{-x^2}u = 0 \tag{48}$$

及

$$v'' + (1-x^2)v + \lambda v = 0 \tag{49}$$

的解, 本征值为 $\lambda = 0, 2, 4, \cdots$. 基本区域是整条直线 $-\infty < x < +\infty$, 边界条件 (对 (48) 说) 是: 本征函数 u 在 $x = \pm\infty$ 处趋向无穷, 但不超过 x 的有限次幂. 要证明埃尔米特本征值问题没有其他的解, 可将方程 (48) 写成 $u'' - 2xu' + \lambda u = 0$, 将 u 写成幂级数 $u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. 我们可以设 u 是一个偶函数或奇函数 (见前关于方程 (44) 的讨论), 因之在幂级数中只有 x 的偶次或奇次幂出现. 从微分方程可得到关于非零系数的递推公式

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{2n-\lambda}{(n+1)(n+2)}.$$

因此, 或者级数中断 —— 当 $\lambda = 2n$ 为非负偶整数 —— 而成埃尔米特多项式 H_n, 或者级数有无穷多个不等于零的系数而对 x 的所有数值均收敛. 但当 $2n-\lambda$ 成为正数时, 所有出现的系数 a_n 都将是同号的. 这时, 在第二种情形中出现 $a_n x^n$ 各项, 其指数 n 任意大, 因此, u 在 $x=+\infty$ 之处趋向无穷, 其阶数超过 x 的任何有限次

幂. 所以这样的 u 不能是一个本征函数, 而只有埃尔米特多项式才是这本征值问题的唯一的解.

由于在 5.12.4 小节中要应用的原故, 我们较详细地来讨论拉盖尔多项式. 这里, 基本区域是正实轴 $0 \leqslant x < +\infty$. 按第 2 章 2.9 节, 拉盖尔多项式所满足的本征值方程 (本征值 $\lambda = n, n$ 为一正整数) 为

$$xu'' + (1-x)u' + \lambda u = 0 \tag{50}$$

或, 写成自伴式,

$$(xe^{-x}u')' + \lambda e^{-x}u = 0.$$

边界条件是: u 在 $x=0$ 点保持有限, 而当 $x \to \infty$ 时 u 趋向无穷, 但不超过 x 的有限次幂. 对于相属的正交函数

$$v = \omega_n = e^{-x^2/2}L_n$$

我们得到施图姆–刘维尔的本征值方程

$$(xv')' + \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{4}\right)v + \lambda v = 0,$$

边界条件是要求解在 $x=0$ 处正规. 最后, 我们指出, 以后在 5.12.4 小节中出现的函数

$$w = S_n = x^{-1/2}\omega_n$$

满足自伴的本征值方程

$$(x^2w')' - \frac{x^2-2x-1}{4}w + \lambda xw = 0,$$

边界条件为: 解在 $x=0$ 处等于零, 相应的本征值总是正整数 $\lambda = n$.

像在第 2 小节中关于勒让德函数的情形一样, 用微分并乘以适当因子的手续可以导出高阶的拉盖尔函数, 它们满足类似的微分方程. 微分 (50)m 次, 我们得函数

$$u = L_n^m(x) = \frac{d^m}{dx^m}L_n(x),$$

它们满足微分方程

$$xu'' + (m+1-x)u' + (\lambda - m)u = 0. \tag{51}$$

这方程可以写成下面的自伴式:

$$(x^{m+1}e^{-x}u')' + x^m e^{-x}(\lambda - m)u = 0.$$

联属的正交函数

$$v=\omega_n^m=x^{m/2}e^{-x/2}L_n^m$$

满足施图姆–刘维尔方程

$$(xv')'+\left(\frac{1-m}{2}-\frac{x}{4}-\frac{m^2}{4x}\right)v+\lambda v=0, \tag{51a}$$

而函数

$$w=S_n^m=x^{-\frac{1}{2}}\omega_n^m$$

则满足本征值方程

$$(x^2w')'-\frac{x^2+2(m-1)x+m^2-1}{4}w+\lambda xw=0, \tag{51b}$$

相应本征值为 $\lambda=n$, 其中 n 是大于或等于 m 的整数, 边界条件是显然的.

为了证明我们的微分方程没有其他的本征值和本征函数, 我们令 $u=\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}a_\nu x^\nu$, 代入 (51), 得公式 (用递推关系)

$$a_\nu=\frac{a_0}{\nu!}\frac{(m-\lambda)\cdots(m-\lambda+\nu-1)}{(m+1)\cdots(m+\nu)}.$$

可以看出, 对于任意但固定的 λ, 这级数的系数在某一 ν 以后都同号, 且级数对于所有 x 的数值都收敛. 因此它确实代表 (51) 的一个在 $0\leqslant x<\infty$ 中正规的解. 在 $\lambda=n$ 是正整数, $n>m$ 的情形, 级数在有限项数之后中断而成一多项式. 对于任一其他的 λ 值, 易得估值式

$$|a_\nu|>\frac{c}{\nu!\nu^r},$$

其中 c 是一个适当的常数, r 是一个适当的正整数指数. 但这表示当 $x\to\infty$ 时, 解趋于无穷, 阶数至少为 e^{x/x^r}. 因此这个解不能是一个本征函数. 我们的论断因此得证.

5.11 施图姆–刘维尔方程解的渐近行为

施图姆–刘维尔方程所具有的特殊形状, 使我们可以在系数满足某些普遍条件时, 说出解在参数或自变数的值很大时的渐近行为.

5.11.1 当自变数趋向无穷时解的有界性

我们试将微分方程写成 $u'' + \mu(x)u = 0$(参考 5.3 节, 方程 (19a)). 假定当 $x \to \infty$, $\mu(x)$ 趋于一正极限, 我们可以取这极限为 1 而不失其普遍性. 于是, 令 $\mu = 1 + \rho$, 我们就可以根据微分方程

$$u'' + u + \rho u = 0 \tag{52}$$

来作讨论. 但我们将以更严一些的假定

$$|\rho| < \frac{\alpha}{x}, \quad |\rho'| < \frac{\alpha}{x^2}, \tag{53}$$

(其中 α 为正常数) 来代替 $\rho \to 0$ 的假定. 在这样的假定下, 我们断言, 方程 (52) 的每一个解当 $x \to \infty$ 时都是有界的. 这是在预料之中的, 因为对于很大的 x, (52) 趋近于方程 $u'' + u = 0$, 而后者只有有界的解.

要证明我们的论断, 以 u' 乘 (52), 然后从一个正的下限 a (将在后面恰当地定出) 积分到 x, 得

$$u'^2 \big|_a^x + u^2\big|_a^x = -2\int_a^x \rho u u' dx = -\rho u^2\Big|_a^x + \int_a^x \rho' u^2 dx. \tag{54}$$

由此立刻有

$$u^2(x) \leqslant u'^2(x) + u^2(x) \leqslant C(a) + |\rho(x)|u^2(x) + \int_a^x |\rho'|u^2 dx,$$

其中 $C(a)$ 代表一个只与下限 a 有关的表达式, 令 $M = M(x)$ 为函数 $u(\xi)$ 在区间 $a \leqslant \xi \leqslant x$ 中的极大值, 而且设它在点 ξ 达到这个值, 则从上面的不等式和 (53), 得

$$M^2 \leqslant C(a) + \frac{M^2\alpha}{\xi} + M^2\alpha\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\xi}\right),$$

因此

$$M^2\left(1 - \frac{\alpha}{a}\right) \leqslant C(a).$$

现在如果取 $a \geqslant 2\alpha$, 我们就得到 M^2 的界为 $2C(a)$，后者与 x 无关. 这就证明了我们的论断.

5.11.2 更确切一点的结果 (贝塞尔函数)

我们仍考虑方程 $u'' + u + \rho u = 0$, 但假定 $\rho(x)$ 在无穷处以高于一的级次趋于零 (这假设较前节所作的更严), 例如, 设 [1)]

$$\rho(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right). \tag{55}$$

1) 我们这里用的是通常用的符号.$g(x) = O(f(x))$ 表示, 对于函数 $g(x)$ 有 $|g(x)/f(x)|$ 在 x 增大时保持有界.

现在我们得到与方程 $u''+u=0$ 更近似的微分方程, 它的解不仅有界, 而且渐近地趋于三角函数.

令

$$u=\alpha\sin(x+\delta),\quad u'=\alpha\cos(x+\delta),$$

其中 $\alpha(x)$ 和 $\delta(x)$ 是 x 的待定函数, 其导数为 α' 和 δ' (α 不论在何处都不能为零, 否则在某处 u 和 u' 就会同时等于零, 由微分方程 (52) 就有 u 恒等于零). 我们可以从两方面来计算 u'' 和 u', 而得

$$\begin{aligned} u'' =&\alpha'\cos(x+\delta)-\alpha(\delta'+1)\sin(x+\delta)\\ =&-(1+\rho)\alpha\sin(x+\delta),\\ &\tan(x+\delta)=\frac{\alpha'}{\alpha(\delta'-\rho)};\\ u'=\alpha\cos(x+\delta)=&\alpha'\sin(x+\delta)+\alpha(\delta'+1)\cos(x+\delta),\\ &\tan(x+\delta)=-\frac{\alpha\delta'}{\alpha'},\\ &\tan^2(x+\delta)=-\frac{\delta'}{\delta'-\rho}, \end{aligned}$$

$$\delta'=\rho\sin^2(x+\delta), \tag{56}$$

$$\frac{\alpha'}{\alpha}=\frac{-\delta'}{\tan(x+\delta)}=-\rho\sin(x+\delta)\cos(x+\delta). \tag{57}$$

我们看到, α 和 δ 当 $x\to\infty$ 时都趋于确定的极限. 事实上, $\delta(x)=\delta(\beta)-\int_x^\beta\delta'(\xi)d\xi$. 如果让 β 无限地增加, 则由于 (55) 和 (56), 右方积分收敛, 因为被积函数以 $1/x^2$ 的级次趋于零. 所以 $\lim\limits_{\beta\to\infty}\delta(\beta)=\delta_\infty$ 存在, 而且上面的说明还显示,

$$\delta(x)=\delta_\infty+O\left(\frac{1}{x}\right).$$

相应地, 关于 $\alpha'/\alpha=d\log\alpha/dx$ 的公式 (57) 导致关系

$$\alpha(x)=\alpha_\infty\left(1+O\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

其中 $\alpha_\infty\neq 0$. 于是, 对于每一个解 u, 我们得到了下面的几近表示:

$$u=\alpha\sin(x+\delta)=\alpha_\infty\sin(x+\delta_\infty)+O\left(\frac{1}{x}\right).$$

这结果可以立刻应用到微分方程

$$u'' + \left(1 - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right) u = 0,$$

它的解与贝塞尔方程的解 $y_m(x)$ 之间有下面的关系

$$u = y_m \sqrt{x}.$$

因此, 贝塞尔方程的所有的解都满足渐近分式

$$y_m(x) = \frac{\alpha_\infty}{\sqrt{x}} \cos(x + \delta_\infty) + O(1/x^{3/2}).$$

对于贝塞尔函数 $J_m(x)$, 我们将从其他方面的考虑来定出常数 α_∞ 和 δ_∞(参考第 7 章 7.6.2 小节), 得到的是

$$\alpha_\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \delta_\infty = -\frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

5.11.3 当参数增大时的有界性

用类似于第 1 小节中的考虑法, 可以证明下述定理：施图姆–刘维尔方程 (r 连续)

$$u'' - ru + \lambda u = 0 \tag{58}$$

在区间 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 中的解的绝对值小于某一与 λ 及 x 无关的上界; 此处假定解已规一化:

$$\int_0^1 u^2 dx = 1,$$

且满足边界条件 $u(0) = u(1) = 0$.

只要对于大的正 λ 证明定理就行了, 仍以 u' 乘方程, 并从 0 积分到 x, 得

$$u'^2(x) + \lambda u^2(x) - 2\int_0^x ruu'dx = u'^2(0) + \lambda u^2(0). \tag{59}$$

要计算出右方之值, 我们把这方程再从 0 积分到 1, 得

$$u'^2(0) + \lambda u^2(0) = \int_0^1 u'^2 dx + \lambda - 2\int_0^1 dx \int_0^x ruu'dt. \tag{60}$$

把这个值代入 (59), 并用施瓦茨不等式估计各积分, 得

$$\lambda u^2 \leqslant u'^2 + \lambda u^2 \leqslant \lambda + \int_0^1 u'^2 dx + C_1 \sqrt{\int_0^1 u'^2 dx} \sqrt{\int_0^1 u^2 dx}, \tag{61}$$

其中 C_1 代表一与 x 及 λ 无关的正的常数, 从方程

$$\int_0^1 u'^2 dx + \int_0^1 ru^2 dx = \lambda,$$

(这是从 (58) 式用熟知的方法 —— 以 u 乘 (58) 并用格林公式变换所得结果 —— 得到的), 我们有

$$\int_0^1 u'^2 dx \leqslant \lambda + C_2 \int_0^1 u^2 dx.$$

把它代入 (61), 我们得到不等式

$$\lambda u^2(x) \leqslant 2\lambda + C_3\sqrt{\lambda} + C_4,$$

其中 C_2, C_3, C_4 都是与 x 及 λ 无关的正的常数, 这说明

$$u^2(x) \leqslant 2 + \frac{C_3}{\sqrt{\lambda}} + \frac{C_4}{\lambda},$$

而定理也就得证.

最后, 要注意我们的结果和证明的方法在不加上边界条件时也是适用的. 还要指出, 多元变数并没有类似的有界性 [1].

5.11.4　解的渐近表示

既经证明了解是有界的, 我们现在来证明下述定理: 对于 $u'' - ru + \lambda u = 0 (\lambda > 0)$ 在区间 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 中的任何规一化的解 u, 存在 $v'' + \lambda v = 0$ 的一个解 v, 它与 u 有下列关系:

$$u = v + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

对于 λ 的大数值, 这公式提供一个渐近表示, 把解 u 用三角函数 v 来表出, 要证明这定理, 我们来看 $v'' + \lambda v = 0$ 的解, 它们适合 $u(0) = v'(0), u'(0) = v'(0)$. 这样, 函数 $u - v = w$ 就是方程

$$w'' + \lambda w = ru$$

的解. 以 $2w'$ 乘这方程, 从 0 积分到 x, 并注意有 $w(0) = w'(0) = 0$, 得

$$w'^2(x) + \lambda w^2(x) = 2\int_0^x ruw' dx. \tag{62}$$

令 M 表 $|w(x)|$ 在区间 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 中的极大值, M' 表 $|w'(x)|$ 在这区间中的极大值. 应用施瓦茨不等式于 (62), 因 $\lambda > 0$, 得

1) 微分方程 $\Delta u + \lambda u = 0$ 的规一化本征函数 $(\sqrt{2}J_0(k_{0,m}r)/J_\theta'(k_{0,m}))$ 可以作为一个简单的反例, 这函数在单位圆的周界上等于零 (参考 W. Sternberg. Über die asymptotische Integration partieller Differentialgleichungen II. Math. Ann., 86 卷, 特别是 292-295 页).

$$M'^2 \leqslant M'C, \quad M' \leqslant C,$$

其中 C 是与 λ 及 x 无关的正的常数. 由方程 (62), 有

$$\lambda M^2 \leqslant C^2,$$

因此

$$M \leqslant \frac{C}{\sqrt{\lambda}},$$

而定理得证.

5.11.5 施图姆–刘维尔本征函数的渐近表示

如果要处理的不是微分方程的任意解, 而是 —— 譬如说 —— 定义在区间 $0 \leqslant x \leqslant \pi$ 上并满足边界条件 $u(0) = u(\pi) = 0$ 的本征函数, 我们将略为改变渐近表示问题的表述. 假定我们用 (20a) 把微分方程变换为

$$z'' - rz + \lambda z = 0, \tag{63}$$

其中的新独立变数 t 变动在区间 $0 \leqslant t \leqslant l$ 上, r 是这区间上的一个连续函数. 我们现在要来比较联属于本征值 λ_n 的第 n 个本征函数 z_n 和微分方程 $v'' + \lambda v = 0$ 的相应的第 n 个本征函数.

在方程 (10) 中, 把 N_i 换成 r_z, 我们得到一个便于利用的事实: (63) 的在 $t = 0$ 时为零的解满足 z 的“沃尔泰拉积分方程”

$$z(t) = \alpha \sin \sqrt{\lambda} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^t r(\tau) z(\tau) \sin \sqrt{\lambda}(t - \tau) d\tau, \tag{64}$$

其中 a 为任意常数.

按 5.11.3 小节, 满足 (64) 及边界条件 $z(l) = 0$ 的函数 $z(t)$ 对于所有的 λ 都保持为有界, 因此由 (64) 立知 a 也是有界的 [1]. 这一事实, 连同方程 (64) 及关系 $\int_0^1 z^2 dt = 1$, 引到关于 a 的精确估计

$$a = \sqrt{\frac{2}{l}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

而这一估值又转过来告诉我们

$$z(t) - \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \sqrt{\lambda} t = O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

1) $z(t)$ 的有界性也可以直接由积分式 (64) 证明.

既然微分方程的第 n 个本征值 λ_n 当 n 增大时趋于无穷 (参考第 6 章 6.2.2 小节), 我们立刻看出, 第 n 个本征函数 $z_n(t)$ 的渐近表示为

$$z_n(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \sqrt{\lambda_n} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} O(1).$$

我们还有关于 λ_n 的渐近估计 (参考第 6 章 6.2.3 小节)

$$\lambda_n = n^2 \frac{\pi^2}{l^2} + O(1).$$

因此 $\sqrt{\lambda_n} = n(\pi/l) + O(1/n)$, 而有

$$\sin \sqrt{\lambda_n} t = \sin n \frac{\pi}{l} t + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

因此, 方程 $z'' - rz + \lambda z = 0$ 的规一化本征函数的渐近表示为

$$z_n(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin n \frac{\pi}{l} t + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{65}$$

类似地, 如果我们把积分方程 (64) 微分, 可得相应公式

$$z_n'(t) = n \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{2}{l}} \cos n \frac{\pi}{l} t + O(1). \tag{66}$$

对于原来的方程，这些结果可以表为

$$u_n(x) = c_n \frac{\sin \left(n \frac{\pi}{l} \int_0^x \sqrt{\frac{\rho}{p}} dx \right)}{\sqrt[4]{p\rho}} + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{67}$$

其中的规一化因子 c_n 由下式定出

$$\frac{1}{c_n^2} = \int_0^\pi \frac{\sin^2 \left(n \frac{\pi}{l} \int_0^x \sqrt{\frac{\rho}{p}} dx \right)}{\sqrt{p\rho}} dx,$$

而

$$l = \int_0^\pi \sqrt{\frac{\rho}{p}} dx.$$

与此相应, 我们有

$$u_n'(x) = c_n \frac{n\pi}{l} \frac{\cos \left(n \frac{\pi}{l} \int_0^x \sqrt{\frac{\rho}{p}} dx \right)}{\sqrt[4]{p\rho}} \sqrt{\frac{\rho}{p}} + O(1). \tag{68}$$

对于更普遍些的齐次边界条件, 本征函数以及它们的微商的渐近表示也可以用同样的方法导出. 我们得到的是

$$z_n(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos n\frac{\pi}{l}t + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{69}$$

及

$$z_n'(t) = -\frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{2}{l}} \sin n\frac{\pi}{l}t + O(1), \tag{70}$$

只要在边界条件 $z_n'(0) - hz(0) = 0$ 中的系数 h 保持有限, 这些表示式都成立.

附带提一下, 沃尔泰拉积分方程使我们可以得到精确得多的关于本征函数及其微商的表示式. 这是可以预料到的, 因为这种沃尔泰拉方程的诺伊曼级数总是收敛的[1]. 我们可以不必引用普遍理论而直接得到这些表示式. 在 (64) 中令 a 等于 1, 就是说, 我们不再要求函数规一化; 然后在积分号下以积分方程所给之值代替 $z(\tau)$. 重复这一过程并令 $v(t) = \sin\sqrt{\lambda}t$, 得

$$\begin{aligned}
z(t) =& v(t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^t d\tau_1 v(\tau_1)r(\tau_1)\sin\sqrt{\lambda}(t-\tau_1) \\
&+ \frac{1}{\lambda}\int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 v(\tau_2)r(\tau_1)r(\tau_2)\sin\sqrt{\lambda}(t-\tau_1)\sin\sqrt{\lambda}(\tau_1-\tau_2) \\
&+ \frac{1}{\sqrt{\lambda^3}}\int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \int_0^{\tau_2} d\tau_3 v(\tau_3)r(\tau_1)r(\tau_2)r(\tau_3) \\
&\cdot \sin\sqrt{\lambda}(t-\tau_1)\sin\sqrt{\lambda}(\tau_1-\tau_2)\sin\sqrt{\lambda}(\tau_2-\tau_3) \\
&+ \cdots \\
&+ \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^t d\tau_1 \cdots \int_0^{\tau_{n-1}} d\tau_n z(\tau_n)r(\tau_1)\cdots r(\tau_n) \\
&\cdot \sin\sqrt{\lambda}(t-\tau_1)\cdots\sin\sqrt{\lambda}(\tau_{n-1}-\tau_n).
\end{aligned} \tag{71}$$

这级数可以无限止地继续下去, 其结果是一个关于 $z(\lambda, t)$ 的依 $\sqrt{\lambda}$ 的降幂展开的无穷级数; 这级数对于所有的 $\lambda > 0$ 皆收敛. 如果我们只取前面 n 项, 则由此而生的误差的数量级小于 $(1/\sqrt{\lambda})^n$.

5.12 具有连续谱的本征值问题

在以前所讨论的问题中本征值成一可数的无穷数列. 但是, 如果基本区域的边界点是微分方程的系数的奇点, 或者, 特别地, 如果基本区域是无界的, 那么本征值

1) 参考 J. Liouville. J. de Math. pures et appl., 卷 1, 2, 1836/37(见第 6 章的文献), 其中出现沃尔泰拉积分方程和诺伊曼级数.

谱, 或者说本征值的全体, 就可能有很不同的性质. 特别地, 可以出现"连续谱"; 那就是说, 谱中包含一 λ 区间上所有的数值. 在这种情形中, 本征函数展开定理应由傅里叶积分来代替.

5.12.1 三角函数

这类问题中最简单的是本征值方程

$$u'' + \lambda u = 0,$$

其区域为 $-\infty < x < +\infty$, 边界条件为 u 在正负无穷处保持有界. 很清楚, 任何非负的数 λ 都是一个本征值, 相属本征函数为 $\sin\sqrt{\lambda}x, \cos\sqrt{\lambda}x$. 对于这本征值问题, 应当用第 2 章 2.6 节中的特殊傅里叶积分定理来代替展开定理. 我们可以通过一种极限过程来了解连续谱的产生. 从一个有限区间的本征值问题出发, 然后取极限 —— 无限区间 —— 这时, 有限区间的离散谱可能变为连续谱, 而按本征函数的傅里叶展开也就变为无限区间中的一傅里叶积分展开.

5.12.2 贝塞尔函数

对于贝塞尔方程

$$(xu')' + \left(\lambda x - \frac{n^2}{x}\right) u = 0,$$

情形也是一样; 其区间为 $0 \leqslant x < \infty$, 边界条件是: 在 $x = 0$ 及 $x \to \infty$, u 保持有界. 所有 $\lambda \geqslant 0$ 的贝塞尔函数 $u = J_n(\sqrt{\lambda}x)$ 都是本征函数. 因此就有一个由 λ 的所有非负数值组成的连续谱.

这里也是一样, 表示一任意函数的展开定理要由一个积分定理来代替, 积分区域是整个的谱, 也就是全部正实数的连续统. 这一积分表示式是

$$f(x) = \int_0^\infty tJ_n(tx)g(t)dt, g(t) = \int_0^\infty \xi J_n(\xi t)f(\xi)d\xi.$$

如果我们假设对于 $x \geqslant 0, f(x)$ 分段平滑并且积分

$$\int_0^\infty x|f(x)|dx$$

存在, 那这种表示就是可能的. 我们将在第 7 章 7.2 节中给这种分定理以证明.

5.12.3 无穷平面的膜振动方程的本征值问题

对于整个 $x-y$ 平面及边界条件: 在无穷处的有限性, 微分方程

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

的本征值问题有两种解法. 第一种是把所有三角函数的乘积 $u = \sin\alpha(x-\xi) \times \sin\beta(y-\eta)$ (其中 ξ, η 和 α, β 是任意的) 当作本征函数, 而数 $\lambda = \alpha^2 + \beta^2$ 则出现为本征值. 于是每一非负的 λ 都是本征值, 而每一个这样的本征值显然定出一连续统的本征函数. 相应的积分表示式不是别的而正是平面上的傅里叶积分定理 (参考第 2 章 2.6 节).

如果我们引用极坐标 r, φ, 那就会得到另一种形式的本征函数

$$u = J_n(\sqrt{\lambda}r)\sin n\varphi, \quad u = J_n(\sqrt{\lambda}r)\cos n\varphi,$$

n 是任意整数, λ 是任何非负实数. 在这情形中, 本征值的谱仍是非负实数 $\lambda \geqslant 0$ 的连续统. 但因 n 是整数, 所以和任一本征值 $\lambda > 0$ 相属的本征函数的个数是可数的. 这里, 一任意函数的表示式是一个对于 n 的傅里叶级数展开, 而每一系数, 按前一节 (还可以参看第 7 章 7.2 节) 是对 r 的一个积分式.

顺带指出, 这些本征函数可以看作是和同一 $\lambda = \alpha^2 + \beta^2$ 相应的正弦乘积的线性组合. 因为事实上, 我们有

$$J_n(\sqrt{\lambda}r)e^{in\varphi} = \frac{(-i)^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ixt}e^{ix\sqrt{\lambda}\cos t + iy\sqrt{\lambda}\sin t}dt$$

(参考第 7 章 7.2 节).

5.12.4 薛定谔本征值问题 [1)]

在他的关于量子理论的工作中, 薛定谔 [2)] 得到另一种类型的本征值问题, 其本征值谱的结构完全不同于前. 这谱由一连续部分和一离散部分组成. 离散部分并不延伸至无穷, 而是在有限处有一聚点. 在最简单的薛定谔问题中, 所要处理的是空间的本征值方程

$$\Delta u + \frac{c}{r}u + \lambda u = 0, \tag{72}$$

其中 c 是一个给定的正的常数, r, θ, φ 是极坐标. 我们要求本征函数 u 在原点连续而当 $x \to \infty$ 时保持为有限. 如果我们以一球面调和函数 $Y_n(\theta, \varphi)$ 乘这微分方程并在一单位球面上积分, 我们就会和通常的情形一样得到一个关于函数

$$v(r) = \iint u(r, \theta, \varphi)Y_n(\theta, \varphi)\sin\theta d\theta d\varphi$$

的微分方程

$$v_{rr} + \frac{2}{r}v_r + \left(\lambda + \frac{c}{r} - \frac{n(n+1)}{r^2}\right)v = 0. \tag{73}$$

---

1) 还可以参考第 6 章 6.5 节.

2) E. Schrödinger. Abhandlungen zur Wellenmechanik. Leipzig: Johann Ambrosius Barth, 1927.

在和上面相同的关于 $r=0$ 和 $r\to\infty$ 的边界条件下, 我们得到这方程的本征函数, 而 (72) 的本征函数则为乘积 $u=vY_n$.

以新的参数

$$l=\frac{c}{2\sqrt{-\lambda}}$$

代替 λ, 并以新的变数

$$z=2\sqrt{-\lambda}r$$

代替 r, 我们得微分方程

$$v_{zz}+\frac{2}{z}v_z+\left(-\frac{1}{4}+\frac{l}{z}-\frac{n(n+1)}{z^2}\right)v=0,$$

这方程我们在 7.10 节中已经遇到过 (公式 (51b)), 不过形式略有不同. 根据那里的理论, 我们知道, 对于实数 l, 就是说对于负的 λ, 只有当 l 是大于 n 的整数时, 解才满足在 $r=0$ 连续, 当 $r\to\infty$ 时保持为有限的条件; 并且, 解是拉盖尔多项式的微商:

$$v=z^ne^{-z/2}L_{l+n}^{(2n+1)}(z).$$

因此, 对于原方程我们有而且仅有负的本征值

$$\lambda=-\frac{c^2}{4l^2},$$

相应本征函数为

$$u=r^ne^{-cr/2l}L_{l+n}^{(2n+1)}\left(\frac{c}{l}r\right)Y_n(\theta,\varphi).$$

在这表达式中, 对于一给定的整数 l,n 可以取从 0 到 $l-1$ 的任意整数值, 而 Y_n 这时代表 $(2n+1)$ 个线性独立的球调和函数中的一个. 这样找到的离散谱系由以零为聚点的无穷多个数所组成的.

进一步, 我们还断言, *所有正实数 λ 都是薛定谔方程的本征值; 那就是说, 方程有一个包含所有非负实数的连续谱.*

要证明这一断言, 我们引入函数 $w=rv$ 以代替方程 (73) 中的 v. 这样就得到方程

$$w''+\left(\lambda+\frac{c}{r}-\frac{n(n+1)}{r^2}\right)w=0,$$

它属于在 5.11.1 小节中处理过的类型. 因此, 它的解 w 对于所有正 λ 保持为有限, 而方程 (73) 的解 $v=w/r$, 当 r 无限地增大时, 趋于零. 现在, 要证明每一 λ 的正值是一本征值, 只需证明有一在原点正规、对于所有的 r 都存在的解 v 即可. 这事实可以从线性微分方程的普遍理论获得. 但是, 我们也可以直接得到一个具有这种性质的解, 即可表为一处处都收敛的幂级数的解; 所用方法是我们以前多次应用过

的. 在这样做时, 最好先引进函数 $z = r^{-n}e^{ir\sqrt{\lambda}v}$ 把微分方程转换为 z 的微分方程. 然后, 假定解是一个幂级数, 就引到一个两项的递推关系.

5.13 微扰理论

如果自伴线性微分方程

$$L(u_n) + \lambda_n u_n = 0 \tag{74}$$

的本征值 λ_n 及相属的正交规一本征函数 u_n 对于给定的区域[1]和给定的边界条件是已知的, 那么相应于一"相邻的"或"微扰的"微分方程

$$L(\bar{u}_n) - \varepsilon r \bar{u}_n + \bar{\lambda}_n \bar{u}_n = 0 \tag{75}$$

的本征值问题中的本征值和本征函数就可以用一个近似方法来计算. 这方法在应用上很重要, 称为*微扰演算*或*微扰理论*. 这里, 边界条件和区域都保持原状不变. r 表一给定的在基本区域上的连续函数, ε 是一个参量; $\bar{u}_n$ 和 $\bar{\lambda}_n$ 是新问题中的本征函数和本征值. 不加证明, 我们假设这些新的本征值以及本征函数都可以展为微扰参量 ε 的幂级数.

5.13.1 单重本征值

先设原来的无摄动问题只有单重本征值. 这时, 我们写

$$\bar{u}_n = u_n + \varepsilon v_n + \varepsilon^2 w_n + \cdots, \tag{76}$$

$$\bar{\lambda}_n = \lambda_n + \varepsilon \mu_n + \varepsilon^2 \nu_n + \cdots. \tag{77}$$

代入 (75) 中立得方程 (74) 以及外加的方程

$$L(v_n) + \lambda_n v_n = r u_n - \mu_n u_n, \tag{78}$$

$$L(w_n) + \lambda_n w_n = r v_n - \mu_n v_n - \nu_n u_n. \tag{79}$$

从它们我们可以逐一计算各级微扰, 就是说, 计算 $\mu_n, \nu_n, \cdots$ 和 $v_n, w_n, \cdots$ 这些量.

为了这一目的, 我们引进待定量

$$a_{nj} = \int v_n u_j dg,$$

它们是函数 v_n 按本征函数 u_j 展开的展开系数. 以 u_l 乘 (78), 在基本区域上积分, 并用格林公式在边界条件 (例如等于零的边值) 下变换左方第一项, 我们得

1) 在这里, 区域的维数是任意的. 积分总是对整个区域积的; 体积元素用 dg 来表示.

$$a_{nl}(\lambda_n - \lambda_l) = d_{nl} - \mu_n \delta_{nl},$$

其中 $\delta_{nl} = 0$ 如 $n \neq l$, 而 $\delta_{nn} = 1$,

$$d_{nl} = \int r u_n u_l dg.$$

取 $l = n$, 得

$$\mu_n = d_{nn}, \tag{80}$$

取 $l \neq n$, 则得

$$a_{nl} = \frac{d_{nl}}{\lambda_n - \lambda_l}.$$

a_{nn} 之值可以从规一条件 $\int \bar{u}_n^2 dg = 1$ 求出, 结果引到关系 $\int u_n v_n dg = 0$, 因之 $a_{nn} = 0$. 因此, 如果我们可以把 v_n 依 u_j 展开, 则有

$$v_n = \sum_{j=1}^{\infty}{}' \frac{d_{nj}}{\lambda_n - \lambda_j} u_j \left(d_{nj} = \int r u_n u_j dg \right), \tag{81}$$

其中符号 $\sum{}'$ 表示在求和时不要 $j = n$ 那一项.

求出一级近似之后, 二级近似

$$w_n = \sum_{j=1}^{\infty} b_{nj} u_j$$

也可以用类似的方法从方程 (79) 来求. 从 (79), 像上面一样, 可得

$$b_{nl}(\lambda_n - \lambda_l) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} d_{jl} - \mu_n a_{nl} - \nu_n \delta_{nl}. \tag{82}$$

令 $n = l$, 我们得到关于本征值的二级微扰项:

$$\nu_n = \sum_{j=1}^{\infty}{}' a_{nj} d_{jn},$$

对于 $l \neq n$ 则有

$$b_{nl} = \frac{1}{\lambda_n - \lambda_l} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} d_{jl} - \mu_n a_{nl} \right\}. \tag{83}$$

要决定 b_{nn}, 我们必须再用规一条件 $\int \bar{u}_n^2 dg = 1$ 并令 ε^2 的系数等于零. 很容易得到

$$b_{nn} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}^2, \tag{84}$$

而二级近似也就完全决定了.

其他各级近似可以用完全同样的方法逐次地去决定.

5.13.2 重本征值

对于重本征值的情形, 或所谓"退化"的情形, 需要作进一步的讨论. 我们只要假设 (74) 的第一个本征值是 α 重的就行了, 也就是说, $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_\alpha=\lambda$, 而 $n>\alpha$ 的各本征值 λ_n 都是单重的. 问题的复杂性在于, 现在, 在多重本征值的情形, 本征函数只能决定到差一正交变换的地步. 因此, 只有当我们适当地选好未微扰时重本征值的一组本征函数之后, 才能期望在微扰时各个本征函数连续变动 (可同时参考第 3 章 3.8.4 小节). 因此, 我们设属于本征值 λ 的 α 个本征函数由一尚待决定的正交变换变到另一组这样的本征函数, 设变换为

$$u_n^*=\sum_{j=1}^{\alpha}\gamma_{nj}u_j \quad (n=1,2,\cdots,\alpha)$$

并设

$$\bar{u}_n=u_n^*+\varepsilon v_n+\varepsilon^2 w_n+\cdots.$$

我们的目的是同时决定 γ_{nj} 及函数 $v_n,w_n,\cdots$. 当 $n>\alpha$ 时, 我们有 $u_n^*=u_n$, 而本节第一小节中的结果都可以用上. 因此, 我们这里可以限于 $n=1,2,\cdots,\alpha$ 的情形. 根据所作假定及方程 (75), 我们得到下列关于 v_n 和 w_n 的方程

$$L(v_n)+\lambda_n v_n=\sum_{j=1}^{\alpha}r\gamma_{nj}u_j-\mu_n\sum_{j=1}^{\alpha}r\gamma_{nj}u_j, \tag{85}$$

$$L(w_n)+\lambda_n w_n=rv_n-\mu_n v_n-\nu_n\sum_{j=1}^{\alpha}\gamma_{nj}u_j. \tag{86}$$

如果以 u_l 乘 (85), 照本节第一小节进行计算, 并用同样的符号, 就得到

$$a_{nl}(\lambda_n-\lambda_l)=\sum_{j=1}^{\alpha}(d_{jl}-\mu_n\delta_{jl})\gamma_{nj}. \tag{87}$$

因此, 特别地, 对于 $l=1,2,\cdots,\alpha$ 有

$$0=\sum_{j=1}^{\alpha}(d_{jl}-\mu_n\delta_{jl})\gamma_{nj} \quad (l,n=1,2,\cdots,\alpha).$$

从这 α^2 个方程, 可以唯一地决定 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_\alpha$ 这些量, 它们是特征方程 $|d_{jl}-\mu_n\delta_{jl}|=0$ 的根 (见第 1 章 1.2 节). 为简单起见, 我们假定这些根都是不同的, 就是说, 二次型 $\sum\limits_{j,l=1}^{\alpha}d_{jl}x_jx_l$ 只有相异的本征值. 这时, 正交矩阵 (γ_{nj}) 也唯一地确定了. 这表示我们关于未微扰的本征函数 $u_n^*=\sum\limits_{j=1}^{\alpha}\gamma_{nj}u_j$ 的选择现在已固定下来了.

仍以 u_n 来表示这些 u_n^*. 在新的符号下, 矩阵 (d_{nl}) 是一个对角矩阵, 它的元素是

$$d_{nn} = \mu_n;$$

其他元素都是零. 由方程 (87) 立得, 当 $l > \alpha$ 时

$$a_{nl} = \frac{d_{nl}}{\lambda_n - \lambda_l}. \tag{88}$$

像本节第一小节中那样, 由规一条件知 $a_{nn} = 0$; 要决定其他的 $a_{nl}(l, n = 1, 2, \cdots, \alpha; n \neq l)$, 我们必须用 (86) 来求第二级近似, 当 $l, n = 1, 2, \cdots, \alpha$ 时, 我们从它得到

$$0 = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} d_{jl} - \mu_n a_{nl} - \nu_n \delta_{nl},$$

或, 因 $(d_{jl})(j, l = 1, 2, \cdots, \alpha)$ 是对角元素为 μ_n 的对角矩阵, 得

$$0 = \sum_{j=\alpha+1}^{\infty} a_{nj} d_{jl} + a_{nl}\mu_l - \mu_n a_{nl} - \nu_n \delta_{nl}.$$

因此, 当 $l = n$ 时, 有

$$\nu_n = \sum_{j=\alpha+1}^{\infty} a_{nj} d_{jn}, \tag{89}$$

其中的系数 a_{nj} 是早由 (88) 决定了的. 当 $n \neq l$ 时, 我们得到

$$a_{nl} = \frac{1}{\mu_n - \mu_l} \sum_{j=\alpha+1}^{\infty} a_{nj} d_{jl}.$$

我们把结果总结一下. 对于 α 重退休的本征值 $\lambda_1 = \lambda$, 选这样的一组正交规一本征函数 $u_1, u_2, \cdots, u_\alpha$, 使矩阵 $d_{nl} = \int r u_n u_l dg$ 为一对角矩阵, 矩阵元是 d_{nn}. 于是本征值的一级微扰为

$$\mu_n = d_{nn}$$

而本征函数的一组微扰为

$$v_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} u_j,$$

其中

$$a_{nn} = 0,$$

而

$$a_{nl} = \frac{d_{nl}}{\lambda_n - \lambda_l},$$

如果至少有指数 l, n 之一大于 α; 如果没有一个指数大于 α 而 l 又不等于 n, 则

$$a_{nl} = \frac{1}{d_{nn} - d_{ll}} \sum_{j=\alpha+1}^{\infty} \frac{d_{nj} d_{jl}}{\lambda_n - \lambda_l}.$$

二级和高级微扰可以用完全相应的方法得到. 特别地, 第 n 个本征值的二级微扰为 (见 (89) 式)

$$\nu_n = \sum_{j=\alpha+1}^{\infty} \frac{d_{nj}^2}{\lambda_n - \lambda_j}.$$

5.13.3 微扰理论的一例[1)]

我们来考虑一根自由地振动着的弦的问题. 弦的两端在 $x = 0$ 和 $x = \pi$ 处固定. 弦的弹性系数 $p = 1$, 质量密度为 $\rho(x).\rho(x)$ 在区间 $0 \leqslant x \leqslant \pi$ 中仅略微不同于常数值 ρ_0 而为 $\rho(x) = \rho_0 + \varepsilon\sigma(x)$ 的形式. $\sigma(x)$ 是一个已知的函数, ε 代表"微扰参量". 由 5.3 节知其相应的本征值问题为

$$\bar{u}_n'' + \bar{\lambda}_n(\rho_0 + \varepsilon\sigma(x))\bar{u}_n = 0. \tag{90}$$

当 $\varepsilon = 0$ 时, 我们得到未微扰的问题 $u_n'' + \lambda_n \rho_0 u_n = 0$, 其解为 $\lambda_n = n^2/\rho_0, u_n = \sqrt{2/\pi\rho_0}\sin nx$.

既然所有本征值都是单的, 把

$$\lambda_n = \frac{n^2}{\rho_0}, \quad u_n = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho_0}}\sin nx$$

及

$$r(x) = -\lambda_n \sigma(x) = -\frac{n^2}{\rho_0}\sigma(x)$$

各式代入第一小节的公式 (80) 和 (81) 中[2)], 我们就得到微扰问题 (90) 的第一级近似. 于是我们得到本征值的一级微扰.

$$\mu_n = -\frac{n^2}{\rho_0^2}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sigma(x)\sin^2 nx dx$$

及本征函数的一级微扰

$$v_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} u_j, \tag{91}$$

其中

$$a_{nj} = \frac{2}{\pi}\frac{n^2}{j^2 - n^2}\frac{1}{\rho_0}\int_0^{\pi} \sigma(x)\sin nx \sin jx dx \quad (j \neq n);$$

1) 参看 Rayleigh. The Theory of Sourd, 第 I 卷, 115—118 页.

2) 在第一小节中我们假定在微扰项 $\varepsilon r(x)$ 中的函数 $r(x)$ 与 ε 无关. 但 (90) 中的相应微扰项中的函数 $\bar{\lambda}_n\sigma(x)$ 却是依赖于 ε 的. 不过因为我们只预备讨论一级微扰, 所以我们可以就令 $r(x) = -\lambda_n\sigma(x)$, 其中 λ_n 不再与 ε 有关.

PDG

$$a_{nn} = 0. \tag{92}$$

为了把这些结果应用于我们的例子, 我们试来计算第一节点的位移 δx, 这节点与 $n=2$ 相应, 在均匀弦的情形中它位于弦的中点.

因为我们已经假设 $\bar{u}_n$ 可以展为 ε 的幂级数, 我们可以把 δx 写成 $\delta x = \varepsilon\tau + \varepsilon^2(\cdots)$. 我们得到关于 τ 的下列方程:

$$\begin{aligned}
0 &= \bar{u}_2\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\tau + \cdots\right) \\
&= u_2\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\tau + \cdots\right) + \varepsilon v_2\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\tau + \cdots\right) + \varepsilon^2(\cdots) \\
&= u_2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \varepsilon\left[\tau u_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) + v_2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] + \varepsilon^2(\cdots).
\end{aligned}$$

如果在这方程中令系数 ε 等于零并计及 (91), 我们就得到

$$\tau = -\frac{v_2\left(\dfrac{\pi}{2}\right)}{u_2'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)} = a_{21} - a_{23} + a_{25} - + \cdots,$$

因为 $u_2(x) =$ 常数 $\cdot \sin 2x$. 若设弦的不均匀性是由于在 $x = \pi/4$ 那一点有一小质量 $\rho_0\kappa$, 我们从 (92) 经过一简单的取极限的过程, 得到下述关于 τ 的表达式:

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{4\kappa}{\pi}\left(\frac{\sin \pi/4}{1^2-4} - \frac{\sin 3\pi/4}{3^2-4} + \frac{\sin 5\pi/4}{5^2-4} - \cdots\right) \\
&= \frac{4\kappa}{\pi\sqrt{2}}\left(\frac{1}{1^2-4} - \frac{1}{3^2-4} - \frac{1}{5^2-4} + \cdots\right) \\
&= -\frac{2\kappa}{\pi\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \cdots\right).
\end{aligned}$$

括号中级数的值是

$$\int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4}dx = \frac{\pi}{4}\sqrt{2},$$

因之 $\tau = -\kappa/2$.

5.14 格林函数 (影响函数) 及化微分方程为积分方程

在这一节中, 我们要从另外一个很不同的观点来探讨并补充我们的理论. 我们的出发点不是一个振动问题或本征值问题, 而是一个边值问题. 我们将讨论如何用格林函数 (或影响函数) 的方法来表示这问题的解. 这样, 本征值微分方程就化为对称积分方程, 而本征函数的存在以及完备性定理和展开定理也就跟着证明了.

5.14.1 格林函数及常微分方程的边值问题

我们先考虑函数 $u(x)$ 在基本区域 $G: x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ 上的线性齐次二阶的自伴微分式

$$L[u] = pu'' + p'u' - qu,$$

其中 p, p' 和 q 是 x 的连续函数, 并且 $p > 0$. 与此相属的非齐次微分方程为

$$L[u] = -\varphi(x), \tag{93}$$

其中 $\varphi(x)$ 代表在 G 中确定的一分段连续函数. 我们所要处理的是边值问题: 找方程 (93) 的一个解 $u = f(x)$, 它在 G 的边界上满足齐次边界条件, 譬如说 $u = 0$[1]. 我们可以根据下述想法来讨论这问题. 我们仍把方程 (93) 看成是一条弦在不依赖于时间而连续分布在弦上的力的影响下平衡的条件; $\varphi(x)$ 为力的密度. 我们先把连续分布的力变为"点力", 就是说, 作用在一点 $x = \xi$ 上, 强度一定的力, 然后取极限. 令 $k(x,\xi)$ 表示弦上 x 点在所给边界条件下由于 ξ 点受到单位强度的力的作用而产生的偏离. 于是, 连续分布的力 φ 对于 x 点的影响, 可以看作是连续分布的点力的影响的叠加; 在每一点 ξ 上力的线密度等于 $\varphi(\xi)$. 我们可以期望所求的解形如

$$u(x) = \int_{x_0}^{x_1} k(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi. \tag{94}$$

函数 $\mathrm{K}(x,\xi)$ 称为微分式 $L[u]$ 的*影响函数*或*格式函数*, 它在 $x = x_0$ 及 $x = x_1$ 满足所给边界条件. 因此, 方程 (94) 所表示的解 —— 一个以 $\mathrm{K}(x,\xi)$ 为核, $\varphi(x)$ 为源密度的积分 —— 也满足这些边界条件.

影响函数 $\mathrm{K}(x,\xi)$ 除开在 $x = \xi$ 这一点外应当处处满足方程

$$L[\mathrm{K}] = 0,$$

因为它所对应的是 $x \neq \xi$ 时力等于零的情形. 在 $x = \xi$ 这点, $\mathrm{K}(x,\xi)$ 必有一奇点. 我们可用下述启示性方法推出这奇点的性质. 我们把点力看成是力 $\varphi_\varepsilon(x)$ 的极限情形, $\varphi_\varepsilon(x)$ 在 G 中 $|x-\xi| > \varepsilon$ 之处等于零, 其总强度为

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \varphi_\varepsilon(x)dx = 1.$$

令 $\mathrm{K}(x,\xi)$ 表与此相应的弦的偏离; 于是, $L[\mathrm{K}_\varepsilon] = (p\mathrm{K}_\varepsilon')' - q\mathrm{K}_\varepsilon = -\varphi_\varepsilon(x)$. 在极限 $\xi - \delta$ 和 $\xi + \delta$ 间积分这方程 ($\delta \geqslant \varepsilon$ 可以任意选择, 只要积分区间保持在基本区域 G 中), 得

$$\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} \left(\frac{d}{dx}\left(p\frac{d\mathrm{K}_\varepsilon}{dx}\right) - q\mathrm{K}_\varepsilon\right)dx = -1.$$

1) 提醒一下, 非齐次边界条件下齐次微分方程的边值问题总可以化为这问题 (参看 5.1.2 小节).

如果我们先取极限 $\varepsilon \to 0$, 假定 K_ε 收敛到一个连续的、并且除 $x=\xi$ 外连续可微的函数 $\mathrm{K}(x,\xi)$, 然后让 $\delta \to 0$, 我们得到关系

$$\lim_{\delta\to 0} \left.\frac{d\mathrm{K}(x,\xi)}{dx}\right|_{x=\xi-\delta}^{x=\xi+\delta} = -\frac{1}{p(\xi)},$$

这关系刻画出了格林函数的奇点的特征.

我们现在把这粗略的讨论反过来, 使它成一严格的数学理论. 我们一开头就把在给定的齐次边界条件下微分式 $L[u]$ 的格林函数定义为这样一个 x 和 ξ 的函数 $\mathrm{K}(x,\xi)$, 它满足下列条件:

(1) $\mathrm{K}(x,\xi)$ 当 ξ 固定时是 x 的连续函数并满足所给边界条件.

(2) K 对 x 的一阶和二阶微商在 G 中除 $x=\xi$ 外处处连续; 在 $x=\xi$ 这点, 一阶微商有一跳跃为

$$\left.\frac{d\mathrm{K}(x,\xi)}{dx}\right|_{x=\xi-0}^{x=\xi+0} = -\frac{1}{p(\xi)}. \tag{95}$$

(3) 在 $x=\xi$ 这点外面, K—— 作为 x 的函数 —— 在 G 中处处满足微分方程 $L[\mathrm{K}]=0$.

满足条件 2, 3, 但不一定满足边界条件的一个连续函数称为微分方程 $L[u]=0$ 的一个“基本解”. 我们现在来证明这样定义的格林函数的确是我们所要求的. 按前面粗略的讨论所得的结果我们应证明: 如果 $\varphi(x)$ 是 x 的一个连续或分段连续函数, 则函数

$$u(x) = \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{K}(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi \tag{96}$$

满足微分方程

$$L[u] = -\varphi(x) \tag{97}$$

及边界条件. 反过来, 如果函数 $u(x)$ 满足微分方程 (97) 及边界条件, 那它就可表为 (96) 的形式. 要证明前一论断, 只需应用对积分号下的参数求微的初等规则. 于是, 注意 (95), 我们得到下列方程

$$u'(x) = \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{K}'(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi,$$

$$\begin{aligned} u''(x) &= \int_{x_0}^{x} \mathrm{K}''(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi + \int_{x}^{x_1} \mathrm{K}''(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi \\ &\quad + \mathrm{K}'(x,x-0)\varphi(x) - \mathrm{K}'(x,x+0)\varphi(x) \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{K}''(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi + [\mathrm{K}'(x+0,x) - \mathrm{K}'(x-0,x)]\varphi(x) \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{K}''(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi - \frac{\varphi(x)}{p(x)}; \end{aligned}$$

因此,

$$pu'' + p'u' - qu = \int_{x_0}^{x_1} (p\mathrm{K}'' + p'\mathrm{K}' - q\mathrm{K})\varphi(\xi)d\xi - \varphi(x).$$

但 $L[\mathrm{K}] = 0$, 所以断言得证.

要证明逆定理, 我们仍用格林公式 (5.1 节, (2b)); 令 $v = \mathrm{K}$, 然后应用公式于两积分区域 $x_0 \leqslant x \leqslant \xi$ 及 $\xi \leqslant x \leqslant x_1$. 这样再把 x 和 ξ 对调就可直接从跳跃关系及边界条件得到公式 (96).

如果 u 和 K 有不同的边界条件 (例如, 在端点 $x = x_0$ 及 $x = x_1, \mathrm{K} = 0$), 则用同样方法我们得到 u 的更一般的表达式:

$$u(x) = \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{K}(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi + p\mathrm{K}'u\Big|_{x_0}^{x_1};$$

如 $\varphi = 0$ 则此式代表齐次微分方程 $L[u] = 0$ 的边值问题的解, 并且这解已用边值表示出来.

一个自伴微分式的格林函数是参变量 ξ 及变量 x 的对称函数, 即

$$\mathrm{K}(x,\xi) = \mathrm{K}(\xi, x).$$

从格林公式差不多可以立刻证明这点. 我们只要以 $v = \mathrm{K}(x,\eta), u = \mathrm{K}(x,\xi)$ 代入公式, 把积分区域分为三个区间 $x_0 \leqslant x \leqslant \xi, \xi \leqslant x \leqslant \eta, \eta \leqslant x \leqslant x_1$, 分开来处理, 利用在 $x = \xi$ 和 $x = \eta$ 点的断续关系 (95) 及边界条件, 就可以得到证明. **格林函数的对称性代表着物理中常常出现的一种互逆性: 如果作用在 ξ 点的力 1, 在 x 点产生效果 $\mathrm{K}(x,\xi)$, 则力 1 作用于 x 点时, 在 ξ 点将产生同样的效果.**

5.14.2 格林函数的构造、广义格林函数

在预给的边界条件下, $L[u]$ 的格林函数可以如下造出: 考虑微分方程 $L[u] = 0$ 的任意一个解 $u_0(x)$, 它在 $x = x_0$ 满足边界条件, 例如等于零. $c_0u_0(x)$ 是这种解最一般的形式. 类似地, 设 $c_1u_1(x)$ 是 $L[u] = 0$ 的一族解, 它们在 $x = x_1$ 满足边界条件. 有两种可能的情形: 或者这两族解是相异的 —— 一般情形应如此 —— 或者它们全同. 在第一种情形中, 函数 u_0, u_1 线性无并, 即 $u_0u_1' - u_1u_0' \neq 0$[1]; 第一族中的一曲线不能和第二族的一曲线在基本区域内相切 (因为如果相切则在接触点将出现与这方程矛盾的事实). 我们可以这样来选两常数 c_0, c_1 使交点位于 G 内横坐标为 $x = \xi$ 之处, 并使在这点的微商的跳跃恰等于 $-1/p(\xi)$. 这样我们就得出格林函数, 公式为

$$x \leqslant \xi: \quad u = -\frac{1}{c}u_1(\xi)u_0(x),$$

1) 这是很清楚的. 因为我们有 $\Delta = u_0u_1' - u_0'u_1 = c/p$, 其中 c 为常数. 这是根据从所给微分方程导出的方程 $p\Delta' + \Delta p' = 0$ 得到的.

$$x \geqslant \xi: \quad u = -\frac{1}{c}u_0(\xi)u_1(x),$$

$$c = p(\xi)[u_0(\xi)u_1'(\xi) - u_0'(\xi)u_1(\xi)] = \text{常数}.$$

在第二种情形中, u_0 和 u_1 只差一常数因子. 每一属于第一族的解也属于另一族. 因此 $u_0(x)$ 不但满足在 $x = x_0$ 点的条件而且也满足在 $x = x_1$ 点的条件, 而方程 $L[u] = 0$ 就有一个满足边条件的非零解 $u_0(x)$. 这就是说, $\lambda = 0$ 是 $L[u] + \lambda u = 0$ 的一个本征值. 因此上述格林函数的作法失败, 格林函数不存在.

格林函数的存在是和微分方程 $L[u] = -\varphi(x)$ 的齐次边值问题的唯一解的存在等价的 (参看本节第 1 小节). 因此下述*二者之一成立*: 在给定的齐次边界条件下, 或者方程 $L[u] = -\varphi(x)$ 对于每一给定的 $\varphi(x)$ 有一唯一确定的解 $u(x)$, 或者齐次方程 $L[u] = 0$ 有一非平凡解.

还有, 在第二种情形中, 非齐次问题 $L[u] = -\varphi(x)$ 有解的必要和充分条件是齐次方程 $L[u] = 0$ 的解 $u_0(x)$ 和右方的 $\varphi(x)$ 满足正交关系

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)u_0(x)dx = 0.$$

要看出正交条件之为必要可以 $u_0(x)$ 乘微分方程 $L[u] + \varphi(x) = 0$, 在区域 G 中积分, 应用格林公式并顾及边界条件. 该条件之为充分也可以证明, 只要引进“*广义的格林函数*”以代替格林函数即可. 我们仍用一简单的根据物理直观而有启发性的讨论来引进这函数. 我们要提醒一下 (参看 5.3 节), 如果 λ 是一个本征值, 其相属规一本征函数为 u, 则在形如 $-\psi(x)e^{i\sqrt{\lambda}t}$ 的一外力作用下, 弦会变成不稳定的 (共振), 除非条件 $\int_{x_0}^{x_1} \psi(x)u(x)dx = 0$ 得到满足. 在我们现在的情形中, $\lambda = 0$, 这意味在一与时间无关的外力的影响下的不稳定性. 特别地, 当点力作用在任一点时, 弦是不稳定的. 如果要想这系统在一点力作用下不致离开它的平衡状态任意远, 我们必须用一固定的、与时间无关的反力来平衡这弦. 这反力可以任意选择, 但它不得与本征函数 $u_0(x)$ 正交, 否则它就不会防止零本征频率的激发了. 为方便起见, 我们假设这平衡力具有对称的形式: $\psi(x) = -u_0(x)u_0(\xi)$. 于是, 作用在点 $x = \xi$ 上的点力的影响函数 $\mathrm{K}(x,\xi)$ 不但满足边界条件, 而且, 除去在 $x = \xi$ 这点而外, 还满足微分方程

$$L[\mathrm{K}] = u_0(x)u_0(\xi),$$

在 $x = \xi$ 这点它必须满足间断条件 (95). 这些条件决出一函数 K, 但不完全决定 (可以加一任意函数 $c(\xi)u_0(x)$). 要想挑出一个特殊的函数 K, 我们要求

$$\int_{x_0}^{x_1} \mathrm{K}(x,\xi)u_0(x)dx = 0,$$

并把这样定义的函数 K 叫作微分式 $L[u]$ 的广义格林函数. 利用 $L[u]$ 是一个自伴微分式的假定, 我们发现, 和以前一样, 广义格林函数具有对称性

$$\mathrm{K}(x,\xi)=\mathrm{K}(\xi,x).$$

这些讨论可以用一简单的例子来说明. 这例子就是两端自由的弦 (还可参看 5.15.1 小节). 在这里, $u_0=$ 常数是 $\lambda=0$ 的一个本征函数; 我们取一沿整个弦长是常数的力为反力.

广义格林函数可以用造普通格林函数同样的方法来造出. 我们只需证明: 如果 $L[u]=0$ 有一满足边界条件的非平凡解 u_0, 则 $L[v]=u_0(\xi)u_0(x)$ 不能有这样的解. 事实上, 如以 $u_0(x)$ 乘后一个方程, 在基本区域上积分并利用边界条件, 我们得

$$u_0(\xi)\int_{x_0}^{x_1}u_0^2(x)dx=\int_{x_0}^{x_1}v(x)L[u_0]dx=0,$$

而这是和 $\int_{x_0}^{x_1}u_0^2(x)dx\neq 0$ 的假定相矛盾的.

广义格林函数有与以前的普通格林函数相同的作用. 注意, 微分方程 $L[w]=-\varphi(x)$ 的解 $w(x)$ 只决定到差一任意可加函数 $cu_0(x)$ 的程度, 因此我们可加一个条件 $\int_{x_0}^{x_1}wu_0dx=0$ 来确定它. 这样我们有定理: 令 $w(x)$ 为与 $u_0(x)$ 正交的函数, 它满足边界条件, 且有连续的一阶和分段连续的二阶微商, 如 $w(x)$ 同分段连续的函数 $\varphi(x)$ 通过方程

$$L[w]=-\varphi(x)$$

相联系, 则如前的关系

$$w(x)=\int_{x_0}^{x_1}\mathrm{K}(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi \tag{98}$$

亦成立.

反过来, 如果 $\varphi(x)$ 同 $u_0(x)$ 正交, 则从后一关系可以推出前一关系, 这一逆定理包含 284 页中所叙定理的第二部分.

这里的证明与普通格林函数的相应证明类似, 不过每一形如 (98) 的函数 $\varphi(x)$ 必须同 $u_0(x)$ 正交, 因为格林函数 $\mathrm{K}(x,\xi)$ 有这性质.

我们已经看到, 在这里所讨论的二阶常微分方程的情形, $\lambda=0$ 最多只能是单重本征值. 如果 $\lambda=0$ 是重本征值 (对于高阶的微分方程而言), 我们可以用形如

$$\psi(x)=-u_0(x)u_0(\xi)-u_1(x)u_1(\xi)-\cdots$$

的对抗力来造出广义格林函数, 其中 $u_0,u_1,\cdots$ 是属于本征值 $\lambda=0$ 的诸正交本征函数.

5.14.3 微分方程和积分方程的等价

利用格林函数, 把微分方程变为一积分方程, 我们可以完全解决早先讨论的本征值问题. 我们来看线性地依赖于参量 λ 的一族微分方程

$$L[u]+\lambda\rho u=\psi(x)\quad(\rho(x)>0);\tag{99}$$

此处 $\psi(x)$ 是一个分段连续的函数, $\rho(x)$ 一正的连续函数, 而 u 假定满足给定的边界条件, 譬如说 $u=0$. 如果在所给的边界条件下, $L[u]$ 的格林函数存在, 则从公式 (94), 令 $\varphi(x)=\lambda\rho u-\psi$, 立得下面的方程

$$u(x)=\lambda\int_{x_0}^{x_1}\mathrm{K}(x,\xi)\rho(\xi)u(\xi)d\xi+g(x),\tag{100}$$

其中

$$g(x)=-\int_{x_0}^{x_1}\mathrm{K}(x,\xi)\psi(\xi)d\xi$$

是 x 的一个给定的函数; 方程 (100) 与 (99) 等价. 因此, 在指定的边界条件下求 (99) 的解 u, 与解积分方程 (100) 等价. 齐次积分方程

$$u(x)=\lambda\int_{x_0}^{x}\mathrm{K}(x,\xi)\rho(\xi)u(\xi)d\xi$$

对应于齐次方程

$$L[u]+\lambda\rho u=0.\tag{101}$$

如果我们引进新的未知函数

$$z(x)=u(x)\sqrt{\rho(x)},$$

以 $\sqrt{\rho(x)}$ 乘积分方程而令 $K(x,\xi)=\mathrm{K}(x,\xi)\sqrt{\rho(x)\rho(\xi)}$, 则有与 (101) 相应的积分方程

$$z(x)=\lambda\int_{x_0}^{x_1}K(x,\xi)z(\xi)d\xi.\tag{102}$$

(102) 中的核 $\mathrm{K}(x,\xi)$ 是对称的, 因为 $L[u]$ 自伴 [1]. 因此我们可以应用第 3 章中研究过的关于对称核的诸定理, 而得关于微分方程 (99) 的一些结果 —— 结果的一部分已包含在本节第 2 小节中.

在非齐次微分方程 (99) 的边值问题与齐次微分方程 (101) 在所给齐次边界条件下的边值问题之间还有下述的另一关系：或者, 对于固定的 λ, 齐次微分方程 (101) 只有恒等于零的解 (λ 非 (101) 的本征值); 这时, 对于任意的 $\psi(x)$, 非齐次方

1) 这一对称性及其结果显示出假定 $L[u]$ 自伴的意义.

程 (99) 有一个而且只有一个解. 或者, 对于某 $\lambda=\lambda_i$, 齐次方程 (101) 有非平庸解 u_i(λ_i 是 (101) 的一个本征值, u_i 为相应本征函数); 这时, 当且仅当关系

$$\int_{x_0}^{x_1}\rho u_i\psi dx=0$$

对于所有相属于本征值 λ_i 的本征函数 u_i 都成立, 非齐次方程 (99) 才在 $\lambda=\lambda_i$ 时有解.

此外还有: 存在一序列的本征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots(\lambda_n\to\infty)$ 及相应本征函数 $u_1,u_2,\cdots$; 后者作成一无穷函数组, 并满足下列正交关系

$$\int_{x_0}^{x_1}\rho u_iu_kdx=0\ \ (i\neq k),\quad \int_{x_0}^{x_1}\rho u_i^2dx=1.$$

如果我们能够通过格林函数 $\mathrm{K}(x,\xi)$ 为核把一个函数 $w(x)$ 用分段连续函数 $\varphi(\xi)$ 表为

$$w(x)=\int_{x_0}^{x_1}\mathrm{K}(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi,$$

那么 $w(x)$ 就能按本征函数展为一绝对而且一致收敛的级数

$$w(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nu_n(x),\quad c_n=\int_{x_0}^{x_1}w\rho u_ndx.$$

可以更简单一些地来表述能够这样展开的函数的特征. 由格林函数的基本性质, 从 (94) 得方程 $L[w]=-\varphi(x)$. 反过来, 如果考虑任一具有连续一阶微商及分段连续二阶微商, 并满足边界条件的函数 $w(x)$, 我们可以用方程 $L[w]=-\varphi(x)$ 来造出一个源分布函数 $\varphi(x)$. 因此, 我们得到下述结果: 每一具有连续一阶微商及分段连续二阶微商并满足边界条件的函数 $w(x)$ 可以展为一绝对而且一致收敛的级数 $w(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_nu_n(x)$.

这一定理告诉我们, *本征函数作成一完备的正交组*. 因为, 任何一个在 G 中连续的函数可以用一个具有连续一、二阶微商的连续函数来平均逼近至任意的准确程度. 于是, 根据方才所说的展开定理, 它也可以用一有限组合 $\sum\limits_{n=1}^{m}c_nu_n(x)$ 来逼近.

以前注意到的所有本征值都是正的事实[1] (用积分方程论的术语, 核 $K(x,\xi)$ 是正定的) *使展开定理具有更强的形式*. 由于 $K(x,\xi)$ 是 x,ξ 的一个连续函数, 我们可以应用 Mercer 定理 (第 3 章 3.5.4 小节) 而得出结论: 核的级数展开

$$K(x,\xi)=\sqrt{\rho(x)\rho(\xi)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(x)u_n(\xi)}{\lambda_n}$$

---

1) 参看 238 页.

或

$$\mathrm{K}(x,\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(x)u_n(\xi)}{\lambda_n} \tag{103}$$

绝对且一致收敛. 这显明地把格林函数同本征函数相联系的公式简称为*变线关系*; 对于固定的 ξ, 它代表一具有分段连续一级微商的连续函数的级数展开. 如果我们作一线性组合

$$S=\alpha_1\mathrm{K}(x,\xi_1)+\alpha_2\mathrm{K}(x,\xi_2)+\cdots,$$

则得一连续函数, 它的一阶微商在指定点 $\xi_1,\xi_2\cdots$ 具有指定的跳跃 $-\alpha_1/p(\xi_1)-\alpha_2/p(\xi_2),\cdots$; 这函数可以展为一绝对且一致收敛的本征函数级数. 因为从任意一个具有分段连续一、二阶微商的函数, 可以减去一特殊的函数 S 而使其差满足上面展开定理所要求的条件, 所以我们有下述结果: *展开定理成立的充分条件是连续函数 $w(x)$ 的一、二阶微商分段连续.*

在本节中, 我们假定了 $L[u]$ 的格林函数存在, 就是说, $\lambda=0$ 不是微分方程 $L[u]+\lambda\rho u=0$ 的本征值 (本节第 2 小节). 如果这假定不成立, 我们就以广义格林函数代替普通格林函数; 所有上面把方程 (101) 的本征值问题化为一积分方程问题的讨论都成立. 要保证展开定理有效, 我们还应加进 $w(x)$ 和 $\lambda=0$ 相属的本征函数 $u_0(x)$ 正交的条件. 但这条件在最后表述展开定理时可完全不出现, 如果我们把属于本征值 $\lambda=0$ 的本征函数也包括进来的话. 零本征值的出现, 并不意味任何特别之处. 这一点将在以后我们用变分法来探讨本征值问题时看到 (第 6 章 6.1 节).

最后, 我们来把非齐次方程 (99) 的解用本征函数展开. 与以前 5.3.3 小节中的方案相应 (这种方案现在由与展开定理而得到证实, 或直接由积分方程的定理 [第 3 章公式 (56)] 而得到证实), 我们得到解

$$u(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n u_n(x),\gamma_n=\frac{c_n}{\lambda-\lambda_n},c_n=\int_{x_0}^{x_1}u_n(x)\psi(x)dx.$$

这使我们弄清了下面的事实: 如 $\lambda=\lambda_i$ 为一本征值, 则除非正交关系 $\int_{x_0}^{x_1}\psi u_i dx=0$ 得到满足, 否则方程 (99) 不能解. 用物理的语言来说: *当外力与本征振动共振时, 当且仅当系统在按本征振动运动时外力不做功*, 才有稳定态存在.

5.14.4　高阶常微分方程

高阶微分方程并没有本质上的差异. 我们只讨论与微分方程 $u''''-\lambda u=0$ (均匀杆) 或 $u''''-\lambda\rho u=0$ (非均匀杆) 有关的一个典型例子. 同以前一样, 我们引进影响函数或格林函数, 它代表在平衡态中, 且在作用于点 $x=\xi$ 的点力的影响下, 杆满足指定的边界条件的位移. 用和上面相同的方法, 我们得到下述关于格林函数的典型条件:

(1) 对于参数 ξ 的每一数值, 函数 $\mathrm{K}(x,\xi)$ 及其一、二阶微商连续, $\mathrm{K}(x,\xi)$ 并且满足指定的齐次边界条件.

(2) 在任何异于 $x=\xi$ 的点, $\mathrm{K}(x,\xi)$ 对 x 的三、四阶微商也都连续. 但在 $x=\xi$ 这点, 有下述间断关系

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[\mathrm{K}'''(\xi+\varepsilon,\xi)-\mathrm{K}'''(\xi-\varepsilon,\xi)]=-1.$$

(3) 除去 $x=\xi$ 这点, 微分方程

$$\mathrm{K}''''(x,\xi)=0$$

处处满足.

格林函数的基本性质可以叙述如下：令 $u(x)$ 为一满足边界条件的连续函数, 它有连续的一、二、三阶微商及分段连续的四阶微商; 令 $\varphi(x)$ 为一分段连续的函数. 如 $u(x)$ 与 $\varphi(x)$ 间有下述关系:

$$L[u]=u''''=-\varphi(x),$$

则

$$u(x)=\int_{x_0}^{x_1}\mathrm{K}(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi;$$

反过来亦然.

关于更普遍的微分方程

$$u''''-\lambda\rho u=0$$

的本征值问题, 关于展开定理, 以及关于非齐次方程

$$u''''-\lambda\rho u=-\psi(x)$$

的理论等等, 都可以和本节第 3 小节中的相应问题一样加以处理, 那就是, 化为具有对称核 $K(x,\xi)=\mathrm{K}(x,\xi)\sqrt{\rho(x)\rho(\xi)}$ 的一个积分方程. 所得结果是：存在一无穷组的本征值 $\lambda_1,\lambda_2\cdots$ 及相属本征函数 $u_1,u_2,\cdots$, 后者具有这样一些性质：函数 $\sqrt{\rho}u_i$ 成一完整的正交系, 任一满足边界条件并有直到三阶的连续微商及分段连续四阶微商的函数 $w(x)$ 可以依这些函数展为一绝对且一致收敛的级数. 此外, 根据 Mercer 定理[1], 变线性关系

$$\mathrm{K}(x,\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(x)u_n(\xi)}{\lambda_n}$$

成立, 并且展开定理还可以推广到三阶微商只是分段连续的函数.

关于存在性的证明, 格林函数及广义格林函数的造出, 都没有新的困难. 这些问题将在 5.15 节的例子中阐明.

1) 参看第 3 章 3.5.4 小节. 像在振动弦的问题中一样, 我们可以证明这核是正定的.

5.14.5 偏微分方程

在齐次边界条件的偏微分方程问题中, 格林函数仍可作为一与之等价的积分方程的核引进. 作为一个例子, 我们来看在 $x-y$ 平面上的区域 G 中, 齐次边界条件 (例如 $v=0$) 下的二阶偏微分方程

$$\Delta v = -\varphi(x,y).$$

这方程表征一绷紧的膜当处于平衡态时, 在一与时间无关密度为 $\varphi(x,y)$ 的力的作用下的偏离. 同以前一样, 可以借助于一格林函数 $\mathrm{K}(x,y;\xi,\eta)$ 来求得其解, 这函数代表作用于 (ξ,η) 点的点力在 (x,y) 点所生的影响. 函数 K, 除去 $x=\xi, y=\eta$ 这点外, 必须处处有连续一、二阶微商, 并满足微分方程 $\Delta\mathrm{K}=0$. 此外, K 还必须满足给定的边界条件, 并在源点 $x=\xi, y=\eta$ 处具有一表示点力特性的奇点. 这奇点的性质可以这样来确定: 用一半径为 ε 的圆 k 围住源点, 假定有一在 k 内密度为 $\varphi_\varepsilon(x,y)$, 在 k 外等于零, $\iint_k \varphi_\varepsilon(x,y)dxdy=1$ 的外力, 然后把格林函数 $\mathrm{K}(x,y;\xi,\eta)$ 看作是 $\Delta\mathrm{K}=-\varphi_\varepsilon$ 满足给定边界条件的解 $\mathrm{K}_\varepsilon(x,y;\xi,\eta)$ 当 $\varepsilon\to 0$ 时的极限. 在半径 $\delta\geqslant\varepsilon$ 的圆 κ 上将方程 $\Delta\mathrm{K}=-\varphi_\varepsilon$ 积分并用格林公式, 得

$$\int_\kappa \frac{\partial}{\partial r}\mathrm{K}_\varepsilon ds = -1.$$

此处 $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$ 代表由 (ξ,η) 点至 (x,y) 点的距离, s 是边界 κ 的弧长. 因此, 我们必须把刻画格林函数所需加的条件写为

$$\int_\kappa \frac{\partial}{\partial r}\mathrm{K}(x,y;\xi,\eta)ds = -1.$$

如果我们要求 K 在源点邻近的形式为

$$\mathrm{K}(x,y;\xi,\eta) = -\frac{1}{2\pi}\log r + \gamma(x,y;\xi,\eta),$$

其中 $\gamma(x,y;\xi,\eta)$ 以及它的一、二阶微商都是 x,y 的连续函数, 则此条件即满足 (因为对于 $r\neq 0, \log r$ 是势方程的一个解, 所以 γ 本身也是一个正规的势函数).

把这有启示性的讨论的次序倒过来, 我们以下列条件来定义格林函数 K:

(1) 除源点 (ξ,η) 外, 函数 $\mathrm{K}(x,y;\xi,\eta)$ 及其对 x,y 的一、二阶微商都连续. 函数 K 具有形式

$$\mathrm{K}(x,y;\xi,\eta) = -\frac{1}{2\pi}\log r + \gamma(x,y;\xi,\eta),$$

其中 $\gamma(x,y;\xi,\eta)$ 及其直到二阶的微商是连续的.

(2) K 满足指定的齐次边界条件.

(3) 除源点外, 微分方程 $\Delta \mathrm{K}=0$ 处处满足.

这样定义的格林函数满足对称条件

$$\mathrm{K}(x,y;\xi,\eta)=\mathrm{K}(\xi,\eta;x,y).$$

这一对称性正是早先强调过的物理上互逆性的表示, 它可以仍旧用格林公式来证明. 证明时我们从 G 中除去以 (ξ,η) 及 (ξ',η') 两点为圆点, 半径等于 ε 的两个小圆, 在所得区域中应用格林公式于函数 $\mathrm{K}(x,y;\xi,\eta)$ 及 $\mathrm{K}(x,y;\xi',\eta')$, 取极限 $\varepsilon\to 0$ 并注意格林函数的奇异性, 即得 —— 由于边界条件, 在 G 的边界 Γ 上的积分为零 —— 对称公式 $\mathrm{K}(\xi',\eta';\xi,\eta)=\mathrm{K}(\xi,\eta;\xi',\eta')$.

同以前一样, 格林函数的基本性质是: 令 $u(x,y)$ 为任一满足齐次边界条件 (譬如 $u=0$) 并在 G 中有连续一阶及分段连续二阶微商的连续函数, 如果

$$L[u]=\Delta u=-\varphi(x,y),$$

则关系

$$u(x,y)=\iint_G \mathrm{K}(x,y;\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

成立. 反过来, 如果 $\varphi(x,y)$ 是在 G 中具有连续一阶微商的连续函数, 则在 G 中连续的函数

$$u(x,y)=\iint_G \mathrm{K}(x,y;\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

有一、二阶连续微商并满足方程

$$\Delta u=-\varphi(x,y)$$

及边界条件.

注意, 在定理的第二部分中, 对于 $\varphi(x,y)$ 的可微分性所作的假设较在第一部分中为强 (对于常微分方程无此差别).

定理的第一部分结果差不多仍可立刻从格林公式 (5a) 得到. 我们在区域 $G\to k$ 中 (k 是以 (x,y) 点为圆心, 半径等于 ε 的小圆, 仍令其周界为 κ) 应用这公式于 $v=\mathrm{K}(x,y;\xi,\eta)$. 因为在这样的区域中 $\Delta\mathrm{K}=0$, 而在边界 Γ 上的积分为零, 故剩下来的只有

$$\int_\kappa\left(u\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial n}-\mathrm{K}\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds=\iint_{G-k}\mathrm{K}\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时, $\int_\kappa u(\partial\mathrm{K}/\partial n)ds$ 趋于 $u(x,y)$ 而 $\int_\kappa \mathrm{K}(\partial u/\partial n)ds$ 趋于零, 故有

$$u=\iint_G \mathrm{K}\varphi d\xi d\eta.$$

定理的第二部分可用黎曼想出来的一个办法, 非常简单地来证明; 这里用到 $\varphi(x,y)$

的一阶微商连续这假设[1]. 把函数 $u(x,y)=\iint_G \mathrm{K}(x,y;\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta$ 分为与格林函数 $\mathrm{K}=-\log r/2\pi+\gamma(x,y;\xi,\eta)$ 相应的两项, $u=\psi+\chi$, 其中

$$2\pi\psi(x,y)=-\iint_G \varphi(\xi,\eta)\log r d\xi d\eta,$$

$$\chi(x,y)=\iint_G \gamma(x,y;\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

由于函数 $\gamma(x,y;\xi,\eta)$ 及其直到二阶的微商都处处连续, 我们可以在积分号下求微商来算 $\Delta\chi$. 因 $\Delta\gamma=0$, 故 $\Delta\chi=0$. 因此在算 Δu 时只要算 $\Delta\psi$. 仍用积分号下求微商, 我们得到一阶微商 ψ_x. 引入极坐标 r,θ, 积分 $\iint_G \varphi(\xi,\eta)\log r d\xi d\eta$ 变成 $\iint_G \varphi r\log r dr d\theta$. 但是如果在引入极坐标之前, 我们先对 x 微分, 则积分就成为 $\iint_G \varphi\cos\theta dr d\theta$, 而被积函数仍连续. 如果暂时令 $-\log r/2\pi=S(x,y;\xi,\eta)$, 得

$$\psi_x=\iint_G S_x\varphi d\xi d\eta.$$

因 $S_x=-S_\xi$, 我们可写

$$\psi_x=-\iint_G S_\xi\varphi d\xi d\eta.$$

分部积分, 消去 S_ξ, 于是又可以在积分号下求微商, 我们得到

$$\psi_x=-\int_\Gamma S\varphi d\eta+\iint_G S\varphi_\xi d\xi d\eta$$

及

$$\psi_{xx}=-\int_\Gamma S_x\varphi d\eta+\iint_G S_x\varphi_\xi d\xi d\eta=\int_\Gamma S_x\varphi d\eta-\iint_G S_x\varphi_\xi d\xi d\eta.$$

同样, 可得

$$\psi_{yy}=-\int_\Gamma S_x\varphi d\xi-\iint_G S_x\varphi_\xi d\xi d\eta,$$

因此

$$\Delta\psi=\int_\Gamma \frac{\partial S}{\partial n}\varphi ds-\iint_G (S_\xi\varphi_\xi+S_\eta\varphi_\eta)d\xi d\eta.$$

如果右边的重积分的区域不是取的 G, 而是从 G 中去掉一围绕 (x,y) 点半径等于 ε 的小圆 k 之后的区域 G_ε, 则可写

$$\Delta\psi=\int_\Gamma \frac{\partial S}{\partial n}\varphi ds-\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{G_\varepsilon} (S_\xi\varphi_\xi+S_\eta\varphi_\eta)d\xi d\eta.$$

1) 仅从 φ 的连续性, 不能推出 u 有连续二阶微商, 但本书所作假设则强于所需要的.

在这表达式中, 用格林公式变换右方的重积分, 则由于在 G 中处处 $\Delta S=0$, 可得

$$\Delta\psi=\int_{\Gamma}\frac{\partial S}{\partial n}\varphi ds-\int_{\Gamma}\frac{\partial S}{\partial n}\varphi ds+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\kappa}\frac{\partial S}{\partial n}\varphi ds=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\kappa}\frac{\partial S}{\partial n}\varphi ds.$$

我们已经看到过, 右方剩下来的积分当 $\varepsilon\to 0$ 时趋于 $-\varphi(x,y)$. 这就证明了 ψ 满足*泊松方程* $\Delta f=-\varphi$.

上述关于二维情形的结果, 可以逐字逐句地用到三维的泊松方程 $\Delta u=-\varphi(x,y,z)$ 及其相属本征值问题的方程

$$\Delta u+\lambda u=0.$$

但在三维的情形, 格林函数的奇异部分是

$$\frac{1}{4\pi r}=\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}},$$

而格林函数为 $\mathrm{K}(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)=1/4\pi r+\gamma(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)$, 其中 $\gamma(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)$ 及其一、二阶微商都是连续的. 函数 $1/4\pi r$ 本身是*方程 $\Delta u=0$ 的一个基本解*.

关于偏微分方程的*格林函数的存在问题*, 不像常微分方程那样易于讨论. 普遍的存在定理将在第 II 卷用变分法中的直接方法来证明. 现在我们必须或者假定格林函数的存在, 或者限于讨论这样的情形, 在这种情形中格林函数可以明白地表示出来. 在下一节中我们将讨论这种情形. 一旦得到格林函数之后, 其余的讨论即同常微分方程并行. 这里, 我们来看当 $\rho>0$ 时, 微分方程

$$\Delta v+\lambda\rho(x,y)v=0 \tag{104}$$

在给定齐次边界条件下的本征值问题. 根据格林函数的基本性质, 我们立刻从 (104) 得到齐次积分方程

$$v(x,y)=\lambda\iint_G \mathrm{K}(x,y;\xi,\eta)\rho(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

引进对称核

$$K=\mathrm{K}\sqrt{\rho(x,y)\rho(\xi,\eta)},$$

则函数

$$u(x,y)=\sqrt{\rho(x,y)}v(x,y)$$

显然满足对称齐次积分方程

$$u(x,y)=\lambda\iint_G K(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi d\eta. \tag{105}$$

这些关系都是可以反过来的, 因此方程 (104) 的本征值问题完全同样称积分方程 (105) 的等价. 这积分方程可以用第 3 章中的理论来处理, 因为虽然它的核在积分

区域中的某点趋于无穷, 但积分 $\iint_G \mathrm{K}(x,y;\xi,\eta)^2 d\xi d\eta$ 存在而且是变数 x,y 的连续函数. 因此, *存在本征值*: $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$ (*当* $n\to\infty$ *时* $\lambda_n\to\infty$), *且有一相应的本征函数组* $v_1,v_2,\cdots$ *或* $u_1,u_2,\cdots$, 其中函数 u_n 可以设为规一的. 按照关于格林函数的定理, 任何函数 $w(x,y)$, 只要有连续一、二阶微商, 并满足边界条件, 就可以用函数 $h=-\Delta w$ 表为一积分形式

$$w(x,y)=\iint_G K(x,y;\xi,\eta)h(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

于是我们得到这样的结果: 每一具有连续一、二阶微商并满足边界条件的函数 $w(x,y)$, 都可以按本征函数展为一绝对且一致收敛的级数 $w=\sum_{n=1}^{\infty}c_n v_n(x,y), c_n=\iint_G \rho w v_n dxdy$. 因此, 诸规一函数 $\sqrt{\rho}v_n$ 成一完备正交组.

由于格林函数趋于无穷, Mercer 定理不能像在常微分方程的情形那样在这里应用. 所以, 虽然核具有正定性, 但我们不能得出结论说方程

$$\mathrm{K}(x,y;\xi,\eta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n(x,y)v_n(\xi,\eta)}{\lambda_n}$$

成立. 我们的普遍理论只证明了较弱的关系

$$\lim_{m\to\infty}\iint_G\left[\mathrm{K}-\sum_{n=1}^{m}\frac{v_n(x,y)v_n(\xi,\eta)}{\lambda_n}\right]^2 dxdy=0.$$

关于普遍的自伴微分方程

$$p\Delta v+p_x v_x+p_y v_y-qv+\lambda\rho v=0$$

的讨论, 可以和前面的讨论并行, 因此只要指出结果不变这一事实就够了. 唯一应当提到的不同之处是, 格林函数现在应当为

$$\mathrm{K}(x,y;\xi,\eta)=-\frac{\alpha(x,y;\xi,\eta)}{2\pi p(\xi,\eta)}\log r+\gamma(x,y;\xi,\eta),$$

其中 $\gamma(x,y;\xi,\eta)$ 及其直到二阶的微商都在奇点的邻域中连续 (虽然一般说来, γ 不需再是微分方程的解), 而 α 则代表一适当的具有连续一、二阶微商的函数, 且 $\alpha(\xi,\eta;\xi,\eta)$ 恒等于 1.

同样, 对于*高阶的偏微分方程*, 唯一主要的差别在于格林函数的奇点的形状. 举例说, 如果所讨论的是含有两个独立变数的板的微分方程

$$\Delta\Delta v=-\varphi(x,y),$$

我们不仅用边界条件和方程 $\Delta\Delta \mathrm{K}=0$ 来决定格林函数, 而且还要假定它的形式为

$$\mathrm{K}=-\frac{1}{8\pi}r^2\log r+\gamma(x,y;\xi,\eta),$$

其中 $\gamma(x,y;\xi,\eta)$ 及其直到四级的微商都是连续的. 读者将很容易验证, 这样给的奇点是正确的, 就是说, 它的确对应于一点力. 还有一点应当强调的就是, 函数 $r^2\log r$ 本身是 $\Delta\Delta v=0$ 的一个基本解.

对于板的情形, 通过相应的积分方程仍证明: 存在一本征值序列及其相属本征函数, 后者构成一完备正交组; 每一个在 G 中具有直到四阶的连续微商并满足边界条件的函数都可以按这些本征函数展为一绝对且一致收敛的级数.

5.15 格林函数的例子

5.15.1 常微分方程

微分式

$$L[u]=u''$$

在区间 (0, 1) 上, 以 $u(0)=u(1)=0$ 为边界条件时的格林函数为

$$\mathrm{K}(x,\xi)=\begin{cases}(1-\xi)x, & \text{当}\quad x\leqslant\xi,\\(1-x)\xi, & \text{当}\quad x>\xi.\end{cases}$$

若边界条件为 $u(0)=0,u'(1)=0$, 则格林函数为

$$\mathrm{K}(x,\xi)=\begin{cases}x, & \text{当}\quad x\leqslant\xi,\\\xi, & \text{当}\quad x>\xi.\end{cases}$$

在区间 $-1\leqslant x\leqslant +1$ 上, 边界条件为

$$u(-1)=u(1)=0$$

时, 我们有

$$\mathrm{K}(x,\xi)=-\frac{1}{2}\{|x-\xi|+x\xi-1\},$$

这个式子也可以由第一个例子作变换得出. 此外, 在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上, 边界条件为 $u(0)=-u(1),u'(0)=-u'(1)$ 时, 我们有

$$\mathrm{K}(x,\xi)=-\frac{1}{2}|x-\xi|+\frac{1}{4}.$$

联属于零级贝塞尔函数 $J_0(x)$ 的微分式

$$L(u)=xu''+u'$$

在区间 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上及边界条件为 $u(1)=0, u(0)$ 为有限时的格林函数具有以下形式:

$$\mathrm{K}(x,\xi)=\begin{cases} -\log\xi, & \text{当} \quad x\leqslant\xi, \\ -\log x, & \text{当} \quad x>\xi. \end{cases}$$

这可以按前一节的一般方法加以证实. 在边界条件 $u(1)=0, u(0)$ 为有限时, 联属于贝塞尔函数 $J_n(x)$ [见方程 (28)] 的微分式

$$L[u]=(xu')'-\frac{n^2}{x}u$$

具有格林函数

$$\mathrm{K}(x,\xi)=\frac{1}{n}\left[\left(\frac{x}{\xi}\right)^n-(x\xi)^n\right] \quad (x\leqslant\xi),$$

$$\mathrm{K}(x,\xi)=\frac{1}{n}\left[\left(\frac{\xi}{x}\right)^n-(x\xi)^n\right] \quad (x>\xi).$$

作为另一个例子, 试考虑微分式

$$L[u]=((1-x^2)u')'-\frac{h^2}{1-x^2}u,$$

当 $h=0,1,2,\cdots$ 时, 这个式子依次联属于零阶, 一阶, $\cdots$ 勒让德多项式; 在这里, 定义区间为 $-1\leqslant x\leqslant +1$, 边界条件为: u 在两端有限. 我们可以立刻定出方程 $L[u]=0$ 在 $x=-1$ 和 $x=1$ 有限的解, 这依次为 $c_1[(1+x)/(1-x)]^{h/2}$ 和 $c_2[(1-x)/(1+x)]^{h/2}$. 按照 5.14.2 小节中的法则作这两个解的组合, 我们得到格林函数

$$\mathrm{K}(x,\xi)=\frac{1}{2h}\left(\frac{1+x}{1-x}\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^{h/2} \quad (x\leqslant\xi),$$

$$\mathrm{K}(x,\xi)=\frac{1}{2h}\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\frac{1-x}{1+x}\right)^{h/2} \quad (x>\xi).$$

按照一般理论, 以上作法当 $h=0$ 时不成立, 因为这时候方程 $L[u]=0$ 具有规一解 $u=1/\sqrt{2}$, 这个解到处正规而且满足边界条件. 因此当 $h=0$ 时, 我们必须求广义格林函数, 它满足方程

$$L[u]=\frac{1}{2}.$$

可求出这函数为

$$\mathrm{K}(x,\xi)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2}\log[(1-x)(1+\xi)]+c & (x\leqslant\xi), \\ -\dfrac{1}{2}\log[(1+x)(1-\xi)]+c & (x>\xi), \end{cases}$$

其中 $c=\log 2-\dfrac{1}{2}$.

另一个出现广义格林函数的简单例子为微分式

$$L[u]=u'',$$

在区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上要它的解满足周期边界条件 $u(-1)=u(1), u'(-1)=u'(1)$. 在这里, 也有 $L[u]=0$ 的一正规解 $u=1/\sqrt{2}$ 同时满足两端的边界条件 (相应于两端自由的弦的物理问题). 因此, 我们必须由微分式

$$u''=\frac{1}{2}$$

造出广义格林函数, 我们很容易得出

$$\mathrm{K}(x,\xi)=-\frac{1}{2}|x-\xi|+\frac{1}{4}(x-\xi)^2+\frac{1}{6}.$$

所有这些格林函数都可以作为和各微分方程问题相应的积分方程的核. 我们明晰写出联属于这些例子的变线公式如下:

$$\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x\sin n\pi\xi}{n^2}=\begin{cases}(1-\xi)x & (x\leqslant\xi),\\ (1-x)\xi & (x>\xi),\end{cases}$$

$$\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\xi}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}=\begin{cases}x & (x\leqslant\xi),\\ \xi & (x>\xi),\end{cases}$$

此外有

$$\mathrm{K}(x,\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)P_n(x)P_n(\xi)}{n(n+1)},$$

其中

$$\mathrm{K}(x,\xi)=\begin{cases}-\frac{1}{2}\log[(1-x)(1+\xi)]+\log 2-\frac{1}{2} & (x\leqslant\xi),\\ -\frac{1}{2}\log[(1+x)(1-\xi)]+\log 2-\frac{1}{2} & (x>\xi).\end{cases}$$

最后, 我们特别让读者注意联属于埃尔米特及拉盖尔多项式或正交函数的格林函数和积分方程.

正交埃尔米特函数的微分方程 (49)

$$u''+(1-x^2)u+\lambda u=0$$

当边界条件为函数在正负无穷正规时, 有本征值 $\lambda=0$. 为了避免造广义格林函数, 我们考虑数值 $\lambda=-2$, 这显然不是本征值; 因此, 在边界条件: 解在 $\pm\infty$ 为零之下, 我们可以造微分式

$$L[u] = u'' - (1+x^2)u$$

的格林函数. 为了要求得方程 $L[u]=0$ 的通解, 我们先注意 $u(x)=e^{x^2/2}$ 是 $L[u]=0$ 的解. 设通解为 $u=we^{x^2/2}$, 我们立刻得出 w 的方程

$$w'' + 2w'x = 0,$$

在显然的解 $w=$ 常数外, 这方程有解为

$$w = c_1\int_{c_2}^{x} e^{-t^2}dt.$$

这样, 我们就得到

$$u = c_1 e^{x^2/2}\int_{c_2}^{x} e^{-t^2}dt.$$

因此在 $x=+\infty$ 和 $x=-\infty$ 为零的特解依次可由积分

$$ae^{x^2/2}\int_{x}^{\infty} e^{-t^2}dt \quad 及 \quad be^{x^2/2}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2}dt$$

给出. 这些式子立刻导致以下格林函数的表示式 [1]:

$$\mathrm{K}(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{(x^2+\xi^2)/2}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2}dt\int_{\xi}^{\infty} e^{-t^2}dt & (x\leqslant\xi), \\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{(x^2+\xi^2)/2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\xi} e^{-t^2}dt\int_{x}^{\infty} e^{-t^2}dt & (x>\xi). \end{cases}$$

因子 $1/\sqrt{\pi}$ 保证了微商应有的不连续性, 因为公式

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = 1$$

成立.

微分方程 $L[u]+\lambda u=0$ 和积分方程

$$u(x) = \lambda\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{K}(x,\xi)u(\xi)d\xi$$

具有本征值 $\lambda = 2n+2(n=0,1,2,\cdots)$ 及本征函数

$$e^{-x^2/2}H_n(x).$$

拉盖尔函数 $e^{-x/2}L_n(x)$ 为微分方程

$$xu'' + u' + \left(\frac{1}{2}-\frac{x}{4}\right)u + \lambda u = 0$$

1) 见 R. Neumann. Die Entwicklung willkürlicher Funktionen etc. Breslau: Dissertation, 1912.

相应于本征值 $\lambda = n(n = 0, 1, 2, \cdots)$ 的解. 我们对特殊的数值 $\lambda = -1$ 来考虑这方程, 定义

$$L[u] = xu'' + u' - \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{4}\right)u.$$

方程 $L[u] = 0$ 的特解 $e^{x/2}$. 设通解为

$$u = we^{x/2},$$

则和前面一样我们得到 w 的表示式

$$w = c_1 \int_{c_2}^{x} \frac{e^{-t}}{t} dt,$$

因此在 $x = 0$ 正规及在无穷为零的两个特解依次为

$$ae^{x/2} \quad 和 \quad be^{x/2} \int_{x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

满足 5.10.4 小节中所叙述的边界条件的格林函数可由以上的解造出为

$$\mathrm{K}(x, \xi) = \begin{cases} e^{(x+\xi)/2} \displaystyle\int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt, & 当 \quad x \leqslant \xi, \\ e^{(x+\xi)/2} \displaystyle\int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt, & 当 \quad x > \xi. \end{cases}$$

在区间 $-\infty < x < \infty$ 上考虑微分式

$$L[u] = u''$$

及边界条件: u 有限, 则格林函数不存在. 与此相应的事实是齐次方程 $u'' = 0$ 在无穷处正规的解为 $u =$ 常数. 另一方面, 微分式

$$L[u] = u' - u,$$

则有格林函数

$$\frac{1}{2} e^{-|x-\xi|},$$

而由这函数所得的奇异积分方程

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-\xi|} \varphi(\xi) d\xi,$$

则以所有的值 $\lambda = 1 + s^2 \geqslant 1$ 为其连续谱, 相应本征函数为 $(\cos sx)/\sqrt{\pi}, (\sin sx)/\sqrt{\pi}$ (见 5.12 节). 在这里, 双线公式为积分公式

$$\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\cos sx \cos s\xi + \sin sx \sin s\xi}{1 + s^2} ds = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\cos s(x - \xi)}{1 + s^2} ds = \frac{1}{2} e^{-|x-\xi|}$$

所代替.

作为四级微分式的格林函数的例, 试在区间 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上考虑方程 $L[u] = u''''$, 边界条件为 $u(0) = u(1) = u'(0) = u'(1) = 0$(相应于两端夹住的杆). 我们不难求得

$$\mathrm{K}(x,\xi) = \frac{x^2(\xi-1)^2}{6}(2x\xi + x - 3\xi), \quad 当 \quad x \leqslant \xi$$

以及在 $x > \xi$ 时相应的表示式.

5.15.2 对圆和球 Δu 的格林函数

试考虑边界条件为 $u = 0$ 而导出圆和球的格林函数. 我们利用这样的事实: 圆和球是一动点的几何轨迹, 它运动时和两固定点 P_1, P_2 间的距离之比为一常数. 说得更精确一些, 令 $P_1 : (\xi,\eta)$ 或 (ξ,η,ζ) 为圆 $x^2+y^2=1$ 或球 $x^2+y^2+z^2=1$ 的任一内点, 令 P_2 为其反射点, 它的坐标为 $\xi/(\xi^2+\eta^2), \eta/(\xi^2+\eta^2)$(圆) 或 $\xi/(\xi^2+\eta^2+\zeta^2), \eta/(\xi^2+\eta^2+\zeta^2), \zeta/(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)$(球). 设 r_1, r_2 各为动点 $P:(x,y)$ 或 (x,y,z) 到点 P_1, P_2 的距离, 则当 P 点在圆周或球面上运动时比 $r_1 : r_2$ 为常量, 且比值为 $\sqrt{\xi^2+\eta^2}$ 或 $\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$. 现在再注意函数 $-\log r_1/2\pi, -\log r_2/2\pi$ 或 $1/4\pi r_1, 1/4\pi r_2$ 为方程 $\Delta u = 0$ 的解, 而 $-\log r_1/2\pi$ 及 $1/4\pi r_1$ 依次在 P_1 点具有基本解应有的奇异性, 因此函数

$$\mathrm{K}(x,y;\xi,\eta) = -\frac{1}{2\pi}\log\frac{r_1}{r_2} + \frac{1}{2\pi}\log\sqrt{\xi^2+\eta^2}$$

及

$$\mathrm{K}(x,y,z;\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}\right)$$

依次为在边界条件 $u = 0$ 之下圆和球的格林函数; 因为这些函数在相应边界上为零.

5.15.3 格林函数和保角映射

在两个变数的情形, 利用一个函数论的事实对我们是很有益的, 就是格林函数和把 G 映为单位圆的映像函数之间有个关系. 令 $\zeta = f(x+iy)$ 为一解析函数, 它把区域 G 保角地映为 ζ 平面上的单位圆, 而使 G 的点 (ξ,η) 变为圆心. 于是 $-\log|f(x+iy)|/2\pi$ 就是属于 G 的格林函数. 因此对可以保角映像为一圆的区域我们都有格林函数. 这样的区域包括了所有具有分段平滑边界的有界单连通区, 这一事实乃是几何函数论中的黎曼基本定理[1)].

1) 见 Hurwitz-Courant. Funktionentheorie. 三版. Berlin: J. Springer, 1929, 389-423 页, 尤其是 390-398 页.

5.15.4 在球面上的势方程的格林函数

广义格林函数的一个简单的例可由微分方程 $\Delta^* u = 0$ (见 5.8 节和 5.9.1 小节) 给出, 我们要求除了源点外解在球面的各点满足正规条件. 因为函数 $u = 1/\sqrt{4\pi}$ 在整个球面上正规, 我们必须造满足方程 $\Delta^* u = 1/4\pi$ 的广义格林函数. 我们很容易利用式子 $\Delta^* u$ 在球的任意转动下的不变性来求出这函数. 假如我们首先把格林函数的源点 P_1 放在北极 $\theta = 0$, 可以看出微分方程 $\Delta^* u = 1/4\pi$ 为函数 $-\log[2\sin\theta/2]/2\pi$ 所满足, 这个函数只依赖于坐标 θ. 显然, 假如 $\rho(\theta, \varphi; \theta_1, \varphi_1)$ 表示球面上两点 $P : (\theta, \varphi)$ 和 $P_1 : (\theta_1, \varphi_1)$ 之间的距离, 则由 $\Delta^* u$ 在转动下的不变性可得

$$\mathrm{K}(\theta, \varphi; \theta_1, \varphi_1) = -\frac{1}{2\pi} \log\left(2\sin\frac{\rho}{2}\right)$$

为方程 $\Delta^* u = 1/4\pi$ 的解, 它除 $P = P_1$ 外在各点都正规. 此外, 因为这个函数在 $P = P_1$ 具有应有的奇异性, 它就是所要求的格林函数. 假如我们用 K 为核作一积分方程

$$-2\pi Y(\theta, \varphi) = \lambda \iint_G \log\left(2\sin\frac{\rho}{2}\right) Y(\theta_1, \varphi_1) d\theta_1 d\varphi_1,$$

我们发现它仅有的本征值和本征函数就是 $(2n+1)$ 重的本征值 $\lambda = n(n+1)$ 和 5.9.1 小节中定义的相应本征函数 $Y = Y_n(\theta, \varphi)$.

5.15.5 直角平行六面体中 $\Delta u = 0$ 的格林函数 [1]

设平行六面体的边界平面为 $x = \pm a/2, y = \pm b/2, z = \pm c/2$. 作为在球的情形所用方法的自然推广 (5.15.2 小节), 我们在六面体的情形来求在边界条件 $u = 0$ 之下的格林函数, 我们造以 $\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)a, \left(m+\frac{1}{2}\right)b, \left(n+\frac{1}{2}\right)c\right)$ $(k, m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 为顶点相应于原来的平行六面体的格子, 然后将点 (ξ, η, ζ) 对格子平面重复作反射. 这样我们就得到一组点 $(ka + (-1)^k \xi, mb + (-1)^m \eta, nc + (-1)^n \zeta)$. 我们想像在每一个这样的点上集中了一单位质量, 当 $k+m+n$ 为偶数时它是正的, 当 $k+m+n$ 为奇数时它是负的. 我们可以猜想这样一种质量分布的位势在格子平面上为零, 因为在这里各单位质量的效果互相消去了. 因此, 我们就得到以下 K 的试探式 [2]:

$$\mathrm{K} = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m+n}}{\sqrt{N(k, m, n; \xi, \eta, \zeta; x, y, z)}}, \tag{106}$$

其中

1) 本节中的计算和收敛证明应归功于 A. 奥斯托洛夫斯基.

2) 见 Riemann and Hattendorf, Seh were. Elektrizität und Magnetismus. Hannover: C. Rümpler, 1880, 84-88.

$$
\begin{aligned}
&N(k,m,n;\xi,\eta,\zeta;x,y,z)\\
=&[ka+(-1)^k\xi-x]^2+[mb+(-1)^m\eta-y]^2+[nc+(-1)^n\zeta-z]^2.
\end{aligned}
$$

在这里, 因为级数最好也不过是条件收敛, 我们必须先讨论求和的次序; 为此, 我们先一般地用 $\Delta_k\varphi(k)$ 来表示式子 $\varphi(k+1)-\varphi(k)$, 其中 $\varphi(k)$ 为任一函数. 于是当固定 k 和 m 时, 省去因子 $(-1)^{k+m}$, 我们可以把 K 的表示式中里面的以 n 为指标的和写为

$$
\begin{aligned}
N'(k,m)&=\sum_{n=\pm1,\pm3,\cdots}\Delta_n\frac{1}{\sqrt{N(k,m,n)}}\\
&=-\sum_{n=0,\pm2,\pm4,\cdots}\Delta_n\frac{1}{\sqrt{N(k,m,n)}},
\end{aligned}
$$

因为 $\lim\limits_{|n|\to\infty}N(k,m,n)=\infty$. 我们把同样的变换应用于以 m 和 k 为指标的和; 因为 $\lim\limits_{|m|\to\infty}N'(k,m)=0$ (不久就将证明这一点), 我们有

$$
N''(k)=\sum_{m=\pm1,\pm3,\cdots}\Delta_mN'(k,m)=-\sum_{m=0,\pm2,\pm4,\cdots}\Delta_mN'(k,m);
$$

同样

$$
\mathrm{K}=\frac{1}{4\pi}\sum_{k=\pm1,\pm3,\cdots}\Delta_kN''(k)=-\frac{1}{4\pi}\sum_{k=0,\pm2,\pm4,\cdots}\Delta_kN''(k);
$$

因为 $\lim\limits_{|k|\to\infty}N''(k)=0$. 结合这些结果, 我们得到变换

$$
\mathrm{K}=\pm\frac{1}{4\pi}\sum_k\sum_m\sum_n\Delta_k\Delta_m\Delta_n\frac{1}{\sqrt{N(k,m,n)}},\tag{107}
$$

其中每一个求和指标或者取由 $-\infty$ 到 $+\infty$ 所有的偶整数或者取所有的奇整数. 当求和偶次加过所有的偶整数时, 总和前取 + 号; 当奇数次加过它们时则取负号.

要证明我们的论断, 只须证明最后的一个和绝对收敛. 为此我们来估计它的一般项:

$$
\begin{aligned}
&\left|\Delta_k\Delta_m\Delta_n\frac{1}{\sqrt{N(k,m,n)}}\right|\\
<&\frac{(d_1|k|+c_1)(d_2|m|+c_2)(c_3|n|+c_3)}{(\sqrt{k^2+m^2+n^2})^7}<\frac{c}{(k^2+m^2+n^2)^2}
\end{aligned}\tag{108}
$$

当

$$
x^2+y^2+z^2<h,\xi^2+\eta^2+\zeta^2<h,k^2+m^2+n^2>c_4(h),
$$

$$
d_1=d_1(h),\cdots,c_3=c_3(h),c=c(h).
$$

这个估计是这样得出的: 我们连续运用微分学的中值定理三次, 并利用了算术平均值和几何平均值的不等式.

同时我们如果对 k, m, n 求和, 其中 $k^2+m^2+n^2>c_4(h)$ 使 $N(k,m,n)$ 对任意三个数 k,m,n 皆不为零, 我们可得出级数对 x,y,z,ξ,η,ζ 的一致收敛性.

当 $x^2+y^2+z^2<h, \xi^2+\eta^2+\zeta^2<h, k^2+m^2+n^2>c_4(h)$ 时, 同样的讨论保证了将和 (107) 逐项微分所得的各偏微商绝对收敛, 而且它们对 x,y,z,ξ,η,ζ 一致收敛.

现在可以看出 (107) 就是所要求的格林函数; 自然只在没有一个 $N(k,m,n)$ 等于零的时候 (106) 和 (107) 才有意义. 它满足 5.14.5 小节的条件 (1) 和 (3) 是无须证明的. 在证明它满足条件 (2) 时 (例如说在 $x=a/2$ 上), 我们利用表示式

$$\mathrm{K}=\frac{1}{4\pi}\sum_{k=\pm1,\pm3,\cdots}\Delta_k N''(k).$$

对 $x=a/2$, 有限和

$$\sum_{k=\pm1,\pm3,\cdots,\pm(l+1)}\Delta_k N''(k)$$

由于各项成对相消而为零; 因此我们有 $\mathrm{K}=0$. 同样可以看出条件 (2) 在平行六面体其他的面上也满足.

黎曼把和 (106) 表为某 Theta 乘积的积分. 黎曼的这种表示可以如下导出: 我们写出方程

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-st^2}dt=\frac{1}{\sqrt{s}}\quad(s>0),$$

而用式子 $N(k,m,n;x,y,z;\xi,\eta,\zeta)$ 代 s. 这就给出

$$\mathrm{K}=\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}}\sum_k\sum_m\sum_n\Delta_k\Delta_m\Delta_n\int_0^\infty e^{-Nt^2}dt.$$

假如我们可以更换求和及积分的次序, 就会发现

$$\mathrm{K}=\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\sum_k\sum_m\sum_n\Delta_k\Delta_m\Delta_n e^{-Nt^2}dt=\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}}\int_0^\infty f_1f_2f_3dt,\tag{109}$$

其中积分号下的三个因子为

$$f_1=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k e^{-t^2[ka+(-1)^k\xi-x]^2},$$

$$f_2=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m e^{-t^2[mb+(-1)^m\eta-y]^2},$$

$$f_3 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{-t^2[nc+(-1)^n\zeta - z]^2},$$

它们可以用 Theta 函数

$$\theta_{00}(z,\tau) = \theta_3(z,\tau) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\pi\nu^2\tau} e^{2i\pi\nu z}$$

表示出来.

我们要来证公式 (109); 主要的困难发生在 $t=0$ 时, 因为这三个级数在它的邻近不一致收敛. 首先我们来证明可以调换积分及对 k 求和的次序:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}}\int_0^\infty f_1 f_2 f_3 dt = \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k \int_0^\infty f_2 f_3 e^{-t^2[ka+(-1)^k\xi - x]^2} dt. \tag{110}$$

首先很容易验证可更换求和与由 1 到 ∞ 积分的次序. 事实上, 对和 f_1 的余项在 $t>1, p>P(\xi,x)>2$ 时我们有估计

$$\left|\sum_{|k|>p}(-1)^k e^{-t^2[ka+(-1)^k\xi-x]^2}\right| < e^{-a^2t^2/4}\sum_{|k|>p} e^{-a^2t^2k^2/2}$$
$$< \frac{2e^{-a^2t^2/4}}{a^2}\sum_{|k|>p}\frac{1}{k^2} < \frac{2}{a^2}e^{-a^2t^2/4}\frac{1}{p-1} < \frac{4}{pa^2}e^{-a^2t^2/4};$$

因此当 p 增大时, 由 1 到 ∞ 的积分收敛于零. 另一方面, f_2 和 f_3 显然在区间 1 到 ∞ 上一致有界.

根据一条熟知的定理, 要证实可以更换求和及由 0 到 1 积分的次序, 只须证明被积函数的部分和有界. 现在 f_1 可拆成的两个和 $\sum_{k=0}^{\infty}$ 及 $\sum_{k=1}^{\infty}$ 中, 每一个都是交错级数, 而且在某个 k 后的各项单调下降; k 只依赖于 ξ 和 x, 而不依赖于 t. 因此这两个级数的任一部分和, 无论 $t>0$ 为何, 其值皆在确定的上下界之间. 可是相应的事实对 f_2 和 f_3 的部分和也成立, 这就说明 f_2 和 f_3 本身也对 $t>0$ 一致有界. 因此我们可以应用上面提到的定理来证明方程 (110). 完全类似的考虑也能证明在 (109) 右端的各项中对 m 及 n 求和与积分的次序可以更换. 这就完成了方程 (109) 的证明.

现在我们要来用函数 θ_{00} 表示 K. 我们有

$$\begin{aligned} f_1 =& e^{-t^2(x-\xi)^2}\theta_{00}\left(-\frac{2at^2i(x-\xi)}{\pi}, \frac{4a^2t^2i}{\pi}\right) \\ &- e^{-t^2(x+\xi)^2}\theta_{00}\left(-\frac{2at^2i(x+\xi)}{\pi}, \frac{4a^2t^2i}{\pi}\right), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_2 =& e^{-t^2(y-\eta)^2}\theta_{00}\left(-\frac{2bt^2i(y-\eta)}{\pi}, \frac{4b^2t^2i}{\pi}\right) \\
&- e^{-t^2(y+\eta)^2}\theta_{00}\left(-\frac{2bt^2i(y+\eta)}{\pi}, \frac{4b^2t^2i}{\pi}\right), \\
f_3 =& e^{-t^2(z-\zeta)^2}\theta_{00}\left(-\frac{2ct^2i(z-\zeta)}{\pi}, \frac{4c^2t^2i}{\pi}\right) \\
&- e^{-t^2(z+\zeta)^2}\theta_{00}\left(-\frac{2ct^2i(z+\zeta)}{\pi}, \frac{4c^2t^2i}{\pi}\right).
\end{aligned}
$$

我们对每一项来用 Theta 函数的变换公式

$$
\theta_{00}(z,\tau) = e^{-\pi i z^2/\tau}\frac{1}{\sqrt{-i\tau}}\theta_{00}\left(\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right)
$$

并取根的主值. 假如此外我们令

$$
q_x = e^{-\pi^2/4a^2t^2}, q_y = e^{-\pi^2/4b^2t^2}, q_z = e^{-\pi^2/4c^2t^2},
$$

我们有

$$
\begin{aligned}
f_1 &= \frac{\sqrt{\pi}}{2at}\left[\theta_{00}\left(-\frac{x-\xi}{2a}, \frac{\pi i}{4a^2t^2}\right) - \theta_{00}\left(-\frac{x+\xi}{2a}, \frac{\pi i}{4a^2t^2}\right)\right] \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2bt}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} q_x^{k^2} e^{-k(x-\xi)\pi i/a} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_x^{k^2} e^{-k(x+\xi)\pi i/a}\right] \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{at}\sum_{k=1}^{\infty} q_x^{k^2}\left(\cos\frac{k\pi(x-\xi)}{a} - \cos\frac{k\pi(x+\xi)}{a}\right) \\
&= \frac{2\sqrt{\pi}}{at}\sum_{k=1}^{\infty} q_x^{k^2}\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{k\pi\xi}{a}.
\end{aligned} \tag{111}
$$

对 f_2, f_3 可得类似的表示式, 这就导致下列 K 的表示式:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{K} =& \frac{4}{abc}\int_0^{\infty}\frac{1}{t^3}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{k\pi\xi}{a}\cdots \\
&\cdot\sin\frac{n\pi\zeta}{c}e^{-(\pi^2/4t^2)[(k^2/a^2)+(m^2/b^2)+(n^2/c^2)]}dt.
\end{aligned}
$$

在上式中引进 $1/t^2=\tau$ 为新积分变数, 我们得到

$$
\mathrm{K} = \frac{2}{abc}\int_0^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(\pi^2\tau/4)[(k^2/a^2)+(m^2/b^2)+(n^2/c^2)]}\cdot\sin\frac{k\pi x}{a}\cdots\sin\frac{k\pi\zeta}{c}d\tau.
$$

这个公式有效地代替了格林函数的本征函数展开式

$$
\mathrm{K}(x,y,z;\xi,\eta,\zeta) = \frac{8}{abc\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{k\pi\xi}{a}\cdots\sin\frac{n\pi\zeta}{c}}{\frac{k^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}},
$$

我们可以形式地更换积分与求和的次序而得到这个式子, 可是它的收敛性还没有被证明.

对 $\tau=1/t^2$, 我们由 (109) 式可得到 K 的一个简单的表示式

$$\mathrm{K}=\frac{1}{32abc}\int_0^\infty\left\{\left[\theta_{00}\left(-\frac{x-\xi}{2a},\frac{\pi i\tau}{4a^2}\right)-\theta_{00}\left(-\frac{x+\xi}{2a},\frac{\pi i\tau}{4a^2}\right)\right]\cdots\right.$$
$$\left.\cdot\left[\theta_{00}\left(-\frac{z-\zeta}{2c},\frac{\pi i\tau}{4c^2}\right)-\theta_{00}\left(-\frac{z+\zeta}{2c},\frac{\pi i\tau}{4c^2}\right)\right]\right\}d\tau.$$

5.15.6 矩形内 Δu 的格林函数

考虑一矩形 R, 其一顶点在原点, 其他顶点在 $(a,0),(0,b),(a,b)$. 令 (ξ,τ) 为源点, 并考虑一点 (x,y). 如果 $\mathrm{K}(x,y;\xi,\eta)$ 是相应于边界条件 $u=0$ 的格林函数, 则 K 作为 x,y 的函数在 R 内为方程 $\Delta u=0$ 的解, 它在边界上为零, 而且在点 (ξ,η) 的奇异性和 $-\log r/2\pi$ 一样, 其中 $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$. 与平行六面体的情形一样, 我们似乎有理由来造由矩形 R 引出的格子, 而把点 (ξ,η) 逐次对格子线作反射, 然后把这样所得到的每一个点想象为一强度为 1 的源或潭, 到底为点源或点潭要看该点系由 (ξ,η) 经过偶次或奇次对格子线的反射得出而定.

和前面一样, 我们可以求一无穷级的和来作出所得质量分布的势 X. 可是, 更方便的是利用函数论而引进以 X 为实部的相应解析函数 $\varphi(x+iy)=X+iY$. 于是函数

$$f(x+iy)=e^{-2\pi(X+iY)=e^{-2\pi\varphi(x+iy)}}$$

在 (ξ,η) 点及由反射所得各点必有一级零点或极点. 现在我们取格子中相邻的四个矩形为一组而把它作为一新格子的矩形. 于是在新格子的每一矩形中, $f(x+iy)$ 必有两个一级极点和两个一级零点, 它们对原点*而言对称, 而且依次以模 $(2a,2b)$ 全同于:

零点:　(ξ,η),　　$(-\xi,-\eta)$,

极点:　$(-\xi,\eta)$,　　$(\xi,-\eta)$.

这一类型的最简单函数为椭圆函数, 它们在以 $(a,b),(-a,b),(a,-b),(-a,-b)$ 为顶点的周期矩形内有上述零点和极点, 故可以用相应 σ 函数来表示:

$$f(z)=\frac{\sigma(z-\xi-i\eta)\sigma(z+\xi+i\eta)}{\sigma(z-\xi+i\eta)\sigma(z+\xi-i\eta)},$$

其中 1)

$$\sigma(z)=z\prod_\omega{}'\left[\left(1-\frac{z}{2\omega}\right)e^{(z/2\omega+z^2/8\omega^2)}\right],$$

---

* 事实上是 mod$(2a,2b)$ 后. —— 译者

1) $\prod'$ 表示省去相应于 $\omega=0$ 的因子而得的乘积.

$$\omega = ka + lbi \quad (k = 0, \pm 1, \cdots) \quad (l = 0, \pm 1, \cdots).$$

假如我们把这个表示式代入 $f(z)$ 的式子中去，并且逐项乘出，当 $\omega = 0$ 时令 $\exp\{\xi\eta i/\omega^2\} = 1$，我们有

$$f(z) = \prod_{\omega} \left[\frac{(z+\zeta-2\omega)(z-\zeta-2\omega)}{(z+\zeta-2\omega)(z-\zeta-2\omega)} e^{\xi\eta i/\omega^2} \right]$$

$$(\zeta = \xi + i\eta, \bar{\zeta} = \xi - i\eta; k = 0, \pm 1, \cdots, l = 0, \pm 1, \cdots).$$

在这里我们只要验证函数满足边界条件，也就是说，$f(z)$ 在 R 的边界上取绝对值 1. 对于 $z = x = \mathrm{Re}(z), \omega = 0$ 的因子显然取绝对值 1，而相应于其他 ω 的因子可以按 ω 的共轭复值成对组合而使得每对中一因子的分子为另一因子分母的复数共轭. 对于 $z = x + ib$，我们先对 l 然后对 k 作乘积. 我们可以在对 l 的乘积中省去因子 $\exp\{\xi\eta i/\omega^2\}$，因为和 $\Sigma 1/\omega^2$ 在 k 固定而加过 l 时绝对收敛而取实数值. 余下的项我们这样逐对组合，使得若一个因子相应于 $\omega = ka + lbi$，则第二个因子相应于 $\omega = ka - (l-1)bi$. 这样就可以立刻看出这一对的乘积取绝对值 1. 对 $z = iy$ 则我们先对 l 求乘积，然后把所有相应于 $\pm k(|k| > 0)$ 的这部分积成对组合起来. 我们仍旧可以省去指数因子，因为 $\Sigma 1/\omega^2$ 加过 l 时绝对收敛并取实数值. 我们把余下的各项这样逐对组合，使得一个因子相应于 $\omega = ka + lbi$，则另一个相应于 $\omega = -ka + lbi$. 于是每一个这样的乘积取绝对值 1. 最后，我们考虑 $z = a + iy$ 的情形，我们把相应于 $\omega = ka + lbi$ 和 $\omega = -(k-1)a + lbi$ 的因子组合起来，并对 l 求乘积即可. 这样，我们求出所要的格林函数的表示式为

$$\mathrm{K}(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \mathrm{Re} \left\{ \log \frac{\sigma(z-\zeta, \omega_1, \omega_2)\sigma(z+\zeta, \omega_1, \omega_2)}{\sigma(z-\bar{\zeta}, \omega_1, \omega_2)\sigma(z+\bar{\zeta}, \omega_1, \omega_2)} \right\}$$

$$(z = x + iy, \zeta = \xi + i\eta, \bar{\zeta} = \xi - i\eta, \omega_1 = a, \omega_2 = ib).$$

刚才所造的格林函数可以用本征函数 $(2/\sqrt{ab}) \sin(k\pi x/a) \sin(m\pi y/b)$ 展开为一收敛级数 [1]. 展开式为

$$\mathrm{K}(x, y; \xi, \eta) = \frac{4}{ab\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\frac{\pi}{a}x \sin m\frac{\pi}{b}y \sin k\frac{\pi}{a}\xi \sin m\frac{\pi}{b}\eta}{\frac{m^2}{b^2} + \frac{k^2}{a^2}}.$$

这是一个说明双线公式正确的例子，可是双线公式并没有一般地证明.

---

1) 并不绝对收敛，见 V. A. Il'in. On the Convergence of bilinear series of eigenfunctions, Uspehi Matem. Nauk (N. S.)5, No.4(38), 1950, 135-138.

5.15.7 圆形环的格林函数

考虑以原点为心的两个圆所界定的环形; 设二圆半径的乘积为 1(在这里须适当选择长度单位). 我们用 $q^{\frac{1}{2}}$ 来表示里圆的半径, $q^{-\frac{1}{2}}$ 来表示外圆的半径, 其中 $0 < q < 1$. 于是若设 c 为源点 (我们先设它是实的并正的), $z = x + iy$ 为所考虑的点, 又设二点皆在环 R 之内, 那么我们的问题就化为以下函数论的问题: 决定一解析函数 $f(z)$, 要它在 c 有一级极点, 在 R 的其他各处解析, 并在 R 的边界上取绝对值为 1. 这样, 我们所要求的格林函数可由 $f(z)$ 得出为

$$\mathrm{K}(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\{\log f(z)\}.$$

为了得出足够多函数论的性质, 以便我们能明晰地造出 $f(z)$, 我们试图来把 $f(z)$ 延拓到两个圆之外去. 为此, 我们对 R 内的每一个点 z 联系一个 k_1 内的点 z_1 而使有 $zz_1 = q$. 假如 z 移向 k_1 的边界, 则 z_1 也如此, 而事实上, z_1 显然趋近于其复共轭点. 现在, 由于假设的对称性, $f(z)$ 可以看作一实函数, 也就是在实点取实数值的函数, 更说得一般些是在复共轭点上取复共轭值的函数. 这就说明当 z 趋近于 k_1 圆周上的点 z_0 时 $f(z)f(q/z)$ 趋近于正实数值 $|f(z_0)|^2$. 另一方面, $f(z)$ 在 k_1 圆周上的模数为 1. 因此对 k_1 上的 z 而言我们有 $f(z)$ 满足的方程

$$f(z)f\left(\frac{q}{z}\right) = 1, \tag{112}$$

这个方程对所有的 z 恒成立. 同样, 对 k_2 的反射导致第二个函数方程

$$f(z)f\left(\frac{1}{qz}\right) = 1. \tag{113}$$

因为 c 是 $f(z)$ 的一级零点, 逐次应用这些关系可知 $f(z)$ 在

$$c, q^{\pm 2}c, q^{\pm 4}c, \cdots$$

有一级零点, 而在

$$q^{\pm 1}c^{-1}, q^{\pm 3}c^{-1}, q^{\pm 5}c^{-1}, \cdots$$

有一级极点; 因此在零点和极点的问题上 $f(z)$ 和函数

$$F(z) = \left(1 - \frac{z}{c}\right)\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - q^{2\nu}\frac{z}{c}\right)\left(1 - q^{2\nu}\frac{c}{z}\right)}{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1 - q^{2\nu-1}cz)\left(1 - q^{2\nu-1}\frac{1}{cz}\right)}$$

一致. 可是对 $F(z)$ 这个函数我们有 (112) 和 (113) 形的函数方程如下:

$$F(z)F\left(\frac{q}{z}\right) = 1, \quad F(z)F\left(\frac{1}{qz}\right) = \frac{1}{qc^2},$$

这很容易由简单的计算验证. 因此我们可以这样来定出常数 a 和 b 而使 $az^bF(z)$ 满足函数方程 (112), (113) 且在 k_1, k_2 上的模数为 1, 这是因为 a, b 将是实常数. 我们得出的值为

$$a = \pm\sqrt{c}q^{\frac{1}{4}}, \quad b = -\frac{1}{2} - \frac{\log c}{\log q}.$$

取 a 前的负号, 我们得到

$$f(z) = q^{\frac{1}{4}} z^{-\log c/\log q} \left(\sqrt{\frac{z}{c}} - \sqrt{\frac{c}{z}}\right) \frac{\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - q^{2\nu}\frac{z}{c}\right)\left(1 - q^{2\nu}\frac{c}{z}\right)}{\prod_{\nu=1}^{\infty}(1 - q^{2\nu-1}cz)\left(1 - q^{2\nu-1}\frac{1}{cz}\right)}.$$

这个式子可以用 Theta 函数

$$\theta_1(z) = -iCq^{\frac{1}{4}}(e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}) \prod_{\nu=1}^{\infty}(1 - q^{2\nu}e^{2i\pi z})(1 - q^{2\nu}e^{-2i\pi z}),$$

$$\theta_0(z) = C\prod_{\nu=1}^{\infty}(1 - q^{2\nu-1}e^{2i\pi z})(1 - q^{2\nu-1}\bar{e}^{2i\pi z})$$

写出, 其中

$$C = \prod_{\nu=1}^{\infty}(1 - q^{2\nu}).$$

假如我们令 $z = e^{2i\pi v}, c = e^{2i\pi\alpha}$, 我们有

$$f(z) = iz^{-2i\pi\alpha/\log q}\frac{\theta_1(v - \alpha)}{\theta_0(v + \alpha)},$$

对 R 内的复 c 值而言 $\log f(z)$ 的实部也自然在 k_1, k_2 上为零, 我们的问题因此解决.

5.16 补充材料

5.16.1 弦振动的例子

(a) *拉起的弦*. 在拉起的弦的情形, 我们把问题的解表为一些正余弦振动的叠加. 令时间 $t = 0$ 时弦上的点 $x = b$ 在横向被拉到离 x 轴为 h 的位置, 则弦的形状为由 $x = 0$ 到 $x = b$ 及 $x = b$ 到 $x = \pi$ 的两直线段. 设初速为零. 则横向位移 $u(x, t)$ 具有展开式

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin nx \cos nt,$$

其中

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u(x,0)\sin nx dx \\
&= \frac{2h}{\pi}\left(\int_0^b \frac{x}{b}\sin nx dx + \int_b^\pi \frac{\pi - x}{\pi - b}\sin nx dx\right) \\
&= \frac{2h}{n^2 b(\pi - b)}\sin nb.
\end{aligned}
$$

因此我们有

$$
u(x,t) = \frac{2h}{b(\pi - b)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nb \sin nx}{n^2}\cos nt.
$$

(b) **冲击扰动**. 按类似的方法, 我们可以处理弦受冲击力而振动的情形: 弦原在静止位置, 在点 $x = b$ 的邻近给了它一个冲力. 我们有

$$
u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \sin nt,
$$

而

$$
nb_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u_t(x,0)\sin nx dx.
$$

现在我们必须取一极限过程, 把冲力所作用的区间缩小, 可是同时要求积分 $\int_0^\pi u_t(x,0)dx = U$ 成立. 取了极限我们有

$$
b_n = 2U\frac{\sin nb}{\pi n},
$$

$$
u(x,t) = 2U\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx \sin nb}{\pi n}\sin nt.
$$

(c) **受迫振动**. 受迫振动微分方程

$$
u_{tt} - u_{xx} = f(x)\cos nt
$$

的通解在外力为周期性时, 具有形式

$$
\begin{aligned}
u = &-\frac{2}{\pi}\cos nt\sum_{\nu=1}^{\infty}\sin \nu x\frac{\int_0^\pi f(x)\sin \nu x dx}{n^2 - \nu^2} \\
&+ \sum_{\nu=1}^{\infty}\sin \nu x(a_\nu \sin \nu t + b_\nu \cos \nu t).
\end{aligned}
$$

假如我们令

$$
\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin \nu x dx = c_\nu,
$$

PDG

在初条件 $u(x,0)=u_t(x,0)=0$ 之下, 我们得到相应积分的展开式

$$u(x,t)=-\sum_{\nu=1}^{\infty}\sin\nu x\frac{c_\nu}{n^2-\nu^2}(\cos nt-\cos\nu t).$$

在这式子中当 n 趋近于数值 ν 时, 一般起决定性作用的项是

$$\frac{-c_\nu}{n^2-\nu^2}\sin\nu x(\cos nt-\cos\nu t).$$

如果把这一项写成

$$\frac{2c_\nu}{n^2-\nu^2}\sin\nu x\sin\frac{n+\nu}{2}t\sin\frac{n-\nu}{2}t,$$

我们就最能够看出它的变动情况; 我们可以想象这个式子是表示一个具有变动振幅 $\sin[(n-\nu)t/2]$ 的振动 $\sin[(n+\nu)t/2]$. 振动的振幅强弱交变; 这就引起了"拍"的现象. 在 $n\to\nu$ 的极限情形, 上面所讨论的项具有形式

$$\frac{c_\nu}{\nu}\sin\nu x\sin\nu t\cdot\frac{t}{2},$$

因此振幅随时间无限增大.

5.16.2 自由悬挂的绳的振动、贝塞尔函数

设有一均匀绳, 长度和重量各为 1, 沿 x 轴悬起, 令重力的方向为 x 轴的反方向. 我们假定绳挂在 $x=1$ 这点上, 因此其自由端点在 $x=0$. 假如 u 为在垂直于 x 轴方向的位移, 则 u 满足微分方程 1):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

我们如果假定

$$u=q(t)\varphi(x),$$

即得出变数分离后的式子为

$$\frac{\ddot{q}}{q}=-\lambda=\frac{(x\varphi')'}{\varphi},$$

附加条件为: $\varphi(1)=0,|\varphi(0)|<\infty$.

由此可得

$$\varphi(x)=cJ_0(2\sqrt{\lambda x}),$$

其中 $J_0(x)$ 为零级贝塞尔函数, 而条件 $J_0(2\nu)=0$ 定出一串本征频率 $\nu=\sqrt{\lambda}$.

1) 见 Kneser. Integralgleichungen: 39-43.

PDG

5.16.3 振动方程明显解的例子、椭圆柱函数

(a) *扇形*. 对一段扇形 $0\leqslant r\leqslant 1, 0\leqslant\theta\leqslant\alpha$ 而言, 振动方程 $\Delta u+\lambda u=0$ 用极坐标表出后仍能用分离变数解. 我们可令 $u=f(r)g(\theta)$. 像在 5.9 节中一样, 我们取 $u=0$ 为边界条件而求得一组本征函数

$$u_n=\sin\frac{n\pi\theta}{\alpha}J_{n\pi/\alpha}(\sqrt{\lambda_{n,m}}r),$$

其中 $J_{n\pi/\alpha}$ 表示指标为 $n\pi/\alpha$ 的贝塞尔函数 (见第 7 章), 本征值 $\lambda_{n,m}$ 决定于超越方程 $J_{n\pi/\alpha}(\sqrt{\lambda_{n,m}})=0$.

(b) *椭圆*. 引进椭圆坐标, 我们可求得对椭圆的本征值问题的解 (见第 4 章 4.8.3 小节). 我们有

$$\Delta T+\lambda T=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{\partial^2T}{\partial t_1^2}-\frac{\partial^2T}{\partial t_2^2}\right)+\lambda T=0,$$

作假定 $T=U(t_1)V(t_2)$ 可导致方程

$$\frac{U''}{U}-\frac{V''}{V}=-\lambda(\lambda_1-\lambda_2),$$

要这个方程得以满足, 必须而且只须 U 和 V 为微分方程

$$U''=-(\lambda\lambda_1+\mu)U, V''=-(\lambda\lambda_2+\mu)V$$

的解, 或者为方程

$$\frac{d^2U}{d\lambda_1^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1-e_1}+\frac{1}{\lambda_1-e_2}\right)\frac{dU}{d\lambda_1}=\frac{-\lambda\lambda_1+\mu}{(\lambda_1-e_1)(\lambda_1-e_2)}U$$

以及一相应 V 的方程的解.

假如我们令

$$\frac{2\lambda_1-e_1-e_2}{e_1-e_2}=\cos\mathrm{h}u,$$

$$\frac{2\lambda_2-e_1-e_2}{e_1-e_2}=\cos v,$$

则 u 和 v 为实数. 我们就得到方程

$$\frac{d^2U}{du^2}=-(\lambda'\cos\mathrm{h}u+\mu')U,$$

$$\frac{d^2V}{dv^2}=(\lambda'\cos v+\mu')V,$$

其中 λ' 和 μ' 为常数. 这两个微分方程可用代换 $u=iv$ 将一个化为另一个, 它们的解叫做**椭圆柱函数**[1].

1) 参看 Whittaker and Watson. A Course of Mordern Analysis: 404-428.

(c) 共焦四边形或六面体. 直到现在, 我们都是对某些区域分离变数而解出振动或位势方程的; 这些区域或者是一组共焦曲线或由面所围成的四边形或六面体的特殊情形, 或者是它们的极限情形 (见 5.9.3 小节).

5.16.4 含有参数的边界条件 [1)]

我们来简短地叙述一下如何可以把一些在边界条件内含有参数的边值问题化为积分方程. 例如, 考虑微分方程 $\Delta u = 0$, 边界条件给在平面上有限单连通区 G 的正规边界曲线 Γ 上, 它是

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u + h(s) = 0,$$

其中 n 表示外向法线, λ 为参数, $h(s)$ 为 Γ 上弧长 s 的函数. 利用在边界上法向微商为零时区域 G 的格林函数 $\mathrm{K}(x, y, z, \xi, \eta)$, 我们得到格林公式:

$$u(\xi, \eta) = \int_\Gamma [\lambda u(x, y) + h(s)]\mathrm{K}(x, y; \xi, \eta) ds,$$

其中点 (x, y) 跑过曲线 Γ. 假如我们用 Γ 的参数表示式, $\mathrm{K}(x, y; \xi, \eta)$ 的值给出两个变数 s, σ 的一对称函数 $K(s, \sigma)$:

$$K(s, \sigma) = \mathrm{K}(a(s), b(s); s(\sigma), b(\sigma)).$$

此外假如我们令

$$u(a(s), b(s)) = \varphi(s),$$
$$\int_\Gamma K(s, \sigma) h(s) ds = f(\sigma),$$

则以上 u 的关系成为

$$f(\sigma) = \varphi(\sigma) - \lambda \int_\Gamma K(s, \sigma) \varphi(s) ds.$$

我们只须解第一边值问题就可以由 $\varphi(s)$ 定理 u; 因此, 我们只要来研究上面的积分方程, 它的核在奇点 $\sigma = s$ 为对数级无穷. 积分方程的一般理论可以立刻用于这个核.

对一般的椭圆型自伴二级微分方程说来, 类似于上的讨论成立.

5.16.5 微分方程组的格林张量

使我们引进格林函数的想法可加以推广而用于包含微分方程组的问题, 例如, 用于如何由方程 $L[\boldsymbol{u}] = -\boldsymbol{f}$ 决定出矢量 $\boldsymbol{u} : (u_1, u_2, u_3)$ 的问题, 这里的 $\boldsymbol{f}$ 是一给

1) 参看 Hilbert Integralgleichungen. 77-81.

定的矢量. 微分方程 $L[\boldsymbol{u}]=-\boldsymbol{f}$ 在给定齐次边界条件下 (例如 $\boldsymbol{u}=0$) 的格林张量 $\mathfrak{D}$ 是指一个矩阵

$$\mathfrak{D}(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)=\begin{pmatrix} \mathrm{K}_{11} & \mathrm{K}_{12} & \mathrm{K}_{13} \\ \mathrm{K}_{21} & \mathrm{K}_{22} & \mathrm{K}_{23} \\ \mathrm{K}_{31} & \mathrm{K}_{32} & \mathrm{K}_{33} \end{pmatrix},$$

它具有以下性质: 微分方程 $L[\boldsymbol{u}]=-\boldsymbol{f}$ 和边界条件合在一起相当于公式

$$\boldsymbol{u}(x,y,z)=\iiint \mathfrak{D}(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)\boldsymbol{f}(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta.$$

这里 $\mathfrak{D}\boldsymbol{f}$ 表示将矩阵 $\mathfrak{D}$ 和矢量 $\boldsymbol{f}$ 作矩阵乘法所得出的矢量, 也就是一矢量, 其分量为

$$\mathrm{K}_{11}f_1+\mathrm{K}_{12}f_2+\mathrm{K}_{13}f_3, \mathrm{K}_{21}f_1+\mathrm{K}_{22}f_2+\mathrm{K}_{33}f_3, \mathrm{K}_{31}f_1+\mathrm{K}_{32}f_2+\mathrm{K}_{33}f_3.$$

格林张量的每一行都表示一个矢量 $\boldsymbol{k}_i$, 除了源点 $x=\xi,y=\eta,z=\zeta$ 外这个矢量及其微商皆连续, 并满足微分方程 $L[\boldsymbol{k}_i]=0$ 及边界条件. 要看出这张量在源点的奇异性可以把它解释为一在源点 $x=\xi,y=\eta,z=\zeta$ 作用的点力的影响函数 (例如在一个方程的情形). 当微分方式 $L[\boldsymbol{u}]$ 为自伴时 (我们假定如此), 也就是说它是由矢量 $\boldsymbol{u}$ 及其一阶微商的一个二次微方式作变分得出, 则格林张量满足对称关系

$$\mathrm{K}_{ii}(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)=\mathrm{K}_{ii}(\xi,\eta,\zeta;x,y,z),$$
$$\mathrm{K}_{ik}(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)=\mathrm{K}_{ki}(\xi,\eta,\zeta;x,y,z).$$

微分方程 $L[\boldsymbol{u}]+\lambda\boldsymbol{u}=0$ 的本征值问题可以利用格林张量来解, 作法和通常的情形完全一样 [1].

5.16.6 方程 $\Delta u+\lambda u=0$ 解的解析延拓

设方程 $\Delta u+\lambda u=0$ 的一个解给定在闭区域 G 内, G 以线段 l 为共部分边界. 设这个解及其直到二阶的微商皆连续, 并设函数 u 或法向微商 $\partial u/\partial n$ 在 l 上为零. 我们可以将 G 对 l 反射得一新区域 G', 而将函数 u 按以下方式延拓到 G' 内去: 如果 g' 是在 G 的反射下点 g 的像点, 当在 l 上 $u=0$ 时, 令 $\bar{u}(g')=-u(g)$, 而当在 l 上 $\partial u/\partial n=0$ 时, 令 $\bar{u}(g')=u(g)$. 这些 $\bar{u}$ 乃是 u 的扩张, 它是 $\Delta u+\lambda u=0$ 在合成区域 $G+G'$ 内的连续解, 并有直到二阶的连续微商 [2]. 对板的方程 $\Delta\Delta u-\lambda u=0$ 可叙述类似的定理. 定理的假定还可以再减弱, 就像在函数论的反射定理中那样; 这将在以后指出.

---

1) 参看 Hilbert. Integralgleichungen. 206-212.

2) 见 R. Courant. Beweis des Satzes etc.. Math. Zeitschrift., Vol.1, 1918, 321-328.

5.16.7 关于 $\Delta u+\lambda u=0$ 解的节线的定理

假如由线 $u=0$ 的若干分支在 x,y 平面上 u 的正规区域内相交[1)]，则在交点相汇的节线集合形成一组等角射线. 读者可将函数 u 在所讨论的点的近旁展为幂级数而证明这定理.

5.16.8 无穷重数的本征值的例

对一任意平面区域, 例如圆域, 例如来考虑 $\Delta\Delta u-\lambda u=0$ 的本征值问题, 边界条件为 $\Delta u=0, (\partial/\partial n)\Delta u=0$. 对这问题我们很容易得到无穷多个本征值 λ_h 和本征函数 u_h—— 注意凡 Δu_h 不恒等于零时, $\Delta u_h=v_h$ 必为夹住边的板的本征函数. 因此, 我们得到的本征值和夹住边的板的本征值相重; 所以零现在也是无穷重的本征值. 事实上, 当 $\lambda=0$ 时, 无穷多个线性独立的势函数中的任一个 (它在 G 中正规) 皆在所给边界条件下满足方程 $\Delta\Delta u+\lambda u=0$.

5.16.9 展开定理的有效范围

在叙述按微分方程

$$L[u]+\lambda\rho u=0$$

的本征函数将一函数展开的定理时, 我们总假定 $\rho>0$. 这个假定是重要的, 这可以由下面的例子看出: 在方程 $y''+\lambda\rho y$ 中若令 ρ 在基本区域的任一子区域内等于零, 则每一本征函数在这区域内一定是线性的; 因此展开定理不能对“任意函数”成立.

参考文献

Bôcher, M.: Über die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie. B. G. Teubner, Leipzig, 1894.

——, Lecons sur les méthodes de Sturm dans la théorie des équations différentielles linéaires et leurs développements modernes. Gauthier-Villars, Paris, 1917.

Courant, R.: Zur Theorie der kleinen Schwingungen. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., Vol. 2, 1922, pp. 278-285.

Frank, Ph., and v. Mises, R.: Die partiellen Differential-und Integralgleichungen der *Mechanik und Physik*. F. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1925, 1927.

Hilbert, D.: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. B. G. Teubner, Leipzig and Berlin, 1912 (Cited as “Integralgleichungen.”).

Hort, W.: Technische Schwingungslehre. 2nd ed., J. Springer, Berlin, 1922.

Kneser, A.: Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik. 2nd ed., F. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1922 (Cited ass “Integralgleichungen.”).

1) 不难看出每一具有连续微商的连续解 u 是 x,y 的正规解析函数 (见第II卷).

Pockels, F.: Über, die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ und deren Auftreten in der mathematischen Physik. B. G. Teubner, Leipzig, 1891.

Rayleigh, J. W. S.: The Theory of Sound. 2 vols., 2nd ed., Macmillan and Co., London, 1894, 1896.

Riemann, B., and Hattendorf, K.: Schwere, Elektrizität und Magnetismus. C. Rüm pler, Hannover, 1880.

Weber, H.: Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. 2 vols., 4th ed., F. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1900, 1901; 5th ed., 1910, 1912.

Whittaker, E. T., and Watson, G. N.: A Course of Modern Analysis. 4th ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1927.



第 6 章　变分法在本征值问题上的应用

在前一章中我们看到, 微分方程的本征值问题和二次型的本征值问题之间有着密切的联系. 事实上, 这些本征值问题相当于一无穷多个变数的二次型的主轴变换问题.

例如, 我们若把一维连续系统的势能和动能表为

$$U=\frac{1}{2}\int_0^\pi p\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \text{ 及 } T=\frac{1}{2}\int_0^\pi p\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx,$$

我们只须写 $u=\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(t)\sin \nu x$ 并将 p 和 ρ 展为傅里叶级数, 这样我们就可以把 U 和 T 的两个式子看作无穷多个变数 (坐标)f_ν 或 $\dot{f}_\nu$ 的二次型. 假如我们可以定出一正交变换

$$f_\nu=\sum_{\mu=1}^{\infty} t_{\nu\mu} q_\mu,\ \dot{f}_\nu=\sum_{\mu=1}^{\infty} t_{\nu\mu}\dot{q}_\mu \quad (\nu=1,2,\cdots),$$

它把上述 $f_\nu, \dot{f}_\nu$ 变为新变数 q_ν 和 $\dot{q}_\nu$, 而使 U 和 T 的形式变为

$$U=\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu q_\nu^2,\ T=\sum_{\nu=1}^{\infty}\dot{q}_\nu^2,$$

则 λ_ν 这些数就是我们的振动问题的本征值. 因为有限二次型的本征值可以用简单的极值性质来确定, 我们似乎很有理由在二次泛函的情形也来考虑类似的确定方法. 不过我们现在不把这些二次泛函作为有限多个变数的二次型的极限来处理, 我们将不牵涉这种极限过程直接来叙述上述极值性质, 并加以应用.

6.1　本征值的极值性质

6.1.1　经典的极值性质

试考虑自伴二阶偏微分方程

$$L[u]+\lambda\rho u=(pu_x)_x+(pu_y)_y-qu+\lambda\rho u=0 \quad (p>0,\rho>0) \tag{1}$$

的本征值问题; 其中 x 和 y 为基本区域 G 内的自变量, G 的边界 Γ 为一条或数条连续曲线, 它们具有分段连续的切线. 设边界条件为 $u=0$, 或一般说来为

PDG

$\partial u/\partial n+\sigma u=0$, 其中 σ 表示边界 Γ 上的分段连续函数, 而 $\partial/\partial n$ 表示外法向微商[1], 变分本征值问题中的典型二次泛函式为

$$\mathfrak{D}[\varphi]=D[\varphi]+\int_\Gamma p\sigma\varphi^2 ds \tag{2}$$

其中

$$D[\varphi]=\iint_G p(\varphi_x^2+\varphi_y^2)dxdy+\iint_G q\varphi^2 dxdy,$$

以及

$$H[\varphi]=\iint_G \rho\varphi^2 dxdy; \tag{3}$$

相应的极 (变线) 型为

$$\mathfrak{D}[\varphi,\psi]=D[\varphi,\psi]+\int_\Gamma p\sigma\varphi\psi ds,$$

$$D[\varphi,\psi]=\iint_G p(\varphi_x\psi_x+\varphi_y\psi_y)dxdy+\iint_G q\varphi\psi dxdy,$$

$$H[\varphi,\psi]=\iint_G \rho\varphi\psi dxdy.$$

它们满足关系:

$$\mathfrak{D}[\varphi+\psi]=\mathfrak{D}[\varphi]+2\mathfrak{D}[\varphi,\psi]+\mathfrak{D}[\psi],$$

$$H[\varphi+\psi]=H(\varphi)+2H[\varphi,\psi]+H[\psi].$$

我们要求变量函数 φ 在 $G+\Gamma$ 内连续, 在 G 内具有分段连续的一阶微商.

我们说 ψ 在 G 内分段连续是指: 我们可以用具有分段连续切线的弧把 G 分为有限多个区域 $G_1,G_2,\cdots,G_m$, 而使在 G 的每一个不包含这些弧线的闭子区域内 ψ 皆连续.

假如所加的边界条件是 $u=0$, 则我们假定变量函数在闭区域 $G+\Gamma$ 内连续而在 Γ 上为零.

我们可从下面的极小性质求出微分方程 (1) 的本征值 λ_ν 及联属的本征函数 u_ν: 在条件 $H[\varphi]=1$ 之下, 使式子 $\mathfrak{D}[\varphi]$ 为极小的可取函数是微分方程 (1) 满足[2]自然边界条件 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}+\sigma\varphi=0$ 的本征函数 u_1; $\mathfrak{D}$ 的极小值为相应本征值. 假如除条件

$$H[\varphi]=1 \tag{3a}$$

---

1) 需要说明的是这边条件一般必须按 "弱意义" 给以解释; 也就是说, 事实上我们并不要求函数在 Γ 上处处取边值, 这一细数的事实将在第 II 卷第 7 章中联同存在定理加以充分的讨论. 在这里, 我们假定解存在, 我们可以不细问 u 在边界上的行为.

2) 见脚注 1).

之外还加上正交条件

$$H[\varphi, u_1] = 0,$$

则所得的解 u_2 仍旧是 (1) 满足同样边界条件的本征函数, 极小值 $\mathfrak{D}[u_2] = \lambda_2$ 则为联属于 u_2 的本征值. 逐次的极小问题, 即在条件 $H[\varphi] = 1$ 及附加条件

$$H[\varphi, u_i] = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, \nu - 1)$$

下求 $\mathfrak{D}[\psi] =$ 极小的问题, 定出了在边界条件 $\partial\varphi/\partial n + \sigma\varphi = 0$ 下方程 (1) 的各个本征函数 u_ν, 联属本征值 λ_ν 则等于 $\mathfrak{D}[u_\nu]$ 的极小值.

我们可以求商式 $\mathfrak{D}[\varphi]/H[\varphi]$ 的极小而省去规一条件 $H[\varphi] = 1$; 这样所得的解可以差一个任意的比例因子.

假如边界条件是 $u = 0$, 则同样的变分问题可定出本征值及本征函数; 不过须对可取函数加边界条件 $\varphi = 0$, 于是 $\mathfrak{D}[\varphi]$ 中的边界项 $\int_\Gamma p\sigma\varphi^2 ds$ 自行消失.

在第 II 卷中, 我们将证明上述极小问题的确有具有二阶连续可微的解, 证明将联系到变分的直接方法. 目前我们假定上述类型的极小问题有解, 以此作为出发点.

我们要证明 (a) 变分问题的解就是微分方程问题的本征函数, (b) 这些解给出了所有的本征函数. 第二个论断将在 6.3 节中证明: 我们将证明由变分问题所得的函数组 $u_1, u_2, \cdots$ 是完备的. 论断 (a) 可以用第 4 章 4.7 节的一般乘子法则导出, 可是我们现在来给一个直接的证明.

我们从第一个变分问题出发, 假定它的解 u_1 满足条件 $H[u_1] = 1$. 设 ζ 为和 φ 满足同样条件的任一函数, 又设 ε 为任意常数, 则对每一 ε 的值及 $u = u_1, \lambda = \lambda_1$, 我们有

$$\mathfrak{D}[u + \varepsilon\zeta] \geqslant \lambda H[u + \varepsilon\zeta]$$

或者

$$2\varepsilon\left\{\mathfrak{D}[u, \zeta] - \lambda H[u, \zeta] + \frac{\varepsilon}{2}(\mathfrak{D}[\zeta] - \lambda H[\zeta])\right\} \geqslant 0;$$

上面的两种说法是等价的, 因为我们有 $\mathfrak{D}[u] = \lambda H[u]$. 第二个不等式若对 ε 的任意值成立, 则必有

$$\mathfrak{D}[u, \zeta] - \lambda H[u, \zeta] = 0, \tag{4}$$

也就是式子 $\mathfrak{D} - \lambda H$ 的一级变分必为零.

现在我们按格林公式

$$\mathfrak{D}[u, \zeta] = -\iint_G \zeta L[u] dx dy + \int_\Gamma p_\sigma \xi u ds + \int_\Gamma p\zeta \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

变换式子 $\mathfrak{D}[u, \zeta]$ (见第 5 章 5.1 节); 因为函数 ζ 是任意的, 我们立刻得到 $u = u_1$ 和 $\lambda = \lambda_1$ 所满足的方程 (1). 现在我们来考虑在附加条件 $H[\varphi, u_1] = 0$ 之下的第二个极小问题. 对 $u = u_2, \lambda = \lambda_2$ 我们首先只是在 ζ 满足关系式

$$H[\zeta, u_1] = 0 \tag{5}$$

的假定下得到方程 (4). 现在设 η 为任一具有分段连续二阶微商的函数, 我们总可以定出一个数 t 使得函数 $\zeta = \eta + tu_1$ 满足条件 (5)—— 可令 $t = -H[u_1, \eta]$. 此外, 注意我们特别地可将函数 $\zeta = u_2$ 代入方程 (4), 令 $u = u_1, \lambda = \lambda_1$; 因为 u_2 满足附加条件

$$H[u_2, u_1] = 0, \tag{6}$$

我们立刻得到

$$\mathfrak{D}[u_2, u_1] = 0. \tag{7}$$

因此假如我们将函数 $\zeta = \eta + tu_1$ 代入方程 (4), 令 $u = u_2, \lambda = \lambda_2$, 我们得到

$$\mathfrak{D}[u, \eta] - \lambda H[u, \eta] + t(\mathfrak{D}[u, u_1] - \lambda H[u, u_1]) = 0,$$

或者考虑到方程 (6) 和 (7) 的成立, 则有

$$\mathfrak{D}[u, \eta] - \lambda H[u, \eta] = 0. \tag{4a}$$

换句话说, 方程 (4) 对任意的函数 η 成立, 也就是我们可以取消附加条件 (5) 对 ζ 的限制. 像上面一样, 由此直接可知, 当 $u = u_2, \lambda = \lambda_2$ 时方程 (1) 成立. 按照这个方法做下去, 我们可以得出的结论是本征值方程 (4a) 对变分问题的解 u_i 及极小值 λ_i 一般而言皆成立. 变分问题按 (3a) 规一化了的解答满足关系

$$\begin{aligned} &\mathfrak{D}[u_i] = \lambda_i,\ \mathfrak{D}[u_i, u_k] = 0, \\ &H[u_i] = 1,\ H[u_i, u_k] = 0. \end{aligned} \qquad (i \neq k). \tag{8}$$

这样所得到的本征值满足不等式

$$\lambda_{\nu-1} \leqslant \lambda_\nu,$$

这是因为在确定 λ_ν 的问题中, 可取函数 φ 的集合是确定 $\lambda_{\nu-1}$ 的问题中相应可取函数集的子集合, 因此极小值 λ_ν 不可能小于前一个极小值 $\lambda_{\nu-1}$.

我们的变分问题给出了微分方程本征值问题的一串本征值和本征函数. 反过来, 我们将在 6.3.1 小节中证明, 联属于微分方程的全部本征值和本征函数可作为变分问题的解而得出.

6.1.2 推广 [1)]

无须指出的是在前一章中所考虑的其他本征值问题也可以从变分法的观点加以处理. 对单重或多重积分, 二阶或高阶微分方程, 这同样都是对的. 例如, 施图姆–刘维尔微分方程

$$(pu')' - qu + \lambda\rho u = 0$$

1) 见 Courant. Über die Anwendung der Variationsrechnung ···

当边界条件为 $u'(0)-h_1u(0)=u'(\pi)+h_2u(\pi)=0$ 时的本征值问题相应于无边界条件的变分问题

$$\mathfrak{D}[\varphi]=\int_0^\pi(p\varphi'^2+q\varphi^2)dx+h_1p(0)\varphi(0)^2+h_2p(\pi)\varphi(\pi)^2=\min..$$

假如我们考虑边界条件 $u(0)=u(\pi)=0$ 为 h_1,h_2 趋于无穷的极限情形, 则所有前面列出的齐次边界条件可由适当选择 h_1 和 h_2 而得出.

即使在端点为奇点的施图姆–刘维尔问题中, 本征值和本征函数也可以由变分问题定出. 我们只对勒让德多项式和贝塞尔函数来表述这问题. 考虑

$$\mathfrak{D}[\varphi]=\int_{-1}^{+1}(1-x^2)\varphi'^2dx,\ H[\varphi]=\int_{-1}^{+1}\varphi^2dx \tag{9}$$

的自由问题, 我们可得勒让德多项式, 在此两端皆为奇点. 零阶贝塞尔函数 $J_0\left(x\sqrt{\lambda}\right)$ 可由问题

$$\mathfrak{D}[\varphi]=\int_0^1x\varphi'^2dx,\ H=\int_0^1x\varphi^2dx$$

得出, 在 $x=0$ 无边界条件, m 级 $(m\geqslant 1)$ 贝塞尔函数则可由问题

$$\mathfrak{D}[\varphi]=\int_0^1\left(x\varphi'^2+\frac{m^2}{x^2}\varphi^2\right)dx,\ H[\varphi]=\int_0^1x\varphi^2dx$$

得出, 边界条件为 $\varphi(0)=0$; 在正则端点 $x=1$ 所加的边界条件 $\varphi(1)=0$ 对应于一边界固定的膜.

对多维高级的自伴微分方程可得类似的结果, 例如对板振动的方程

$$\Delta\Delta u-\lambda u=0 \tag{10}$$

就是如此. 在处理夹住边缘的板的问题时 (见第 4 章 4.10 节), 我们令

$$\mathfrak{D}[\varphi]=D[\varphi]=\iint_G(\Delta\varphi)^2dxdy,\ H[\varphi]=\iint_G\varphi^2dxdy,$$

并在 G 的边界 Γ 上加条件

$$\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0.$$

在这些规定下, 其他的讨论及本节第 1 小节的公式可全部保持不变.

在第 5 章中没有明晰处理的其他类型的问题也可立刻纳入本章的范围. 假如我们回想一下 $\frac{1}{2}H[\varphi]$ 为一连续系统的动能, 其质量密度为 ρ, 而 $\frac{1}{2}\mathfrak{D}[\varphi]$ 则为势能, 很自然地我们就会来造这样一种力学模型, 其中的质量不仅连续分布于区域 G 中, 而且还集中于一些孤立的点上. 对这样的模型我们可得 (一维的情形) 表示式

$$\mathfrak{D}[\varphi] = \int_G \rho\varphi^2 dx + \sum_{\nu=1}^{h} b_\nu \varphi(x_\nu)^2 \tag{11}$$

以代替前面的 H; 这里的 $x_1, x_2, \cdots, x_h$ 表示区域 G 中的给定点, b_ν 为给定常数. 这种形式的二次泛函就相当于假定有大小为 b_ν 的质量集中在点 $x_1, x_2, \cdots, x_h$ 上. 我们将永远假定这些质量为非负的. 同样, 我们可以考虑较一般的表示式

$$\mathfrak{D}[\varphi] = \int_G p\varphi'^2 dx + \int_G q\varphi^2 dx + \sum_{\nu=1}^{h} a_\nu \varphi(x_\nu)^2. \tag{12}$$

我们可以用和本节第 1 小节中完全同样的符号和讨论, 求出上面这些问题的本征值和本征函数. 这些本征函数满足微分方程

$$L[u] + \lambda\rho u = (pu')' - qu + \lambda\rho u = 0, \tag{13}$$

$x_1, x_2, \cdots, x_h$ 这几个点除外, 在这些点上微商满足自然边界条件和*跳跃条件*. 我们可以作一级变分而立刻得出这些条件. 这个问题中的本征函数, 乘以 $\sqrt{\rho}$ 后, 也不再是正交的; 与此相当, 它们满足条件[1)]

$$\int_G \rho u_i u_j dx + \sum_{\nu=1}^{h} b_\nu u_i(x_\nu) u_j(x_\nu) = \begin{cases} 0, & 当 \quad i \neq j, \\ 1, & 当 \quad i = j. \end{cases} \tag{14}$$

另一个例子可由下列 $\mathfrak{D}$ 和 $\mathfrak{H}$ 的表示式提供:

$$\mathfrak{D}[\varphi] = \int_G p\varphi'^2 dx + \int_G q\varphi^2 dx, \tag{15}$$

$$\mathfrak{H}[\varphi] = \int_G \rho\varphi^2 dx + \int_G \int_G k(x,y)\varphi(x)\varphi(y) dx dy, \tag{15a}$$

其中 $k(x,y)$ 为 x 和 y 的给定对称函数. 为简单计, 我们将假定 $\mathfrak{H}[\varphi]$ 永远不取负值. 用本节第 1 小节的方法, 我们现在得到的不是本征值微分方程, 而是*积微分方程*

$$(pu')' - qu + \lambda\left(\rho u + \int_G k(x,y)u(y)dy\right) = 0, \tag{16}$$

边界条件可以是 $u = 0$. 在这问题中本征函数的正交关系[2)]为

$$\int_G \rho u_i(x)u_j(x)dx + \int_G \int_G k(x,y)u_i(x)u_j(y)dxdy \begin{cases} 0, & 当 \quad i \neq j, \\ 1, & 当 \quad i = j. \end{cases}$$

1) H. Kneser 建义用 "权正交" 这个名词.

2) 又可以把它看成函数组 u_i 和 v_i 之间的 "变正交关系", 为此我们只要在本征函数 $u_i(x)$ 之外再引进函数 $v_i(x) = \rho u_i(x) + \int_G k(x,y)u_i(y)dy$. 换句话说, 我们可以把这关系写为

$$\int_G u_i v_j dx = \begin{cases} 0, & 当 \quad i \neq j, \\ 1, & 当 \quad i = j. \end{cases}$$

6.1.3 当区域具有分隔组成部分时的本征值问题

下述在微分方程本征值问题中成立的事实, 将会是很重要的:

假如 G 由一些不相重的 (开) 区域 $G', G'', \cdots$ 所组成, 则对 G 而言的全部本征值和本征函数是由诸子区域 $G', G'', \cdots$ 的本征值和本征函数所组成的, 我们可以把某一子区域内的本征函数这样了解为 G 内的本征函数: 它在这个子区域之外到处恒等于零.

这不过表明了下述不证自明的一个物理事实: 几个分隔的振动系统在作振动时彼此之间没有相互的作用.

在数学上证明以下事实的一种方法是利用微分方程问题中本征函数的定义; 我们只须指出在任一子区域 $G', G'', \cdots$ 内有定义而在这子区域外恒等于零的本征函数 (以及相应于同一本征值的这些本征函数的线性组合) 也是 G 的本征函数, 反之, G 的每一个本征函数至少在某一个子区域内不为零. 这个论断的另一种证明可以变分问题中本征值的定义为基础; 我们很容易逐步地证明诸子区域的本征值给出了整个区域的本征值.

6.1.4 本征值的极大–极小性质

和在讨论二次型时一样 (见第 1 章), 我们也可以在定义第 n 个本征值及其联属本征函数时不去牵涉它前面的那些本征值和本征函数.

试考虑前述变分问题中的任一个. 我们保留本节第 1 小节中的符号, 可是改变加与可取函数 φ 的条件, 这样就改变了这个问题. 我们不规定 $H[\varphi, u_i] = 0(i = 1, 2, \cdots, n-1)$, 可是多加 $n-1$ 个另一种形式的条件

$$H[\varphi, v_i] = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1),$$

其中 $v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}$ 为 G 上任意选定的分段连续函数. 在所加的这些条件下, 积分 $D[\varphi]$, 或者更一般地说是泛函 $\mathfrak{D}[\varphi]$, 具有一*最大下界*, 这个最大下界依赖于函数 $v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}$, 我们用 $d\{v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}\}$ 来表示它. 我们的论断是原变分问题逐次定出的本征函数 u_n 和本征值 λ_n 可由改变后的问题按下述定理来确定:

给定 G 内的 $n-1$ 个分段连续的函数 $v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}$, 令 $d\{v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}\}$ 为泛函 $\mathfrak{D}[\varphi]$ 所取诸值的最大下界, 其中 φ 可为 G 内任意具有分段连续微商的函数, 满足条件 $H[\varphi] = 1$ 及

$$H[\varphi, v_i] = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1). \tag{17}$$

我们令函数 $v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}$ 遍及所有的可取函数组, 则本征值 λ_n 等于下界 d 所能取的最大值. 当 $u = u_n, v_1 = u_1, v_2 = u_2, \cdots, v_{n-1} = u_{n-1}$ 时 d 达到这个极大–极小值.

在边界条件为 $u=0$ 时, 变分问题不再是自由的, 而须在 Γ 上受条件 $\varphi=0$ 的限制.

证明这定理时, 首先注意: 当 $v_i = u_i(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ 时, 由定义我们有 $d\{v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}\} = \lambda_n$; 因此, 我们要证的是对任意 $v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}$ 有 $d\{v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}\} \leqslant \lambda_n$. 我们只须定出一特殊的 φ, 它满足条件 $H[\varphi, v_i] = 0(i=1,2,\cdots,n-1)$ 并使 $\mathfrak{D}[\varphi] \leqslant \lambda_n$. 为此目的, 我们确定前 n 个本征函数的一个适当的线性组合 $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i u_i$, 其中 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为常数. (17) 中的 $n-1$ 个关系导致未知量 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的 $n-1$ 个线性齐次条件, 适当地定 c_i 总可以使这些条件得到满足. 方程 $H[\varphi] = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2 = 1$ 不过是一个规一化条件, 它确定一比例因子. 因为 $\mathfrak{D}[u_i, u_k] = 0(i \neq k), \mathfrak{D}[u_i] = \lambda_i$[见方程 (8)], 故由

$$\mathfrak{D}[\varphi] = \sum_{i,k=1}^{n} c_i c_k \mathfrak{D}[u_i, u_k]$$

可得

$$\mathfrak{D}[\varphi] = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \lambda_i;$$

因为

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2 = 1 \text{ 而且 } \lambda_n \geqslant \lambda_i \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

我们有

$$\mathfrak{D}[\varphi] \leqslant \lambda_n.$$

因此极小值 $d\{v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}\}$ 必然不可能大于 λ_n; 所以 λ_n 是这些极小值所能取的最大值.

6.2　由本征值的极值性质所得的一般结论

6.2.1　一般定理

由变分法的简单原理, 我们可以从上述极大–极小性质得出一些重要的结论. 这些原理中的第一条可以这样叙述: *加强一个极小问题中的条件, 我们不会减小极小值; 反过来, 放宽条件时则极小值减小, 或者至少不增加.* 第二条原理可叙述为: *给定两个极小问题, 其可取函数为同一族 φ, 设对每一 φ 而言第一问题中泛函的值不小于第二问题中泛函的值, 则第一问题的极小值也不小于第二问题的极小值.*

在本征值的经典定义下, 如果要比较不同问题中的本征值, 我们不能应用上述原理; 因为由于可取条件不一样, 可取函数的集合不相同. 可是在本征值的极大–极小的定义下, 可取函数的集合一致, 我们的原理就可以应用.

例如, 考虑任一可振动的系统, 其振动的本征值可以用这里所处理的这类本征值问题定出. 该系统振动时所受的任一约束条件, 在数学上可表为加与变分问题中可取函数的附加条件. 当极大–极小问题中加与 φ 的条件加强时, 则下界 $d\{v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}\}$ 增加, 或者至少不减少. 因此这些下界的极大 (即第 n 个本征值) 也增加 (至少不减少). 与此相应, 当加与函数 φ 的条件减弱时, 则极大–极小的值 (也就是第 n 个本征值) 将减小或者至少不增加.

在物理上, 这意味着:

定理 1 *假如将约束条件加与一可振动的系统, 则基音和每一泛音的音调皆变高 (至少不变低). 反过来, 假如除去约束条件, 则基音和每一泛音皆变低 (至少不变高).*

例如, 在一拉紧的弹性膜振动时, 如果不但将膜沿边界固定, 而且沿膜中间的某部分或某些曲线将它固定, 则基音和各泛音皆变高. 另一方面, 如果将膜割裂 (或者在板振动的情形, 板的质料有了裂痕), 则基音和各泛音皆变低. 事实上, 在这种情形, 可取函数 φ 的连续性条件或其微商的连续性条件在裂口上应予取消.

从数学上来说, 上述原理可导致好些重要的关于*本征值的分布的一般定理*. 下面的定理 2 和 3 是关于边界条件 $u=0$ 的, 它将一区域的本征值分布和一子区域的分征值分布作了比较. 再下面的定理对边界条件 $\partial u/\partial n = 0$ 作出了相应的论述. 其他定理中则牵涉较一般的边界条件并在这些不同形式的边界条件下比较了微分方程的谱[1].

定理 2 *设 $G', G'', G''', \cdots$ 为区域 G 的有限个不相交的子区域. 令 $A(\lambda)$ 表示对区域 G 在边界条件 $u=0$ 下微分方程 $L[u]+\lambda\rho u=0$ 的小于 λ 的本征值个数. 则在同样的边界条件下, 对所有分隔的子区域小于 λ 的本征值的总数不超过 $A(\lambda)$.*

这条定理又可表述如下: *在边界条件为 $u=0$ 时, 区域 G 的第 n 个本征值 λ_n 不大于诸子区域 $G^{(i)}$ 的混合本征值序列中的第 n 个 λ_n^*, 这个序列是按本征值的增加排列的, 并且计入各本征值的重数.*

证明可由以下讨论立刻得出: 假如在决定 λ_n 的极大–极小问题中, 我们给函数 φ 规定一新的条件, 要求它们在所有子区域 $G^{(i)}$ 的边界上为零并在 G 中不属于任一子区域 $G^{(i)}$ 的部分为零. 于是, 由上述基本原理, 我们首先知道极大–极小值不减小. 另一方面, 这样所得到的极大–极小就正好定出了分隔区域 $G', G'', \cdots$ 所形成的不连通区的第 n 个本征值. 由 6.1.3 小节的说明, 这新的极大–极小值就等于 λ_n^*, 因此我们有 $\lambda_n \leqslant \lambda_n^*$. 这就是我们所要证明的.

特别地, 刚才所证的定理给出了在边界条件 $u=0$ 之下各本征值的一个重要的性质 —— 单调性:

---

1) 所谓谱, 像前面一样, 是指本征值的全体.

定理 3 在边界条件 $u=0$ 下, 区域 G 的第 n 个本征值决不会超过它的子区域的第 n 个本征值[1].

对边界条件 $\partial u/\partial n=0$ 可作相应于定理 2 的论述.

定理 4 设 $G', G'', G''', \cdots$ 为有限多个不相交的子区域, 它们完全充满了 G. 令 $B(\kappa)$ 表示对区域 G 在边界条件 $\partial u/\partial n=0$ 下微分方程 $L[u]+\lambda\rho u=0$ 的小于 κ 的本征值个数. 则在同样的边界条件下, 所有各分隔区域的小于 κ 的本征值的总数至少等于 $B(\kappa)$.

我们也可以叙述这条定理如下: 令 κ_n^* 为在边界条件 $\partial u/\partial n=0$ 之下, 诸子区域 $G^{(i)}$ 的混合本征值序列中的第 n 个, 在这里我们按本征值的增加作排列并计入各本征值的重数. 于是在同样的边界条件下, 区域 G 的第 n 个本征值 κ_n 必大于或等于 κ_n^*.

在这里, 将一般原理中的第一条应用于确定 G 的第 n 个本征值 κ_n 的极大–极小问题, 就立刻可以得出证明. 因为假如我们在这问题中允许可取函数 φ 在 G 中的子区域 $G^{(i)}$ 的边界曲线上不连续 (越过这些边界曲线时最多出现有限的跳断), 我们就减小了极大–极小值, 或者至少不使它增加. 另一方面, 按照 6.1.4 小节, 修改后的极大–极小问题恰好确定了分隔的 $G^{(i)}$ 所组成的区域在自然边界条件 $\partial u/\partial n=0$ 下的第 n 个本征值, 也就是说, 确定了 κ_n^* 的值. 这就证明了关系 $\kappa_n \geqslant \kappa_n^*$.

现在我们将要证明一些定理, 它们说明了在不同类型的边界条件下微分方程的谱的差异.

定理 5 令 λ_n 为在边界条件 $u=0$ 下对区域 G 而言微分方程 $L[u]+\lambda\rho u=0$ 的第 n 个本征值, 令 μ_n 为相应于边界条件 $\partial u/\partial n+\sigma u=0$ 的第 n 个本征值, 或者说得更一般些, 可相应于这样的边界条件: 在边界 Γ 的一部分 Γ' 上 $\partial u/\partial n+\sigma u=0$, 在边界的其余部分 Γ'' 上 $u=0$. 于是有

$$\mu_n \leqslant \lambda_n.$$

证明时可考虑确定第 n 个本征值 μ_n 的极大–极小问题: μ_n 是 $\mathfrak{D}[\varphi]$ 的极小中的极大, 没有边界条件; 我们给函数 φ 外加一个条件, 要它在 G 的边界 Γ 上为零. 于是每一个极小值必增大或至少不减小, 因此极大–极小值也一样. 另一方面, 这新的极大–极小值显然就是 λ_n, 因为在外加条件下我们有 $\mathfrak{D}[\varphi]=D[\varphi]$. 因此 $\mu_n \leqslant \lambda_n$ 如上所述.

定理 6 假如在 Γ 上的边界条件 $\partial u/\partial n+\sigma u=0$ 中, 函数 σ 在每点都增大或减小, 则每一本征值只能按同样的方向改变.

1) 事实上, 当我们所谈的是真正的子区域时, 则区域 G 的本征值总小于子区域的本征值, 这很容易由 6.6 节的方法断定.

由上述第二条一般原理, 这个重要的事实也是极大–极小性质的直接后果. 因为如果我们改变函数 σ, 则对每一 φ 而言式子 $\mathfrak{D}[\varphi]$ 的值皆按 σ 改变的方向改变; 因此对给定的 $v_i, \mathfrak{D}[\varphi]$ 的下界按这一方向改变, 因此这些下界的极大也按这个方向改变.

定理 5 和 6 显示出了相应于不同类型的边界条件诸本征值之间的相互关系. 假如我们令函数 σ 在每一点由 0 单调改变至 ∞, 则每一本征值 μ 由它在边界条件 $\partial u/\partial n = 0$ 下所取的值单调改变到它在边界条件 $u = 0$ 之下所取的值. 换言之, 这定理说明*在所考虑的各边界条件下, $u = 0$ 给的限制性最大而 $\partial u/\partial n = 0$ 给的限制性最小*, 此处设 σ 非负, 当 σ 无限增大时本征值 μ_n 的极限的确为 λ_n, 这一事实可较仔细地研究本征函数的性能而加以证明. 可是这只在以后才能办到, 所以目前我们不给证明 (见第 II 卷).

在本节第 6 小节中, 我们将看到本征值是随 σ 连续增大的. 此外, 关于 n 很大时本征值的渐近分布的研究将指出, 虽然本征值有上述随 σ 增加的性质, 可是当 $n \to \infty$ 它们的渐近行为是与边界条件无关的, 因此由于函数 σ 的增加而引起的本征值的增加, 比之于本征值自身, 当 n 充分大时小得可以略去不计.

在定理 5 和 6 中表述的性质指出了一种简单的物理解释. 边界条件 $\partial u/\partial n + \sigma u = 0$ 所描划的是由弹性力所固定的边界, 其中约束力的大小由函数 σ 确定. 定理叙述说, 当这个弹性约束的强度增加时, 每一个本征频率皆增加. 条件 $u = 0$ 代表弹性约束力变为无穷的情形, 换句话说即边界完全固定.

最后, 本征值的极大–极小性使我们有可能来研究本征值对微分方程的系数以及对区域 G 的依赖情况.

定理 7 *假如微分方程 $L[u] + \lambda\rho u = 0$ 的系数 ρ 在 G 中各点按某一方向 (增大或增小) 改变, 则对任何边界条件而言, 第 n 个本征值按反方向改变. 假如系数 p 或 q 中的任一个在各处按同一方向改变, 则每一本征值也按这方向改变 (在边界条件为 $\partial u/\partial n + \sigma u = 0$ 的情形, 我们设 $\sigma \geqslant 0$).*

首先令 p 在各处按同一方向改变. 则对每一个可取函数 φ 而言式子 $\mathfrak{D}[\varphi]$ 的值也按这同一方向单调改变, 因此在固定 ν_i 时 $\mathfrak{D}[\varphi]$ 的下界, 以及这些下界的极大, 也就是第 n 个本征值, 也都按这同一方向单调改变. 假如 ρ 单调改变后新函数为 $\rho' \geqslant \rho$, 则对任一可取函数 φ 而言我们有

$$\mathfrak{D}[\varphi] : \iint_G \rho\varphi^2 dxdy \geqslant \mathfrak{D}[\varphi] : \iint_G \rho'\varphi^2 dxdy.$$

在这里我们可以看出, 当 v_i 个定时, 左端的下界不小于右端的下界. 在得出右端商式的下界时, 我们需要在附加条件中以函数 $v_i' = v_i\rho/\rho'$ 代替函数 v_i, 因为现在 ρ 已经变为 ρ'. 假如 v_i 这组函数遍及整个可取函数的空间, 则 v_i' 这级函数也是如此;

所以, 我们很清楚地可以看出, 前面所考虑的两个下界的极大之间有和函数 ρ 及 ρ' 相反的大小关系.

6.2.2 本征值的无限增大

在这一小节中, 我们将证明在**变分本征值问题中本征值 λ_n 当 $n \to \infty$ 时无限增大**. 特别地, 这表明每一本征值只有有限的重数, 而且只有有限多个本征值为负数. 在 6.3.1 小节中我们将看到, 本征值的无界性的一个最重要的后果是本征函数的完备性; 由此可知这组函数就和微分方程的本征函数组相同.

在证明上述无界性时 (在此将不设 $q > 0$), 我们依次用 p_M, q_M, ρ_M 和 p_m, q_m, ρ_m 表示函数 p, q, ρ 在 G 上的最大和最小值, 并首先考虑边界条件 $u = 0$. 假如我们在 $\mathfrak{D}$ 和 H 中用常数 p_m, q_m, ρ_M 和 p_M, q_M, ρ_m 来代替函数 p, q, ρ, 我们得到两个新本征值问题, 它们依次具有本征值 λ'_n 和 λ''_n, 而由定理 7 我们有 $\lambda'_n \leqslant \lambda_n \leqslant \lambda''_n$.

首先我断定 λ'_n 无界: 在一个自变数的情形, 我们可以用三角函数明晰解出联属微分方程的本征值问题; 所得本征值为 $(p_m\nu^2 + q_m)/\rho_M, \nu = 1, 2, \cdots$. 因为由变分问题所得出的本征值 λ'_n 必然包含在这一序列内, 由此就立刻可以得到我们的论断 $\lambda_n \to \infty$.

上面我们说过由变分问题得出的本征值和微分方程的全部本征值相重; 目前暂时假定这个论断真实, 我们就有

$$\lambda'_n = \frac{p_m n^2 + q_m}{\rho_M}, \lambda''_n = \frac{p_M n^2 + q_M}{\rho_m},$$

因此我们可以看出当 n 增大时商数 λ_n/n^2 保持在有限的正上下界之间.

为了估计多维空间任意区域 G 的本征值 λ'_n, 我们将它和包含整个 G 的一方形的变分问题的本征值 λ_n 作比较, 而这些本征值又都属于微分方程的本征值 λ^*_n. 由第 5 章 5.14 节我们知道 λ^*_n 这些本征值当 n 增大时趋于无穷; 由定理 3 和 7 我们有

$$\lambda^*_n \leqslant \lambda_n \leqslant \lambda'_n,$$

因此 λ'_n 也趋于无穷.

我们不来把以上推论用于各种不同的边界条件, 因为对本征值的渐近行为作较精确的估计后不难证明它们是无界的. 可是我们要简短地叙述一下另一种完全不同的 —— 间接的 —— 证明方法, 这种方法不假定在特殊情形下已先有关于变分问题的解的知识, 因此在实质上是较为可取的[1].

先讨论一个自变数的情形, 假设我们的问题有无穷多个本征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$, 它们的绝对值皆在一正上界之下. 本征值

1) 这种方法应归功于 F. Rellich. Ein Sata über mittlere Konvergenz. Nachr. Ges. Göttingen (math.-phys, Kl.), 1930.

$$\lambda_n = \int_{x_1}^{x_2} (pu_n'^2 + qu_n^2)dx + h_1 p(x_1) u_n(x_1)^2 + h_2 p(x_2) u_n(x_2)^2$$

以及 $\int_{x_1}^{x_2} \rho u_n^2 dx$ 的有界性立刻引出

$$\int_{x_1}^{x_2} u_n'^2 dx \text{ 和 } \int_{x_1}^{x_2} u_n^2 dx$$

的有界性, 只要常数 h_1 和 h_2 是非负的 (利用本节第 5 小节的说明很容易除去这一限制).

现在我们要利用下述引理: 假如对一组函数 $\varphi(x)$ 而言, 积分 $\int_G \varphi'^2 dx$ 和 $\int_G \varphi^2 dx$ 有界, 则函数 $\varphi(x)$ 同等边续且一致有界 (见第 2 章). 于是利用聚点原理 (见第 2 章 2.2 节) 我们可以从本征函数组 u_n 中选出一个一致收敛的子序列. 假如我们仍旧用 u_n 来表示这个新序列, 则显然有 $\lim\limits_{n,m\to\infty} H[u_n - u_m] = 0$. 可是另一方面, 由 $u_n (n \neq m)$ 的正交性, 我们有

$$H[u_n - u_m] = 2.$$

这矛盾证明了我们的定理.

在多个 (例如两个) 变数的情形, 同样的推论成立, 只要以下述 Rellich[1)]的引理为基础 (我们不在这里证明这引理):

给出定义在区域 G 上的一组函数 $\varphi(x,y)$, 假如式子 $\iint_G (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dxyd$ 和 $\iint_G \varphi^2 dxdy$ 一致有界, 我们可以选出一子序列 φ_n, 使有

$$\lim_{n,m\to\infty} \iint_G (\varphi_n - \varphi_m)^2 dxdy = 0.$$

6.2.3 施图姆–刘维尔问题中本征值的渐近性质

在施图姆–刘维尔问题的情形, 本征值的极大–极小性质使我们可以同时*定出第 n 个本征值的数量级并求出其渐近值*. 用第 5 章 5.3.3 小节中的变换 (20a), 我们可将微分方程 $(py')' - qy + \lambda\rho y = 0$ 写为

$$z'' - rz + \lambda z = 0, \tag{18}$$

所讨论的区间为 $0 \leqslant t \leqslant l$, 其中 $r(t)$ 为连续函数, z 必须满足由原来齐次边界条件所引出的新齐次边界条件. 首先我们考虑 $y(0) = y(\pi) = 0$ 或 $z(0) = z(l) = 0$ 的情形. 微分方程的本征值是积分式

1) 见上页所引 Rellich 文.

$$\int_0^l (z'^2 + rz^2)dx$$

的极大中的极小 —— 在这一小节中我们将假定 (在后面 6.3.1 小节中证明) 由变分问题所得出的本征函数及本征值和由微分方程得出的相重合. 假如我们在上面的式子中略去 rz^2 而考虑积分式

$$\int_0^l z'^2 dx,$$

则只要 z 满足条件

$$\int_0^l z^2 dx = 1,$$

新积分式和原积分式的差不超过一定的界限 r_M(r 的最大绝对值). 因此第一个式子的极大–极小, 也就是所要求的本征值, 和第二个式子的相差不超过 r_M. 可是第二个积分的极大–极小正好就是方程 $z'' + \mu z = 0$ 在区间 $(0, l)$ 上的本征值 $\mu_n = n^2\pi^2/l^2$; 所以由 $\lim\limits_{n=\infty} \mu_n = \infty$, 我们立刻有渐近公式

$$\lambda_n = \mu_n + O(1), \tag{19}$$

和前面一样, $O(1)$ 表示一个当 n 趋于无穷时有界的函数. 回到我们原来的符号, 我们就得到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\lambda_n} = \frac{1}{\pi^2}\left(\int_0^\pi \sqrt{\frac{\rho}{p}} dx\right)^2. \tag{19a}$$

对任意的边界条件可得完全同样的估计, 因为方程 $z'' + \mu z = 0$ 的本征值的渐近行为不依赖于边界条件 (参看 6.4 节).

6.2.4 奇异微分方程

很容易把我们的渐近估计用于有奇点的微分方程. 我们只考虑方程

$$xu'' + u' + \left(x\lambda - \frac{m^2}{x}\right)u = 0,$$

它的解是贝塞尔函数 $J_m\left(x\sqrt{\lambda}\right)$. 在这里, 若以 $u(0) < \infty, u(1) = 0$ 为边界条件, 则本征值 λ 为 J_m 的零点的平方 $\lambda_{m,n}$(见第 5 章 5.10.1 小节). 在 $m \geqslant 1$ 的情形, 可考虑满足本征值方程

$$v'' + \left(\lambda - \frac{4m^2 - 1}{4x^2}\right)v = 0$$

的函数 $v = \sqrt{x}J_m(x\sqrt{\lambda})$, 并由商式 $D[\varphi]/H[\varphi]$ 的极大–极小来定出其本征值, 其中

$$D[\varphi] = \int_0^1 \left(\varphi'^2 + \frac{4m^2 - 1}{4x^2}\varphi^2\right)dx, H[\varphi] = \int_0^1 \varphi^2 dx;$$

这些式子代替了 6.1.2 小节中所给的表示式. 我们令 $\varphi(0)=\varphi(1)=0$ 为边界条件; 因为 $m\geqslant 1$, 我们必然有 $D[\varphi]\geqslant\int_0^1\varphi'^2dx$, 因此 $\lambda_n\geqslant n^2\pi^2$. 另一方面按以下方式加强可取函数的条件我们可得一 λ_n 的上界: 在待定的区间 $0\leqslant x\leqslant\varepsilon$ 上多加条件 $\varphi(x)=0$ 而将积分 $D[\varphi]$ 中的第二项代换为一较大的常数:

$$\frac{4m^2-1}{4\varepsilon^2}\int_0^1\varphi^2dx=\frac{c}{\varepsilon^2},$$

这就给出 $\lambda_n\leqslant n^2\pi^2/(1-\varepsilon)^2+c/\varepsilon^2$. 现在假如我们适当地令 ε 随 $\frac{1}{n}$ 趋于零, 例如令 $\varepsilon=1\sqrt{n}$, 就有 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n/n^2\pi^2\leqslant 1$. 这样我们就得到 J_m 的零点 $\sqrt{\lambda_{m,n}}$ 的渐近公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{n^2\pi^2}=1,$$

这和非奇型问题中相应的公式吻合. 同样的渐近公式对我们所考虑过其他边界条件也成立, 例如边界条件 $u'(1)=0$.

这个结果可以立刻用来估计零阶贝塞尔函数的根, 因为我们有关系式 $J_0'(x)=-J_1(x)$(见第 5 章 5.5.5 小节). 由这个式子可以看出当 $m=1$ 时以 $u(1)=0$ 为边界条件的贝塞尔问题的本征值就是当 $m=0$ 时以 $u'(1)=0$ 为边界条件的本征值 (第一个本征值零除外). 因为在 $J_0'(x)$ 相邻的两个零点之间恰好有 $J_0(x)$ 的一个零点 —— 可按第 7 章 7.2.8 小节的方式用罗尔定理证明 —— 这就说明上述渐近公式在 $m=0$ 的情形也成立 [1].

6.2.5 关于本征值增大的进一步讨论、负本征值的出现

设如我们所假定, 在 6.1 节的变分问题中函数 σ 及数 h_1,h_2 为非负 [2], 而且 q 也是如此, 则显然不会出现负本征值. 可是本节第 2 小节的讨论说明: 假如 q 不处处为正, 则至多只能出现有限多个负本征值. 当函数 σ 或常数 h_1,h_2 取负值时, 这个事实也成立, 因为在这里本征值也随 n 的增大而趋于无穷.

证明这一点时, 为简短计, 我们考虑以 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 为基本区域的一维问题, 如下估计由边界值所发生的负项: 假如 ξ 表示区间 $0\leqslant x\leqslant t$ 中的一个点, 我们有

$$|y(0)-y(\xi)|=\left|\int_0^\xi y'dx\right|,$$

其中 t 的选择只受条件 $0<t\leqslant\pi$ 的限制, 用施瓦茨不等式我们可得

$$|y(0)-y(\xi)|\leqslant\sqrt{t}\sqrt{\int_0^\pi y'^2dx},$$

1) 可参看 7.8 节中对 $m=0$ 的另一证明.

2) 恒假函数 p 及 ρ 为非负的.

因此, 将 p 的极小记作 p_m, 有

$$|y(0)| \leqslant |y(\xi)| + \sqrt{\frac{t}{p_m}}\sqrt{\int_0^\pi py'^2dx}.$$

在条件 $\int_0^\pi \rho y^2 dx = 1$ 下, 必存在一中间点 ξ 使得 $y(\xi)^2 \leqslant 1/t\rho_m$, 其中 ρ_m 表示 ρ 的极小. 因此我们有

$$|y(0)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{t\rho_m}} + \sqrt{\frac{t}{p_m}}\sqrt{\int_0^\pi py'^2dx}.$$

假如根号下的积分超过界限 $1/\pi^2$, 我们要求 t 满足

$$\frac{1}{t} = \sqrt{\int_0^\pi py'^2dx}.$$

在这种情形 t 就在区间 $0 \leqslant x \leqslant \pi$ 内; 不然我们令 $t = \pi$. 于是我们有

$$y(0)^2 \leqslant c\sqrt{\int_0^\pi py'^2dx} + c_1,$$

其中 c 和 c_1 为不依赖于 $y(x)$ 的常数. 由于对 $y(\pi)$ 作同样的估计, 立刻可知每一个可取函数 y 皆满足重要的关系式

$$h_1y(0)^2 + h_2y(\pi)^2 \leqslant C_1\sqrt{\int_0^\pi py'^2dx} + C_2,$$

其中 C_1, C_2 为适当的常数. 此外, 我们当然有

$$\left|\int_0^\pi qy^2dx\right| \leqslant C_3,$$

因此最后有

$$\mathfrak{D}[y] \geqslant \int_0^\pi py'^2dx - C_4\sqrt{\int_0^\pi py'^2dx} - C_5 \geqslant \frac{1}{2}\int_0^\pi py'^2dx - C_6.$$

既然联属于积分 $\int_0^\pi py'^2dx$ 的本征值趋于无穷, 则属于 $\mathfrak{D}[y]$ 的也趋于无穷. 所以其中只能有有限多个负本征值出现.

按类似的方式, 我们可以对二维的问题得出估计

$$\left|\int_\Gamma p\sigma\varphi^2 ds\right| \leqslant c_1\sqrt{|D[\varphi]|} + c_2, \tag{20}$$

由此可以得出同样的结果：本征值基本上都是正的[1]. 最后我们要提的是用定全类似的讨论可以证明一般本征值问题 6.1.2 小节中本征值的无界性[2].

6.2.6 本征值的连续性

首先设函数 ρ 改变为函数 ρ', 使得有 $0<(1-\varepsilon)\rho \leqslant \rho' \leqslant (1+\varepsilon)\rho$($\varepsilon$为正). 于是由定理 7, 知微分方程的第 n 个本征值在以 $\rho(1-\varepsilon)$ 及 $\rho(1+\varepsilon)$ 代 ρ 后所得两微分方程的第 n 个本征值之间, 这两个本征值就是将原微分方程的第 n 个本征值依次乘以因子 $(1-\varepsilon)^{-1}$ 和 $(1+\varepsilon)^{-1}$ 所得的两个数. 假如取 ε 充分小, 则这两个数可任意接近. 因此*微分方程的第 n 个本征值连续依赖于函数 ρ.*

第 n 个本征值也连续依赖于 q. 事实上, 由关系 $\rho \geqslant \rho_m$(ρ_m为正常数) 可得

$$1=\iint_G \rho\varphi^2 dxdy \geqslant \rho_m \iint_G \varphi^2 dxdy.$$

显然积分 $\iint_G \varphi^2 dxdy$ 对所有的可取函数 φ 而言一致有界. 这就说明当函数 q 有一充分小的改变时式子 $\mathfrak{D}[\varphi]$ 的改变可为任意小; 事实上, 它的改变对所有的可取函数 φ 而言还是一致的. 因此对 $\mathfrak{D}[\varphi]$ 的极大–极小有同样的事实成立.

按同样的方式可以看出本征值连续依赖于出现在边界条件内的函数 σ. 我们仍旧可以假定变分问题中的式子 $\mathfrak{D}[\varphi]$ 具有一固定的上界[3]. 于是由关系 (20), 边界积分 $\int_\Gamma \varphi^2 ds$ 以及 $\int_\Gamma p\sigma\varphi^2 ds$ 有上界. 因此假如我们在边界积分中使 σ 有一充分小的改变, 则积分值的改变可为任意小, 而且对所有的可取函数 φ 而言可一致地小. 所以 $\mathfrak{D}[\varphi]$ 以及 $\mathfrak{D}[\varphi]$ 的极大–极小的改变也为任意小.

按同样的方式可得本征值对 p 的连续依赖性.

总结上述, 我们有:

定理 8 *对所有我们考虑的边界条件, 微分方程 $L[u]+\lambda\rho u=0$ 的第 n 个本征值连续依赖于方程的系数.*

定理 9 *上述第 n 个本征值连续依赖于出现在边界条件 $\partial u/\partial n+\sigma u=0$ 内的函数 σ.*

最后, 我们来研究*作为区域 G 的函数时第 n 个本征值的连续性*. 我们将看到, 当区域 G' 充分逼近于 G 而边界条件相当时, 区域 G' 的第 n 个本征值可任意逼近

---

1) 见 Courant. Über die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der mathematis chen Physik. 特别是 13–17 页.

2) 见 Courant. Über die Anwendung der Variationsrechnung ···

3) 例如, 其上界可为对整个在 G 内的一方形而言以 $u=0$ 为边界条件的第 n 个本征值. 因为, 定理 3 和 5 说明在原边界条件下 G 的第 n 个本征值必然不大于对这方形而言以 $u=0$ 为边界条件的第 n 个本征值. 因此我们看出对 $\mathscr{D}[\varphi]$ 固定这上界不会影响极大–极小问题的解.

区域 G 的第 n 个本征值. 可是为此我们必须用到在相当强的意义下区域 G' 逼近另一区域 G 的概念. 凡是当边界条件中出现法向微商时, 单要求 G' 的边界点点逼近 G 的边界是不够的. 此外我们将还要要求 G' 边界上的法线逼近 G 连界上的法线. 事实上, 可以证明, 在再弱的逼近定义下, 第 n 个本征值就不一定是区域的连续函数[1)].

在较强的意义下区域 G' 逼近于 G 的分析定义如下:

设通过方程

$$x' = x + g(x,y), \quad y' = y + h(x,y) \tag{21}$$

区域 G 及其边界逐点对应地变换为区域 G' 及其边界; 在这里, 函数 g, h 在整个区域上连续且有分段连续的一级微商, 而且 g, h 及其一级微商的绝对值皆小于一小正数 ε. 在这情形下, 我们说区域 G' *以准确度 ε 逼近区域* G.

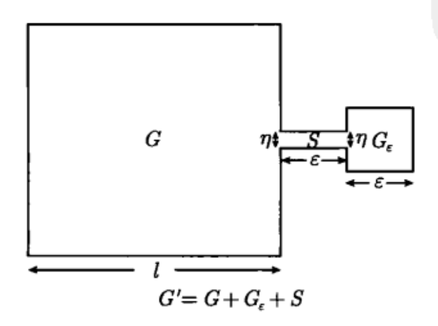
当 ε 趋近于零时, 我们就说 G' 连续地变形为 G. 现在我们来证明以下定理:

定理 10 *在我们所考虑的任一种边界条件下, 当区域 G 在上述意义下连续变形时, 微分方程 $L[u] + \lambda\rho u = 0$ 的第 n 个本征值也连续改变.*

证明: 考虑一串区域 G', 对它们说来上述 ε 趋于零. 我们在方程 (21) 中解出 x, y, 令

$$\varphi(x,y) = \varphi'(x',y'), p(x,y) = p'(x',y')\text{等等}, \sigma(x(s),y(s)) = \tau(s),$$

1) 以下是一种简单的反例: 令 $L[\varphi] = \Delta\varphi, \rho = 1$, 并令 G 为边长为 1 之方形. 在 G 外我们再作一边长为 ε 之方形 G_ε, 它的四边和 G 的四边平行, 位置则在离 G 之一边为 ε 处. 然后我们用垂直于二方形, 长为 ε, 相隔为 η 的二平行线段作成一狭条 S, 用 S 将 G_ε 和 G 连通起来. 令 G' 为由二方形 G 和 G_ε 以及狭条 S 所做成的区域. 以 $\partial u/\partial n = 0$ 为边界条件 G' 的第一个本征值为零, 联属本征函数为 $u_1 =$ 常数. 现在如果给定任一 ε, 则取狭条 S 之宽度 η 充分小, 可使 G' 的第二个本征值也为任意小 $(< \varepsilon)$. 因为, 可考虑一在 G' 内的函数 φ, 它在 G_ε 内等于 $-1/\varepsilon$, 在 G 内等于常数 c, 在 S 内由 c 线性地变为 $-1/\varepsilon$. 我们这样选择 c 使得在 G' 内 φ 的积分为零. 假如 ε 充分小, 则 c 和 0 任意接近. 于是在 G' 内的积分 $\mathfrak{D}[\varphi]$ 将以 η/ε^3 为其数量级. 我们如取 $\eta = \varepsilon^4$, 则该积分可为任意小, 而在 G' 内 φ^2 的积分则和 1 任意接近. 因此, 由本征值及本征函数经典的极小性质, G' 的第二个本征值必然为任意小. 假如我们令 ε 趋于零, 若 η/ε^3 也趋于零则 G' 的第二个本征值自然也趋于零. 可是 G 的第二个本征值为正; 因此虽然 G' 的边界趋于 G 的, G 的第二个本征值不是 G' 的第二个本征值的极限.



并将组成 $\mathfrak{D}[\varphi]$ 的两个积分变换为区域 G' 上的一个积分以及沿其边界 Γ' 的一个积分.

这样, 我们就得到对区域 G' 的一个变分本征值问题, 其系数和原系数之差为任意小. 因此, 用类似于得出定理 8 和 9 的方法, 我们可以证明本征值对区域的连续依赖性. 我们给出详细的证明如下:

由 (21) 积分 $D[\varphi]$ 变换为积分

$$\iint_{G'}\{p'[(\varphi'_{x'}(1+g_x)+\varphi'_{y'}h_x)^2+(\varphi'_{x'}g_y+\varphi'_{y'}(1+h_y))^2]$$
$$+q'{\varphi'}^2\}M^{-1}dx'dy', \tag{22}$$

其中 M 表示函数行列式

$$M=\left(1+\frac{\partial g}{\partial x}\right)\left(1+\frac{\partial h}{\partial y}\right)-\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x},$$

当 ε 充分小时它可任意接近于 1. 沿边界的积分则变为

$$\int_\Gamma p\sigma\varphi^2 ds=\int_{\Gamma'}p'\tau(s)\varphi'^2\frac{ds}{ds'}ds',$$

其中 ds' 表示 G' 的边界 Γ' 上的弧元素.

假如我们一般地定义

$$D'[\psi]=\iint_{G'}\{p(\psi_x^2+\psi_y^2)+q\psi^2\}dxdy, \mathfrak{D}'[\psi]=D'[\psi]+\int_{\Gamma'}p\tau(s)\psi^2ds',$$

则 (22) 中的被积函数和 $D'[\varphi']$ 中的被积函数只差因子 M^{-1} 和 p/p'(它们和 1 之差为任意小) 以及外加的一些项, 在这些项中出现的 $\varphi'^2_{x'},\varphi'^2_{y'},\varphi'_x,\varphi'_{y'}$ 和 φ'^2 都乘上了一个趋于零的因子 ε. 用不等式

$$2\left|\iint_{G'}\varphi'_{x'}\varphi'_{y'}dx'dy'\right|\leqslant\iint_{G'}(\varphi'^2_{x'}+\varphi'^2_{y'})dx'dy',$$

我们得到关系

$$D[\varphi]=(1+\delta)D'[\varphi'],$$

其中 δ 表示一随 ε 趋近于零的量. 这样一个符号我们在下面将一直采用, 不过 δ 将不永远代表同一个量. 因为 ds/ds' 当 ε 充分小时和 1 可任意接近, 我们有

$$\int_{\Gamma'}p'\tau(s)\varphi'^2\frac{ds}{ds'}ds'=(1+\delta)\int_{\Gamma'}p\tau(s)\varphi'^2ds',$$

所以

$$\mathfrak{D}[\varphi]=(1+\delta)\mathfrak{D}'[\varphi'].$$

此外, 我们必须变换 6.1 节中加与函数 φ 的附加条件 (3a) 和 (17). 我们可得式子

$$\iint_G \rho\varphi^2 dxdy = \iint_{G'} \rho' M^{-1} \varphi'^2 dx'dy' = 1,$$

$$\iint_G \rho\varphi v_i dxdy = \iint_{G'} \rho' M^{-1} \varphi' v_i' dx'dy' = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1).$$

将函数 φ' 及 v_i' 乘以适当因子 (当 ε 很小时这些因子和 1 的差可为任意小), 则所得函数 φ'' 和 v_i'' 满足关系

$$\iint_{G'} \rho\varphi''^2 dx'dy' = 1,$$

$$\iint_{G'} \rho\varphi'' v_i'' dx'dy' = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1).$$

于是我们首先有

$$\mathfrak{D}[\varphi] = (1+\delta) D'[\varphi''];$$

其次知函数 φ'' 满足刻画 G' 的第 n 个本征值的极大–极小问题中的条件; 此处 G' 上的 v_i'' 占据了 G 上 v_i 的地位. 函数 v_i'' 的变化范围正好就是 G' 上可取的函数集合; 因此上式左端的极大–极小值和右端的差只在于一个随 $\varepsilon \to 0$ 而趋于 1 的因子, 这就证明了我们的定理. 由上面的论证又可得定理 10 以下较精确的表述:

定理 10 的系　*假如区域 G 通过变换 (21) 而变形为区域 G', 并有*

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{\partial g}{\partial y}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{\partial h}{\partial x}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{\partial h}{\partial y}\right| < \varepsilon,$$

其中 ε 为任一小正数, 则必存在一只依赖于 ε 并随 ε 趋于零的数 η, 使得对任一 n 以及任一种所讨论的边界条件, 区域 G 和 G' 的第 n 个本征值 μ_n 和 μ_n' 满足关系

$$\left|\frac{\mu_n'}{\mu_n} - 1\right| < \eta.$$

对边界条件 $u = 0$ (其中不出现法向微商) 而言, 连续依赖性的定理在较宽的条件下成立:

定理 11　*当边界条件为 $u = 0$ 时, 即使不再要求在区域连续变形时法线作连续的变化, 微分方程 $L[u] + \lambda\rho u = 0$ 的第 n 个本征值也是区域 G 的连续函数.*

事实上, 我们总可以把充分接近的任意两个区域 G 和 G' (邻近的边界点上所引的法线不必有邻近的方向) 包在两个区域 B 和 B' 的边界之间, 而 B 和 B' 在较强的意义下充分接近. 由定理 3, 对边界条件 $u = 0$ 而言, 第 n 个本征值是区域的单调函数, 因此 G 和 G' 的第 n 个本征值必在 B 和 B' 的第 n 个本征值之间, 由定理 10 后者是很接近的. 这就证明了定理 11.

假如我们不令 $\varepsilon \to 0$ 取极限, 则上面的讨论给出以下较一般的结果:

假如两个区域 G 和 G' 通过上述类型的点对应变换而发生联系, 使得函数行列式的绝对值一致有界, 又设 λ_n 和 λ'_n 依次表示区域 G 和 G' 的第 n 个本征值, 则当 n 充分大时, 商数 λ_n/λ'_n 处于不依赖于 n 的正界限之间.

6.3 完备性和展开定理

6.3.1 本征函数的完备性

在 6.1 节, 6.2 节的讨论中, 和商式 $\mathfrak{D}[\varphi]/\mathfrak{H}[\varphi]$ 的变分问题相联系, 我们得到关系式

$$\lim_{n\to 0} \lambda_n = \infty.$$

为要得出这结果, 主要的一点是 $\mathfrak{H}[\varphi]$ 为正定的, 也就是, $\mathfrak{H}[\varphi]$ 只取非负的值, 而仅当 φ 为零时 $\mathfrak{H}$ 才取值为零. 我们现在要利用上面的极限式来证明形式较为精密的完备性定理 1).

联属于商式 $\mathfrak{D}[\varphi]/\mathfrak{H}[\varphi]$ 的本征函数组是在下述意义下完备的: 对任一连续函数 f 和任一任意小的正数 ε, 我们可以找到一有限个本征函数的线性组合

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = \omega_n,$$

使得

$$\mathfrak{H}[f - \omega_n] < \varepsilon.$$

当我们取傅里叶系数

$$\alpha_i = c_i = \mathfrak{H}[f, u_i]$$

时, 所得的近似最好, 也就是说, $\mathfrak{H}[f - \omega_n]$ 的值最小. 这些傅里叶系数满足关系

$$\mathfrak{H}[f] = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2. \tag{23}$$

这里, 和在任意正交函数组的情形一样, 由 6.1 节的关系 (8) 可以看出用前 n 个本征函数的线性组合在 $\mathfrak{H}$ 下来平均逼近 f 时, 最好的近似可由 $\alpha_i = c_i = \mathfrak{H}[f, u_i]$ 得出 (这些系数与 n 无关), 也就是说这时候 $\mathfrak{H}[f - \omega_i]$ 达到最小值. 由关系式

$$0 \leqslant \mathfrak{H}\left[f - \sum_{i=1}^{n} c_i u_i\right] = \mathfrak{H}[f] - \sum_{i=1}^{n} c_i^2$$

立刻可得无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$ 的收敛性, 或者说得更准确些是得到贝塞尔不等式

1) 见第 5 章 5.14.3 小节. —— 译者

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \leqslant \mathfrak{H}[f].$$

为了不但证明这个不等式, 而且要证明关系 (23), 我们先假定 f 满足变分问题的可取条件. 于是函数

$$\rho_n = f - \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$$

满足正交关系

$$\mathfrak{H}[\rho_n, u_i] = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{24}$$

由 6.1 节方程 (7), 也就有正交关系

$$\mathfrak{D}[\rho_n, u_i] = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{24'}$$

由 (24) 以及 λ_{n+1} 的极小性质, 我们有

$$\lambda_{n+1}\mathfrak{H}[\rho_n] \leqslant \mathfrak{D}[\rho_n]. \tag{25}$$

另一方面, $\mathfrak{D}[\rho_n]$ 有界; 因为

$$\mathfrak{D}[f] = \mathfrak{D}\left[\sum_{i=1}^{n} c_i u_i\right] + 2\mathfrak{D}\left[\sum_{i=1}^{n} c_i u_i, \rho_n\right] + \mathfrak{D}[\rho_n],$$

所以由关系 (24′) 我们有

$$\mathfrak{D}[f] = \mathfrak{D}\left[\sum_{i=1}^{n} c_i u_i\right] + \mathfrak{D}[\rho_n],$$

$\mathfrak{D}\left[\sum_{i=1}^{n} c_i u_i\right]$ 等于 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i^2$, 由于只有有限多个本征值可以是负的, 所以当 n 增加时它恒大于一确定的下界. 因此 $\mathfrak{D}[\rho_n]$ 有上界.

由关系 (25) 及 λ_{n+1} 的无限增大有

$$\mathfrak{H}[f] - \sum_{i=1}^{n} c_i^2 = \mathfrak{H}[\rho_n] \to 0, \quad 当n \to \infty,$$

这就证明了完备性关系 (23), 所以也就证明了本征函数的完备性.

假如连续函数 f 不满足变分问题的可取条件, 我们可以用 f^* 来逼近它, f^* 满足可取条件并有 $\mathfrak{H}[f - f^*] < \varepsilon/4$, 然后我们用函数 $f_n^* = \sum_{i=1}^{n} c_i^* u_i$ 来逼近 f^* 使有 $\mathfrak{H}[f^* - f_n^*] < \varepsilon/4$. 于是由于

$$\mathfrak{H}[f - f_n^*] = \mathfrak{H}[f - f^*] + \mathfrak{H}[f^* - f_n^*] + 2\mathfrak{H}[f - f^*, f^* - f_n^*],$$

我们由施瓦茨不等式可得 $\mathfrak{H}[f-f_n^*]<\varepsilon$, 又由 ρ_n 的极小性可得 $\mathfrak{H}[\rho_n]<\varepsilon$. 这就在被逼近的函数只是连续的假定下证明了本征函数组的完备性定理.

变分问题的解所作成的函数组是完备的, 这就说明这些解就是相应的微分方程问题中本征函数的全体 (见第 5 章中所常用的论证, 例如见 5.5.4 小节).

由完备性关系 (23), 我们很容易推出对两个函数 f 和 g 而言更一般的完备性关系:

$$\mathfrak{H}[f,g]=\sum_{i=1}^{\infty}\mathfrak{H}[f,u_i]\mathfrak{H}[g,u_i]. \tag{23a}$$

稍作讨论, 在关系 (23) 之外还可以得到补充关系

$$\mathfrak{D}[f]=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i c_i^2, \tag{23b}$$

此处设 $\mathfrak{D}[f]$ 有限. 证明如下:

我们假定有连续函数 $L[f]=g$ 存在, 而 $\mathfrak{H}[g]$ 有限. 于是用格林公式, 我们可写出

$$\mathfrak{D}[f]=-\mathfrak{H}[f,g].$$

对内积 $\mathfrak{H}[f,g]$ 应用完备性关系 (23a), 我们得到

$$\mathfrak{H}[f,g]=\sum_{i=1}^{\infty}\mathfrak{H}[f,u_i]\mathfrak{H}[g,u_i],$$

由格林公式、公式 (23a) 以及 $L[u_i]=-\lambda_i u_i$ 立刻可得

$$\mathfrak{H}[g,u_i]=\mathfrak{H}[f,L[u_i]]=-\lambda_i\mathfrak{H}[f,u_i].$$

由于 $\mathfrak{H}[f,u_i]=c_i$, (23b) 得证.

假如 $L[f]=g$ 不满足上述假定, 我们可适当地作 f 的逼近来得出这结果; 用的方法和在证明 (23) 时所用的类似.

6.3.2 展开定理

在一个自变数的情形, 不难由我们的结果导出任意函数用本征函数展开的定理, 它补充了完备性定理. 在推导时我们所作的假定可以比第 5 章中所作的弱得多. 我们将证明: *每一个满足变分本征值问题中可取条件的函数 $f(x)$ 皆可用本征函数展为一绝对并一致收敛的极数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n u_n$.*

因为有正交规一组 $\sqrt{\rho}u_n$ 的完备性, 我们只须证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n u_n\Big($其中$c_n=$

$\left.\int_0^\pi \rho f u_n dx\right)$ 一致收敛 (见第 2 章 2.5 节). 证时我们仍考虑函数 $\rho_n = f - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu u_\nu$. 和前面一样, 可看出有

$$\mathfrak{D}[\rho_n] = \mathfrak{D}[f] - \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^2 \lambda_\nu.$$

当 n 充分大时, 例如 $n \geqslant N$, 我们有 $\lambda_{n+1} \geqslant 0$, 因此 $\mathfrak{D}[\rho_n] \geqslant 0$. 于是级数 $\sum_{\nu=1}^{\infty} c^2\nu\lambda_n$ 收敛, 因为当 $\nu > N$ 时它的项是非负的. 由施瓦茨不等式有

$$\left(\sum_{n=h}^{k} c_n u_n(x)\right)^2 \leqslant \sum_{n=h}^{k} c_n^2 \lambda_n \sum_{n=h}^{k} \frac{u_n^2(x)}{\lambda_n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \lambda_n \sum_{n=h}^{\infty} \frac{u_n^2(x)}{\lambda_n}.$$

现在由第 5 章 5.11.3 小节我们知道 $|u_n(x)| < C$, 其中 C 为一不依赖于 n 的常数. 因为由 6.2.2 小节和 6.2.3 小节知 λ_n/n^2 有正的上下界, 又 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ 收敛, 故当 h 和 k 充分大时 $\sum_{n=h}^{k} u_n^2(x)/\lambda_n$ 可对 x 一致地为任意小, 因此 $\sum_{n=h}^{k} |c_n u_n(x)|$ 也是如此. 这就说明了上面的级数绝对并一致收敛, 因而完成了展开定理的证明.

即使在有奇点出现的情形, 我们的结果还是成立的, 例如在勒让德和贝塞尔本征函数的情形就是如此. 可是这时候只在我们从区域中除去奇点的一任意小的邻域后, 展开定理的证明方始成立, 因为我们并没有证明规一化本征函数在这邻域中的有界性.

6.3.3 展开定理的推广

施图姆–刘维尔本征函数的渐近式 (第 5 章 5.11.5 小节) 使我们能推广刚才证明的展开定理. 事实上, 我们可以证明定理: *每一个定义在基本区域上, 具有平方可积*[1]*一阶微商并且分段连续的函数可以展为一本征函数级数, 这个级数在所有不包含间断点的子区域上绝对并一致收敛; 在间断点上 (和傅里叶级数一样) 它表示左右极限的算术平均* (需要说明在这定理中不要求所展的函数满足边界条件).

像在 6.2.3 小节中一样, 我们假定微分方程可写为 (18) 的形式

$$z'' - rz + \lambda z = 0,$$

函数 $z(t)$ 定义在区间 $0 \leqslant t \leqslant l$ 上. 然后我们考虑级数

$$G(t,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n(t) z_n'(\tau)}{\lambda_n},$$

1) 我们说微商平方可积, 假如在基本区域中使函数为连续的各区间上这微商平方的积分有界.

其中 z_n 表示上述微分方程在边界条件 (例如) $z=0$ 之下的第 n 个本征函数.

应用第 5 章的渐近公式 (70) 和 (71) 以及公式 (19), 就有

$$G(t,\tau)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\frac{\pi}{l}t\cos n\frac{\pi}{l}\tau}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(t,\tau),$$

其中 $\psi_n(t,\tau)=O(1/n^2)$, 因此 $G(t,\tau)$ 和

$$\begin{aligned}G^*(t,\tau)&=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\frac{\pi}{l}t\cos n\frac{\pi}{l}\tau}{n}\\&=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sin n\frac{\pi}{l}(t+\tau)+\sin n\frac{\pi}{l}(t-\tau)\right)\end{aligned}$$

只差一个绝对并一致收敛的级数.

我们在第 2 章 2.5.1 小节中看到, G^* 的级数有下述性质: 对固定的 $\tau(0<\tau\leqslant l)$ 它对满足条件 $|t+\tau|>\varepsilon,|t-\tau|>\varepsilon(\varepsilon>0)$ 的闭区间中所有的 t 绝对并一致收敛. 因为 $\tau>0,t>0$, 这就说明该区间不能包含 $t=\tau$ 这一点. 所以虽然当 $t\neq\tau$ 时这个级数表示一连续函数, 可是在 $t=\tau$ 它的和有一有限跳跃, 而且在这一点上 (又是由第 2 章 2.5 节) 它等于左右极限的算术平均.

设给出满足定理中条件的任一函数, 我们给它加上一个适当的和

$$\sum_i a_iG(t,\tau_i)$$

而把间断点除去, (假如必要) 我们取这和满足边界条件. 现在我们得到一个函数, 它满足本节第 2 小节中已证明的一般展开定理的条件; 所以这个函数可展为一绝对并一致收敛的本征函数级数. 可是, 我们刚才看到, 加上去的和本身可表为一本征函数的级数, 它具有推广的展开定理中所叙述的性质; 因此我们就对微分方程 (18) 的本征函数组证明了推广的展开定理. 假如我们由变数 z,t 变换回 y,x, 则所讨论的微分方程变换回一般的施图姆–刘维尔型方程, 我们立刻得到有关原微分方程的本征函数 $y_n(x)$ 的展开定理 —— 因为除了常因子外, 这些本征函数可由本征函数 z_n 乘同一个无处为零的函数得出.

6.4 本征值的渐近分布

6.2.2 小节和 6.2.3 小节中用于一个自变数的方法也可以用来研究在多个自变数的情形第 n 个本征值的渐近行为. 我们得到的是一个对物理问题有意义的结果: **常系数微分方程的本征值的渐近行为不依赖于区域的形状而依赖于其大小.**

6.4.1　在矩形上的方程

$\Delta u+\lambda u=0$. 当区域为以 a 和 b 为边长的矩形时, $\Delta u+\lambda u=0$ 的本征值和本征函数都可以写出来 (见第 5 章 5.5.4 小节). 事实上, 当边界条件为 $u=0$ 时, 它们可由下列式子 —— 在差一个规一化因子的限度内 —— 给出:

$$\sin\frac{l\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b},\quad \pi^2\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)\quad (l,m=1,2,3,\cdots),$$

在边界条件为 $\partial u/\partial n=0$ 时则为

$$\cos\frac{l\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b},\quad \pi^2\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)\quad (l,m=0,1,2,3,\cdots).$$

假如在第一种情形把小于一界限 λ 的本征值的个数表为 $A(\lambda)$, 在第二种情形表为 $B(\lambda)$, 则 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 等于不等式

$$\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\leqslant\frac{\lambda}{\pi^2}$$

的整数解的个数; 在这里当边界条件为 $u=0$ 时 $l>0,m>0$, 当边界条件为 $\partial u/\partial n=0$, 则 $l\geqslant 0,m\geqslant 0$. 当 λ 很大时可以导出所要求的数 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 的简单的*渐近表示式*. 例如, $B(\lambda)$ 正好就等于在第一象限 $x\geqslant 0,y\geqslant 0$ 内椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{\lambda}{\pi^2}$$

所形成的扇形中具有整数坐标的格点个数. 当 λ 充分大时这扇形的面积和它所包含的格点个数的比可以和 1 任意接近. 假如把在每一格点右上方的单位正方形和它相联系, 则由这些正方形所作成的区域包含椭圆扇形; 可是假如我们略去椭圆所通过的那些方块 —— 令其个数为 $R(\lambda)$—— 则所剩下的区域完全包含在椭圆扇形内. 所以在诸面积之间我们有不等式

$$B(\lambda)-R(\lambda)\leqslant\lambda\frac{ab}{4\pi}\leqslant B(\lambda).$$

在边界上相邻二方形中所包含的椭圆弧长, 当 λ 充分大时, 至少等于 1. 因此 $R(\lambda)-1$ 最多等于四分之一椭圆弧长的两倍, 而后者之增加正比于 $\sqrt{\lambda}$. 因此我们就得到渐近公式

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{B(\lambda)}{\lambda}=\frac{ab}{4\pi}$$

或者

$$B(\lambda)\sim\lambda\frac{ab}{4\pi}.$$

更精确些, 我们有

$$B(\lambda)=\frac{ab}{4\pi}\lambda+\theta c\sqrt{\lambda},$$

其中 c 是不依赖于 λ 的常数, $|\theta|<1$. 这个公式对所考虑的两种边界条件皆成立; 也就是说, 它对 $A(\lambda)$ 也成立, 因为在椭圆扇形的直线段边界上格点的个数渐近地等于 $(a+b)\sqrt(\lambda)/\pi$. 假如按本征值的大小把它们写成一序列 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$, 我们只要令 $A(\lambda_n)=n$ 及 $B(\lambda_n)=n$ 就可渐近地算出第 n 个本征值的大小. 我们有

$$\lambda_n\sim\frac{4\pi}{ab}A(\lambda_n)\sim\frac{4\pi}{ab}n$$

或者

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{n}=\frac{4\pi}{ab}.$$

6.4.2 在有限多个方形或立方体所作成的区域上的方程 $\Delta u+\lambda u=0$

我们现在在区域 G 上来考虑方程 $\Delta u+\lambda u=0$, G 可以分为有限多个边长为 a 的方形 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_h$, 例如 h 个 (或者在三维的情形则为立方体), 于是 G 的面积为 $f=ha^2$ (或体积为 $V=ha^3$).

像前面一样, 我们将用 θ 表示在 -1 和 $+1$ 之间的一个数, c 或 C 表示正常数. 当不会产生误解时, 我们将用同样的符号 θ, c 和 C 来表示不同的值而不用下标特别加以区分.

对由 h 个方形组成的区域 G, 令 $A(\lambda)$ 为在边界条件 $u=0$ 之下小于界限 λ 的本征值的个数, 而令 $B(\lambda)$ 为在边界条件 $\partial u/\partial n=0$ 之下相应的数字, 用 $A_{Q_1}(\lambda)$, $A_{Q_2}(\lambda)$, $\cdots$, $A_{Q_h}(\lambda)$ 表示对各方形子区域及边界条件 $u=0$ 而言小于 λ 的本征值个数, $B_{Q_1}(\lambda)$, $B_{Q_2}(\lambda)$, $\cdots$, $B_{Q_h}(\lambda)$ 表示边界条件为 $\partial u/\partial n=0$ 时的相应数字, 由本节第 1 小节我们有

$$A_{Q_i}(\lambda)=\frac{a^2}{4\pi}\lambda+\theta ca\sqrt{\lambda},\quad B_{Q_i}(\lambda)=\frac{a^2}{4\pi}\lambda+\theta' ca\sqrt{\lambda}\quad(i=1,2,\cdots,h).\tag{26}$$

将定理 5 和定理 2 及定理 4 结合 (见 6.2 节), 我们有 *

$$A_{Q_1}(\lambda)+\cdots+A_{Q_h}(\lambda)\leqslant A(\lambda)\leqslant B_{Q_1}(\lambda)+\cdots+B_{Q_h}(\lambda).$$

由于 $A_{Q_i}(\lambda)$, $B_{Q_i}(\lambda)$ 这些数具有方程 (26) 所给的形式, 我们可断定有

$$A(\lambda)=\frac{f}{4\pi}\lambda+\theta ca\sqrt{\lambda}.$$

换句话说, 以下定理成立:

---

* $A(\lambda)$ 在此处可代表在任意边界条件下小于 λ 的本征值个数.—— 译者

定理 12 在所考虑的各边界条件下, 微分方程 $\Delta u+\lambda u=0$ 对面积为 f 的方块区域而言小于界限 λ 的本征值的个数 $A(\lambda)$ 渐近地等于 $f\lambda/4\pi$, 也就是说

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{A(\lambda)}{f\lambda}=\frac{1}{4\pi}. \tag{27}$$

说得更精确一些, 对充分大的 λ 而方, 关系

$$\left|\frac{4\pi A(\lambda)}{f\lambda}-1\right|<\frac{C}{\sqrt{\lambda}} \tag{28}$$

成立, 其中 C 为不依赖于 λ 的常数.

假如 ρ_n 表示相应于所讨论的某一种边界条件的第 n 个本征值, 上述定理或关系 (28) 就相当于方程

$$\rho_n=\frac{4\pi}{f}n+\theta c\sqrt{n}, \tag{29}$$

其中仍旧有 $-1\leqslant\theta\leqslant 1$, c 为不依赖于 n 的常数. 为了看出这一点, 我们只要在 (28) 中令 $A(\rho_n)=n$.

即使边界条件 $\partial u/\partial n+\sigma u=0$ 中的函数 σ 取负值, 定理 12 还是对的. 这仍旧可利用 6.2.5 小节中的讨论证明. 首先注意, 按定理 5, 在边界条件 $\partial u/\partial n+\sigma u=0$ 下的第 n 个本征值 μ_n 当然不会大于相应于边界条件 $u=0$ 的第 n 个本征值 λ_n. 因此我们一开始就可以假定式子

$$\mathfrak{D}[\varphi]=D[\varphi]+\int_\Gamma p\sigma\varphi^2ds$$

(其极大–极小值显然为 μ_n) 对变分问题的任一个比较函数 φ 而言皆不超过界限 λ_n; 这样, 极大–极小问题的解不会有所改变.

现在由 6.2.5 小节我们有

$$\left|\int_\Gamma p\sigma\varphi^2ds\right|<c_1\sqrt{|D[\varphi]|}+c_2,$$

其中 c_1,c_2 为常数; 因此我们有

$$D[\varphi]-c_1\sqrt{|D[\varphi]|}-c_2<\mathfrak{D}[\varphi]<D[\varphi]+c_1\sqrt{|D[\varphi]|}+c_2.$$

由 $\mathfrak{D}[\varphi]\leqslant\lambda_n$ 的假定可得

$$D[\varphi]-G_1\sqrt{|D[\varphi]|}-c_2<\lambda_n,$$

这就说明当 n 增大时 $D[\varphi]$ 不可能增加得比 λ_n 快, 或者换句话说, 必须有关系

$$D[\varphi]<c_3\lambda_n$$

成立, 其中 c_3 也表示常数. 由于关系 (29) 对 $\rho_n = \lambda_n$ 成立, 在对 φ 所作的假定下我们有

$$D[\varphi] - c_4\sqrt{n} \leqslant \mathfrak{D}[\varphi] \leqslant D[\varphi] + c_4\sqrt{n};$$

当函数 $v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}$ 给定时, 这个关系对式子 $\mathfrak{D}[\varphi]$ 的下界而言成立, 因此对这些下界的极大也成立. $D[\varphi]$ 的极大–极小就是对边界条件 $\partial u/\partial n = 0$ 而言的第 n 个本征值, 对这些本征值说来关系 (29) 已证明. 所以对 $\mathfrak{D}[\varphi]$ 的下界的极大立刻可得 (29) 式, 也就是说对以 $\partial u/\partial n + \sigma u = 0$ 为边界条件的第 n 个本征值 μ_n 而言 (29) 式成立; 这个关系就相当于定理 12 的论断.

假如自变数不是两个而是三个, 则除去小于界限 λ 的本征值个数 A_{Q_i} 和 B_{Q_i}(边界条件依次为 $u = 0, \partial u/\partial n = 0$) 的表示式外, 前面其他的讨论保持不变. 事实上, 我们有

$$A_{Q_i}(\lambda) = \frac{1}{6\pi^2}a^3\lambda^{3/2} + \theta ca^2\lambda, \ \ B_{Q_i}(\lambda) = \frac{1}{6\pi^2}a^3\lambda^{3/2} + \theta ca^2\lambda \tag{26a}$$

并可得

定理 13 对由有限多 k 个同样立方体所作成的体积为 V 的多面体而言, 我们来考虑微分方程 $\Delta u + \lambda u = 0$. 在所讨论的各种边界条件下, 小于界限 λ 的本征值的个数 $A(\lambda)$ 渐近地等于 $V\lambda^{3/2}/6\pi^2$, 也就是说,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{A(\lambda)}{V\lambda^{3/2}} = \frac{1}{6\pi^2}. \tag{27a}$$

说得更精确些, 对充分大的 λ 我们有公式

$$\left|\frac{6\pi^2 A(\lambda)}{V\lambda^{3/2}} - 1\right| < C\frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \tag{28a}$$

其中 C 为不依赖于 λ 的常数[1].

6.4.3 把结果推广于一般的微分方程 $L[u] + \lambda\rho u = 0$

下一步我们要把定理 13 推广于一般的自伴微分方程 (1). 我们假定, 逐次二等分边长 a, 已把区域 G 重新分细为一些方块或立方体, 使得在所得的每一子区域上, 函数 p 及 ρ 的最大值和最小值的差恒小于一给定的小正数 ε. 函数 q 根本不会影响本征值的渐近分布, 因为式子 $\mathfrak{D}[\varphi]$ 以及它的极大–极小只会因为有 q 而改变一个有界的量, 一个小于 $|q_M|/\rho_m$ 的量, 此处 q_M 和 ρ_m 具有和前面同样的意义. 因此, 我们可令 $q = 0$ 而不影响本征值的渐近分布.

我们现在来考虑有限多个方形组成的一个区域 G. 令方形的个数为 h, 其边长为 a. 我们将用 $A'(\lambda)$ 来表示对区域 G 而言微分方程 $L[u] + \lambda\rho u = 0$ 的小于界限

1) 在 $A(\lambda)$ 的渐近式中, 一般不可能得到更精确的误差估计, 因为无论在方形或立方体的情形, 误差的数量级都已达到所指出的程度.

λ 的本征值个数; 边界条件可以是上面考虑的任一种, 不过在用 $\partial u/\partial n+\sigma u=0$ 时必须作限制性的假定 $\sigma\geqslant 0$. 我们用 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_h$ 表示子方形区域, 联属于这些方形微分方程的小于界限 λ 的本征值个数则表为 $A'_{Q_1}(\lambda),A'_{Q_2}(\lambda),\cdots,A'_{Q_h}(\lambda)$(对边界条件 $u=0$) 以及 $B'_{Q_1}(\lambda),B'_{Q_2}(\lambda),\cdots,B'_{Q_h}(\lambda)$ (对边界条件 $\partial u/\partial n=0$). 由定理 2, 4 及 5 可得到

$$A'_{Q_1}(\lambda)+\cdots+A'_{Q_h}(\lambda)\leqslant A'(\lambda)\leqslant B'_{Q_1}(\lambda)+\cdots+B'_{Q_h}(\lambda). \tag{30}$$

定理 7 说明

$$A'_{Q_i}(\lambda)\geqslant\frac{\rho_m^{(i)}}{p_M^{(i)}}A_{Q_i}(\lambda),\quad B'_{Q_i}(\lambda)\leqslant\frac{\rho_M^{(i)}}{p_m^{(i)}}B_{Q_i}(\lambda),$$

其中我们依次用 $p_M^{(i)}$ 和 $\rho_M^{(i)}$ 表示在方形 Q_i 上相应函数的极大, 而且 $p_m^{(i)}$, $\rho_m^{(i)}$ 表示它们的极小; 对微分方程 $\Delta u+\lambda u=0$ 而言, 相应本征值的个数仍可由方程 (26) 给出 (见本节第 2 小节), 并表为 $A_{Q_i}(\lambda)$ 及 $B_{Q_i}(\lambda)$. 事实上, 在微分方程 (1) 中用 $p_M^{(i)}$ 代 $p,\rho_m^{(i)}$ 代 ρ 时, 由定理 7 可以看出每一个本征值皆变大 (或者至少不变小), 因此小于一固定 λ 的本征值个数减小 (或者至少不增多); 另一方面, 这时候微分方程 (1) 变为微分方程

$$\Delta u+\lambda\frac{\rho_m^{(i)}}{p_M^{(i)}}u=0,$$

其本征值为方程 $\Delta u+\lambda u=0$ 的本征值乘以因子 $p_M^{(i)}/\rho_m^{(i)}$, 故得上述第一个不等式. 当我们用 $p_m^{(i)}$ 代 $p,\rho_M^{(i)}$ 代 ρ 时, 相应的论证亦成立.

此外, 由于 ρ 和 p 为连续函数, 我们有

$$\iint_G\frac{\rho}{p}dxdy=a^2\sum_{i=1}^{h}\frac{\rho_m^{(i)}}{p_M^{(i)}}+\delta=a^2\sum_{i=1}^{h}\frac{\rho_M^{(i)}}{p_m^{(i)}}+\delta',$$

其中当原先的方形分割充分细, 也就是说, 取 a 充分小时, $|\delta|$ 和 $|\delta'|$ 二数可为任意小和在本节第 2 小节中一样, 我们应用 (30) 可得出

$$A(\lambda)=\frac{\lambda}{4\pi}\iint_G\frac{\rho}{p}dxdy+\lambda\delta''+\theta c\sqrt{\lambda},$$

其中 $|\delta''|$ 也为任意小量. 这个式子就相当于下述关于本征值的渐近分布的事实:

定理 14 对微分方程 $L[u]+\lambda\rho u=0$ 及方形区域 G 而言, 在我们所考虑的任一种边界条件下, 小于给定界限 λ 的本征值的个数 $A(\lambda)$ 渐近地等于

$$\frac{\lambda}{4\pi}\iint_G\frac{\rho}{p}dxdy;$$

换句话说, 有关系

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{A(\lambda)}{\lambda}=\frac{1}{4\pi}\iint_G\frac{\rho}{p}dxdy \tag{31}$$

成立.

像在本节第 2 小节中一样, 我们可以看出原先的假定 $\sigma \geqslant 0$ 是不必要的.

将同样的讨论用于三维空间可得

定理 15 对微分方程 $L[u]+\lambda\rho u=0$ 及立方区域 G 而言, 在所考虑的任一种边界条件下, 小于给定界限 λ 的本征值个数渐近地等于

$$\frac{1}{6\pi^2}\lambda^{32}\iiint_G\left(\frac{\rho}{p}\right)^{3/2}dxdydz;$$

换句话说, 有关系

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{A(\lambda)}{\lambda^{3/2}}=\frac{1}{6\pi^2}\iiint_G\left(\frac{\rho}{p}\right)^{3/2}dxdydz \tag{32}$$

成立.

最后我们要提的是: 前两小节的论证也可以用于由有限多个矩形或正六面体所组成的较一般的区域.

6.4.4 对任意区域本征值的渐近分布

当边界条件为 $u=0$ 时, 很容易对任意区域 G 证明同样的渐近公式, 只要 G 可以由内并由外用仅由有限多个方形组成而且面积相差为任意小的特殊区域来逼近.

可是, 我们的目的是要立刻对任意区域 G 及所考虑的各种边界条件来得出渐近公式; 为此目的, 需要作较深刻的分析.

首先我们考虑边界曲线有连续曲率的平面区域 G 并只限于讨论微分方程 $\Delta u+\lambda u=0$.

我们先初步考查一下在边界条件 $\partial u/\partial n=0$ 之下联属于这微分方程的本征值: 对几种简单的区域来研究在一给定界限之下本征值的个数.

设 G 为以 a 为边长的等腰直角三角形. 这三角形的任一个本征函数都是在同样的边界条件 $\partial u/\partial n=0$ 之下一方形的本征函数, 这个方形系由三角形对斜边作反射而得出. 因为显而易见, 每一个本征函数都可以延拓到反射出的三角形中去, 只要在每一个反射点上令函数值等于它在原来点上的值; 这样作出的函数在整个方形的边界上满足边界条件 $\partial u/\partial n=0$. 所以三角形的第 n 个本征值也是方形的本征值; 因此方形的第 n 个本征值必然不大于三角形的第 n 个本征值. 换句话说, 在边界条件 $\partial u/\partial n=0$ 下, 对三角形而言, 小于一定界限本征值的个数最多等于对方形而言的相应数字, 也就是说, 最多等于公式 (26) 所给出的数字.

其次, 设 G 为边长为 a 和 b 的任意三角形, 其中我们假定 $b \leqslant a$. 设 a 边在 x 轴上, b 边在 y 轴上. 由变换 $\xi = x, \eta = ay/b$ 我们可将三角形 G 变为等腰直角三角形 G', 其边长等于 a. 式子 $D[\varphi]$ 于是变为

$$D[\varphi] = \iint_{G'} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{a^2}{b^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 \right] \frac{b}{a} d\xi d\eta,$$

附加条件 $H[\varphi] = 1$ 变为

$$\iint_{G'} \varphi^2 \frac{b}{a} d\xi d\eta = 1,$$

6.1.4 小节中的额外附加条件 $H[\varphi, v_i] = 0$ 则在此变换下保持其原有形式. 因此, 假如我们省去出现在两积分中无关紧要的常数因子 b/a, 我们可以把三角形的第 n 个本征值 κ_n 用积过 G' 的积分

$$\iint_{G'} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{a^2}{b^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\xi d\eta$$

的极大–极小来刻画, 极大–极小的意义如前. 由于 $a/b \geqslant 1$, 关系

$$\iint_{G'} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{a^2}{b^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\xi d\eta \geqslant \iint_{G'} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\xi d\eta.$$

成立, 所以左端的极大–极小至少和右端的一样大, 也就是说, 它至少和等腰三角形 G' 的第 n 个本征值一样大, 因此它更加大于以 a 为边长的方形的第 n 个本征值. 所以, **在边界条件 $\partial u/\partial n = 0$ 下, 对边长不大于 a 的直角三角形而言, 小于一给定界限的本征值的个数必然不大于对以 a 为边长的方形而言相应的本征值个数; 因此它不大于对任一更大的方形而言相应的本征值个数.**

同样, 对任意的矩形而言, 小于一定界限本征值的个数决不会大于对一方形而言的相应数字, 假设方形的边长至少等于矩形的大边之长.

这些结果和定理 4 结合, 说明当所讨论的区域系由有限多个矩形及直角三角形组成时, 我们有可能对小于一给定界限的本征值的个数得到一个上界.

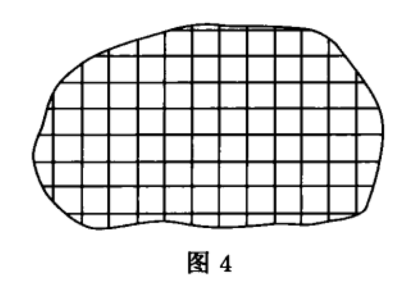


图 4

现在来考虑当我们用方形逼近区域 G 时, 剩下的边界条如何影响本征值的分布. 我们首先来定义边界条: 设方形的分割如此细, 使得在包含于任一方形内的 G 的边界线段上, 法线方向的变化小于一给定的角度 η, η 的大小将在后面来定 (重复将方形的边二等分可以办到这一点). 然后如图 4 所示, 我们可以按以下方式用边界 Γ 作出 r 个邻近的基本区域 $E_1, E_2, \cdots, E_r$: 任何一

个基本区域 E_i 或者由分割中二垂直的线段 AB, AC(其长度在 a 及 $3a$ 之间) 及边界线段 BC 围成 (见图 5), 或者由分割线段 AB, 二垂直于 AB 的线段 AC, BD(其长度在 a 和 $3a$ 之间) 以及边界线段 CD 所围成 (见图 6). 我们然后造由 r 个这样的区域所组成的边界条 S, 使得在 G 中除去这一边界条后所剩下的是一个包含 h 个方形 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_h$ 的方块区域 [1]. 显然 r 这个数小于常数 C/a, 其中 C 不依赖于 a 而主要依赖于边界的长.

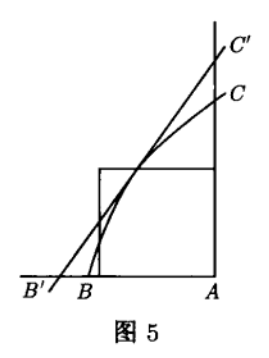


图 5

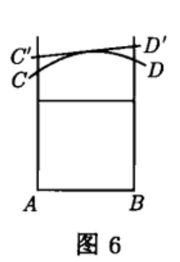


图 6

为要在边界条件 $\partial u/\partial n = 0$ 之下, 对区域 E_i 而言, 得到微分方程 $\Delta u + \lambda u = 0$ 小于一定界限 λ 的本征值个数 $B_{E_i}(\lambda)$ 的上界, 我们仍须求出第 n 个本征值的下界. 为此目的, 我们在 E_i 的曲线边界段上取任一点并画出过这一点的切线. 这条切线和 E_i 的直线边界段合在一起形成一 $AB'C'$ 型的区域 (图 5), 假如 η 充分小, 这是一个边长小于 $4a$ 的直角三角形; 或者形成一 $ABC'D'$ (见图 6) 型的梯形, 其边 AC', BD' 之长也小于 $4a$; 到底是那一种要看 E_i 所属的类型而定. 我们将用 E_i' 来表示区域 $AB'C'$ 和 $ABC'D'$. 用形如 (21) 的变换, 我们总可以使区域 E_i 变形为区域 E_i', 正如 6.2 节中所讨论的那样. 在区域为第一类型的情形, 令 A 为 ρ, θ 极坐标系的极点, 并令 $\rho = f(\theta)$ 为由线段 BC 的方程, $\rho = g(\theta)$ 为线段 $B'C'$ 的方程. 于是方程

$$\theta' = \theta, \quad \rho' = \rho \frac{g(\theta)}{f(\theta)}$$

表示一个变换, 它把曲线三角形 E_i 变为直角三角形 E_i'. 对第二类型的区域 $ABCD$ 而言, 令 AB 在 x 轴的方向, $y = g(x)$ 为线段 $C'D'$ 的方程, 并令 $y = f(x)$ 为曲线段 CD 的方程. 我们于是考虑变换

$$x' = x, \ y' = y \frac{g(x)}{f(x)}.$$

1) 我们让读者来造这个区域: 把边界曲线分为有限多段弧, 它们各属于三个类型. 在第一类弧上的切线和 x 轴作成的角最多等于 $30°$, 第二类弧上的和 y 轴做成的角最多等于 $30°$; 在第三类弧上的切线和这两条轴所作成的角皆不小于 $20°$. 第一类和第二类弧的端点依次具有有理的横标和纵标. 将方形分割 (上述有理端点皆在其边上) 得充分细, 就可以作出上文中的边界条.

如果我们假定基本区间 a 充分小, 则曲线段 CB 和 CD 上切线的总转动充分小, 于是这里所考虑的变换显然具有 (21) 的形式, 而且在 (21) 中用 ε 表示的量为任意小. 由定理 10 的系可得: 相应于区域 E_i 和 E_i' 的第 n 个本征值只差一个因子, 这个因子和 1 相差一个很小的量, 而且对 n 而言所差是一致的. 因此在边界条件 $\partial u/\partial n=0$ 下小于一界限 λ 的本征值个数 $B_{E_i}(\lambda)$ 和 $B_{E_i'}(\lambda)$ 之差也一致地小.

区域 E_i' 或者是边长小于 $4a$ 的直角三角形, 或者是这样一个三角形和边长小于 $3a$ 的矩形的组合; 由此可知, 当取 a 充分小时, 对 $\lambda>\lambda_0$ 而言 $B_{E_i}(\lambda)$ 满足不等式

$$B_{E_i}(\lambda)<c_1a^2\lambda+c_2a\sqrt{\lambda}, \tag{33}$$

其中 c_1, c_2 为适当选取的常数.

现在我们可以道出对区域 G 本征值的渐近分布的规律. 对我们所考虑的任一边界条件而言, 仍旧令 $A(\lambda)$ 表示微分方程 $\Delta u+\lambda u=0$ 的小于界限 λ 的本征值个数, 如果必要, 我们仍假定 $\sigma\geqslant 0$. 设我们已将平面分割为边长为 a 的方形, 由此将区域 G 分为 h 个方形 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_h$ 和 r 个边界区域 $E_1,E_2,\cdots,E_r$. 对方形 Q_i 而言, 小于 λ 的本征值个数仍记作 $A_i(\lambda)$(相应于边界条件 $u=0$) 及 $B_i(\lambda)$ (相应于边界条件 $\partial u/\partial n=0$). 对区域 E_i 而言的相应数字则依次记作 $A_{E_i}(\lambda)$ 和 $B_{E_i}(\lambda)$(我们将只用到 $B_{E_i}(\lambda)$ 这个数).

由方程 (26) 我们有

$$A_i(\lambda)=\frac{a^2}{4\pi}\lambda+a\theta_1c_1\sqrt{\lambda},\quad B_i(\lambda)=\frac{a^2}{4\pi}\lambda+a\theta_2c_2\sqrt{\lambda}$$

并且, 由 (33)

$$B_{E_i}(\lambda)=\theta_3(c_3\lambda a^2+ac_4\sqrt{\lambda}),$$

其中 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 表示 -1 和 $+1$ 之间的一些数, 而 c_1, c_2, c_3, c_4 为不依赖于 a, i 和 λ 的常数.

由定理 5, 2 及 4, 我们有

$$\begin{aligned}A_1(\lambda)+A_2(\lambda)+\cdots+A_h(\lambda)&\leqslant A(\lambda)\\&\leqslant B_1(\lambda)+\cdots+B_h(\lambda)+B_{E_1}(\lambda)+\cdots+B_{E_r}(\lambda);\end{aligned}$$

此外, 我们有

$$\begin{aligned}&A_1(\lambda)+\cdots+A_h(\lambda)=\frac{ha^2}{4\pi}\lambda+\theta_1c_1ha\sqrt{\lambda}=\lambda\left(\frac{ha^2}{4\pi}+\frac{\theta_1c_1ha}{\sqrt{\lambda}}\right),\\&B_1(\lambda)+\cdots+B_h(\lambda)+B_{E_1}(\lambda)+\cdots+B_{E_r}(\lambda)\\&\qquad=\frac{ha^2}{4\pi}\lambda+\theta_2c_2ha\sqrt{\lambda}+\theta_3ra^2\lambda c_3+\theta_3rac_4\sqrt{\lambda}\end{aligned}$$

$$=\lambda\left[\left(\frac{ha^2}{4\pi}+\theta_3c_3ra^2\right)+(ha\theta_2c_2+ra\theta_3c_4)\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right].$$

现在 $ar<c_5$; 所以当 a 充分小时, a^2r 为任意小而我们有

$$|ha^2-f|<\delta,$$

其中 δ 可任意小. 从这些不等式立刻可得渐近关系

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{4\pi A(\lambda)}{\lambda f}=1.$$

这是因为 a 这个量可任意选, 我们先选好一固定的充分小的 a, 然后使 λ 充分大时在上面的不等式中 λ 后的因子任意接近于数值 $f/4\pi$.

即使没有假定 $\sigma\geqslant 0$, 利用本节第 2 小节中在讨论类似问题时用过的论证, 我们可以得到同样的渐近公式. 总起来说, 我们有

定理 16 *在我们所考虑的任一种边界条件下, 对区域 G 而言微分方程 $\Delta u+\lambda u=0$ 的小于一界限 λ 的本征值个数 $A(\lambda)$ 渐近地等于 $\lambda f/4\pi$; 换句话说,*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{4\pi A(\lambda)}{\lambda f}=1,\tag{34}$$

其中 f 表示区域的面积.

在证明中, 我们先假定 G 的边界 Γ 没有棱角. 可是假如让它有有限多个棱角, 无论结果或论证基本上都保持不变.

假如我们不处理微分方程 $\Delta u+\lambda u=0$ 而处理较一般的方程 $L[u]+\lambda\rho u=0$, 前面的论证仍旧成立. 和在本节第 3 小节中一样, 我们有

定理 17 *在所考虑的任一边界条件下, 对 G 而言微分方程 $L[u]+\lambda\rho u=0$ 的小于一定界限 λ 的本征值个数 $A(\lambda)$ 渐近地等于 $\dfrac{\lambda}{4\pi}\iint_G\dfrac{\rho}{p}dxdy$; 换句话说,*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{A(\lambda)}{\lambda}=\frac{1}{4\pi}\iint_G\frac{\rho}{p}dxdy.$$

上面的讨论是对平面区域所作的, 类似的讨论可以使我们对空间的本征值问题得到以下结果:

定理 18 *在所考虑的任一种边界条件下, 对体积为 V 的空间区域而言, 微分方程 $\Delta u+\lambda u=0$ 的小于一确定 λ 的本征值个数 $A(\lambda)$ 渐近地等于 $\lambda^{3/2}V/6\pi^2$; 换句话说,*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{A(\lambda)}{\lambda^{3/2}V}=\frac{1}{6\pi^2}.\tag{35}$$

定理 19 *对较一般的微分方程 $L[u]+\lambda\rho u=0$ 而言, 相应的本征值个数渐近*

地等于 $\frac{\lambda^{3/2}}{6\pi^2}\iiint_G\left(\frac{\rho}{p}\right)^{3/2}dxdydz$; 换句话说,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{A(\lambda)}{\lambda^{3/2}}=\frac{1}{6\pi^2}\iiint_G\left(\frac{\rho}{p}\right)^{3/2}dxdydz. \tag{36}$$

在这里我们假定 G 的边界系由有限多块具有连续曲率的曲面无素所组成, 这些曲面元素互不相重, 可是可以形成一些棱边或顶点.

6.4.5　对微分方程 $\Delta u+\lambda u=0$ 而言本征值的渐近分布规律较精确的形式

对以渐近值代替式子 $A(\lambda)$ 时所引起的误差作估计, 我们可以更准确地表述本征值的渐近分布律; 我们只限于讨论微分方程 $\Delta u+\lambda u=0$.

我们只要用由方形或立方体组成的基本区域来逼近区域 G, 使得这些方形或立方体的数目既不过少也不过多. 首先, 令 G 为平面上的区域. 我们造一串逼近它的方形区域如下: 我们先将平面分割为一些方块, 每一个边长为 1, 并假定这些方块中的 h_0 个 $Q_1^0,Q_2^0,\cdots,Q_{h_0}^0$ 完全在 G 之内. 现在把平面上的每一方块再分为边长为 1/2 的四个同形的方块, 设其中的 h_1 个 $Q_1^1,Q_2^1,\cdots,Q_{h_1}^1$ 在 G 之内可是不在任一个方块 Q_i^0 之内. 这样继续作下去, 在 t 步之后我们得 h_t 个方块 $Q_1^t,Q_2^t,\cdots,Q_{h_t}^t$, 每一个的边长为 $1/2^t$, 它们都在 G 之内可是不在前面的任何一个方块内. 我们这样做下去, 使得在第 t 次近似后所剩下的边界条件为由 r 个前一小节所定义的子区域 $E_1,E_2,\cdots,E_r$ 所组成; 在这里 a 这个数等于 $1/2^t$.

由于我们对边界所作的假定, h_i 和 r 这些数满足关系

$$h_i<2^ic,\quad r<2^tc, \tag{37}$$

其中 c 为不依赖于 i 和 t 的常数, 它基本上决定于边界的长[1].

我们仍旧用 $A_m^i(\lambda)$ 和 $A_{E_m}(\lambda)$ 来表示对区域 Q_m^i 和 E_m 而言, 在边界条件 $u=0$ 下小于界限 λ 的本征值个数, 而用 $B_m^i(\lambda)$ 和 $B_{E_m}(\lambda)$ 来表示在边界条件 $\partial u/\partial u=0$ 下的相应数字. 假如边界条件 $\partial u/\partial n+\sigma u=0$ 中的函数 σ 为非负的, 由定理 2, 4 和 5 我们有

$$\begin{aligned}A(\lambda)\leqslant&(B_1^0+B_2^0+\cdots+B_{h_0}^0)+\cdots+(B_1^t+B_2^t+\cdots+B_{h_t}^t)\\&+(B_{E_1}+B_{E_2}+\cdots+B_{E_r}),\\A(\lambda)\geqslant&(A_1^0+A_2^0+\cdots+A_{h_0}^0)+\cdots+(A_1^t+A_2^t+\cdots+A_{h_t}^t).\end{aligned} \tag{38}$$

由 (26) 和 (33), 第一个不等式的右端等于

$$\frac{1}{4\pi}\left(h_0+\frac{h_1}{2^2}+\frac{h_2}{2^4}+\cdots+\frac{h_t}{2^{2t}}+\frac{r\theta c}{2^{2t}}\right)\lambda$$

1) 这些不等式说明: 逼近中方形区域的周长以及所剩边界条的周长皆不比 G 的周长有更高的数量级.

$$+\theta_1 c_2\left(h_0+\frac{h_1}{2}+\frac{h_2}{2^2}+\cdots+\frac{h_t}{2^t}+\frac{r}{2^t}\right)\sqrt{\lambda};$$

因为

$$h_0+\frac{h_1}{2^2}+\cdots+\frac{h_t}{2^{2t}}+\frac{r}{2^{2t}}=f-\theta_2 c_2\frac{r}{2^{2t}}$$

并且有 (37) 式成立, 右端这个式子为

$$\frac{1}{4\pi}\left(f+\frac{c\theta_3 c_3}{2^t}\right)\lambda+\theta_4 c_4(t+2)\sqrt{\lambda}$$

而我们得到当 t 充分大时成立的不等式

$$\begin{aligned}&(B_1^0+\cdots+B_{h_0}^0)+\cdots+(B_{E_1}+\cdots+B_{E_r})\\ \leqslant&\frac{f}{4\pi}\lambda+C\left(\frac{\lambda}{2^t}+t\sqrt{\lambda}\right),\end{aligned}\tag{39}$$

其中 C 如常表示一不依赖于 λ 和 t 的常数.

t 依然还是可以听凭我们处置的, 我们这样选它, 使得在括号中的两项尽可能地接近, 也就是说令 $t=$ 最大的整数 $\leqslant\log\lambda/\log 4$. 于是当 λ 充分大时, 由 (38) 和 (39) 我们就有

$$A(\lambda)\leqslant\frac{f}{4\pi}\lambda+C\sqrt{\lambda}\log\lambda.\tag{40}$$

对式子 $A(\lambda)$ 的下界, 我们可得形式完全同样的不等式, 而 C 是负的.

直到现在, 我们假定如果在边界条件中出现函数 σ, 它永远不会是负的. 可是, 本节第 2 小节的论证说明由于 6.2.5 小节的不等式 (20), 即使不加这个限制, 上述界限的形式如旧. 因此, 我们一般就得到较精确的渐近规律:

定理 20 *在上面所考虑的任何一种边界条件下, 当 $\lambda\to\infty$ 时, 差数 $A(\lambda)-f\lambda/4\pi$ 的数量级不大于 $\sqrt{\lambda}\log\lambda$.*

对三维的情形作同样的讨论, 就有

定理 21 *对区域体积为 V 的空间问题而言, 在上面所考虑的任一种边界条件下, 差数 $A(\lambda)-V\lambda^{3/2}/6\pi^2$ 当 $\lambda\to\infty$ 时的数量级不大于 $\lambda\log\lambda$.*

6.5 薛定谔型的本征值问题

在第 5 章 5.12 节中我们考虑了无限基本区域上的薛定谔本征值问题, 并研究了联属于它的谱的性质. 现在我们要从变分的观点来处理这个问题; 虽然结果并不完全, 这种处理的方法却是值是注意的. 不仅在薛定谔的问题中, 而且也在对无限区域的其他本征值问题中 (不能用分离变数解的问题), 我们将发现其谱包含离散的负本征值的一个可数无限增序列 (它也包含一“连续部分”).

设本征值方程为

$$\Delta u + Vu + \lambda u = 0, \tag{41}$$

附加条件为函数 $u(x,y,z)$ 在无穷保持有限. 我们假定函数 $V(x,y,z)$—— 势能符号 —— 在整个空间为正并按以下不等式在无穷变为零 (对充分大的 r 成立):

$$\frac{A}{r^\alpha} < V < \frac{B}{r^\beta}, \tag{42}$$

其中 A 和 B 为正常数, r 的指数满足关系

$$0 < \beta \leqslant \alpha < 2.$$

此外, 我们允许 V 在原点变为无穷 [1], 其数量级不大于 C/r^r, 其中 $0 \leqslant r < 2; r$ 表示由原点到点 (x,y,z) 的距离.

假如 $\int \cdots dg$ 表示在整个 x,y,z 空间上的积分, 则导致本征值 λ_n 及本征函数 u_n 的变分问题可用通常的符号写出如下:

$$J[\varphi] = \int (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 - V\varphi^2)dg = \text{极大–极小}, \tag{43}$$

附加条件为

$$\int \varphi^2 dg = 1, \tag{44}$$

$$\int \varphi v_\nu dg = 0 \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n-1).$$

在这里假定 $\varphi(x,y,z)$ 以及其一级微商连续并在整个空间平方可积. 我们还假定 $\int V\varphi^2 dg$ 存在; 和从前一样, $v_1, v_2 \cdots, v_{n-1}$ 表示分段连续的函数.

我们首先证明这个变分问题具有意义, 或者换句话说, 在所给条件下, 积分 $J[\varphi]$ 有下界. 证明时只须注意关系

$$V \leqslant \frac{a}{r^2} + b$$

到处成立; 其中选正常数 b 充分大, 我们可取正常数 a 为任意小. 由此可得

$$\int V\varphi^2 dg \leqslant a \int \frac{1}{r^2}\varphi^2 dg + b \int \varphi^2 dg. \tag{45}$$

现在我们要应用到积分不等式

$$\int \frac{1}{r^2}\varphi^2 dg \leqslant 4 \int (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) dg, \tag{46}$$

1) 当 V 按这种方式在有限多个点上不正规, 以下的讨论仍旧可用.

因此先来证明这个不等式. 作变换 $\psi = \varphi\sqrt{r}$ 可得

$$\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 = \frac{1}{r}(\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2) - \frac{1}{r^2}\psi\psi_r + \frac{1}{4r^3}\psi^2,$$

所以

$$\int(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2)dg \geqslant -\int \frac{1}{2r^2}(\psi^2)_r dg + \frac{1}{4}\int \frac{1}{r^3}\psi^2 dg.$$

右边的第一项可以明晰积出; 因为按假定 $\int \varphi^2 dg$ 存在. 积出后的值为零 [1]. 这样我们就得到所要证的不等式.

利用这个不等式, 我们可由 (45) 得到

$$J[\varphi] \geqslant (1-4a)\int(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2)dg - b,$$

假如我们取 $a < \frac{1}{4}$ (可以这样做), 我们就有

$$J[\varphi] \geqslant -b,$$

这就证明了 $J[\varphi]$ 有下界, 也就是 (41) 的本征值有下界.

为了要得出本征值的上界, 我们加强变分问题中的可取条件, 再要求 φ 在一以原点为心 R 为半径的球 K_R 外恒等于零. 按照一般的原理, 这样得出的对球 K_R 的问题中的第 n 个本征值 $\nu_n(R)$ 满足不等式 $\nu_n(R) \geqslant \lambda_n$. 另一方面, $\nu_n(R)$ 又很容易用微分方程 $\Delta u + \mu u = 0$ 在零边界条件下对球 K_R 的本征值 $\mu_n(R)$ 来估计. 事实上, 由假设 (42) 我们在 K_R 上有 $V \geqslant A/R^\alpha$(R 充分大), 而

$$\int_{K_R}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 - V\varphi^2)dg \leqslant \int_{K_R}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2)dg - \frac{A}{R^\alpha}\int_{K_R}\varphi^2 dg.$$

因此立刻可得

$$\nu_n(R) \leqslant \mu_n(R) - \frac{A}{R^\alpha}.$$

可是 $\mu_n(R) = \mu_N(1)/R^2$, 其中 $\mu_n(1)$ 为对单位球的本征值, 我们就得到

$$\lambda_n \leqslant \frac{\mu_n(1)}{R^2} - \frac{A}{R^\alpha}.$$

由于 $\alpha < 2$, 给定 n 取 R 充分大时上式右端为负.

这样, 就证明了我们的变分问题给出一串单调非减的负本征值.

---

1) 事实上, 必存在一串值 $R_1, R_2, \cdots, R_n, \cdots$ 使得积分 $\frac{1}{R_n}\int \varphi^2 ds$——积过以 R_n 为半径的球面——当 R_n 趋于无穷时为零. 我们先在这些球上积分, 然后取极限让球趋于无穷.

为了证明当 n 增加时, 这些本征值趋于零, 我们可以利用相应于 $V=c/r$ 的特殊的薛定谔问题的本征值 k_n 来估计它们, 这个方程的本征值已明晰解出, 按第 5 章 5.12.4 小节我们知道 k_n 趋于零. 我们只须指出有不等式 $V\leqslant a/r^2+b/r+k$ 成立, 其中取 b 充分大时正常数 a 和 k 可取为任意小. 这样, 利用关系 (46), 我们显然有

$$\lambda_n\geqslant(1-4a)k_n-k,$$

只要令 $c=b/(1-4a)$. 由此可得, 当 n 增大时本征值 λ_n 总会超过 $-2k$ 这个值; 因为 k 可以取得任意小, 所以 λ_n 收敛于零.

有正本征值的连续谱出现是可以想象的, 要看出这一点, 我们只要把无限区域的本征值问题看作有限区域上本征值问题的极限情形, 例如可考虑球 K_R 而令 R 增大. 事实上, 当 R 增大时, K_R 的第 n 个本征值 $\nu_n(R)$ 单调下降, 可以证明它趋近于无限区域的第 n 个本征值 λ_n. 每一个正数则都是本征值 $\nu_n(R)$ 的极限点; 因为在有限区域的情形, 存在任意大的本征值 $\nu_n(R)$, 假如我们令 n 按一适当的方式随 R 增大, 我们可以使 $\nu_n(R)$ 逼近任一正数.

我们还可以用另一方法来证明本征值*以零为极限点*, 这个方法和用来证明有限区域的本征值趋于无穷的方法类似. 这里不需要预先知道特殊问题的明晰解.

假如本征值具有一确定负上界, 我们可以造一串函数 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_v,\cdots$ 对它们说来有 (a) 积分 $D[\varphi]=\int(\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2)dg$ 及 $H(\varphi)=\int\varphi^2dg$ 保持小于一确定上界; (b) 积分 $F[\varphi]=\int V\varphi^2dg$ 恒大于一确定的正下界; (c) 正交关系 $F[\varphi_\nu,\varphi_\mu]=0(v\neq\mu)$ 成立. 利用下面证明的一条引理, 由性质 (a) 可以看出我们能从函数 φ_ν 中选出一子序列 φ_{ν_n}, 它具有性质 $F[\varphi_{v_n}-\varphi_{v_m}]\to 0$(当 $n,m\to\infty$). 可是由于 $F[\varphi_{v_n},\varphi_{v_m}]=0$, 这就说明可推出关系 $F[\varphi_{v_n}]+F[\varphi_{v_m}]\to 0$, 这和性质 (e) 矛盾.

函数序列 φ_v 可如下作出: 我们从上述变分问题 (43) 开始, 它给出了第一个本征值 λ_1. 我们可以求一个函数 φ_1, 使得

$$J[\varphi_1]=D[\varphi_1]-F[\varphi_1]\leqslant\lambda_1+\varepsilon\quad(\varepsilon>0)$$

和

$$H[\varphi_1]=1$$

这两个关系成立. 现在回到变分问题 (43), (44), 它给出第二个本征值 λ_2; 假如取附加条件为

$$\int V\varphi\varphi_1dg=F[\varphi,\varphi_1]=0,$$

我们所得到的极小值必然不大于 λ_2(由极大–极小的性质). 因此就可以找到一个函数 φ_2, 使得

$$D[\varphi_2] - F[\varphi_2] \leqslant \lambda_2 + \varepsilon,$$

而同时有

$$H[\varphi_2] = 1, \quad F[\varphi_1, \varphi_2] = 0.$$

这样继续下去, 我们得到一串函数 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_v, \cdots$, 对这些函数说来有

$$D[\varphi_v] - F[\varphi_v] \leqslant \lambda_v + \varepsilon, H[\varphi_v] = 1, F[\varphi_\mu, \varphi_v] = 0$$
$$(\mu = 1, 2, \cdots, v-1).$$

现在假如所有的数 λ_v 都小于一界限 -2ε, 则所有这些函数都将满足不等式

$$D[\varphi_v] - F[\varphi_v] \leqslant -\varepsilon. \tag{47}$$

由这个不等式, 首先可得 $D[\varphi_v]$ 有界; 因为由 (45), (46) 我们有

$$F[\varphi] \leqslant 4aD[\varphi] + bH[\varphi],$$

所以

$$(1-4a)D[\varphi_v] \leqslant b.$$

另一方面, (47) 说明 $F[\varphi_v] \geqslant \varepsilon$. 这就证明了函数 φ_v 的确具有我们所要求的性质.

剩下来是要证明上面叙述的引理: 给了一串函数 φ_v, 对它们说来 $D[\varphi]$ 和 $H[\varphi]$ 有界, 我们可以找到一个子序列 φ_{v_n}, 使得有关系

$$F[\varphi_{v_n} - \varphi_{v_m}] \to 0 \quad (n, m \to \infty)$$

成立.

这条定理是前面叙述的 Rellich 引理的推广 (6.2.2 小节), 就是这引理使我们能够证明有限区域的本征值趋于无穷. 现在我们限制自己只考虑函数 V 在原点为正规的情形 (假如在原点 V 为奇异, 其次数小于二, 则类似的估计也使我们能够得到所要的结果).

证明这引理时, 我们用半径为 R_i 的一串球 K_i 把无穷除外. 由先前的引理 (6.2.2 小节), 我们可以由函数 φ_v 选出一子序列 φ_{1n}, 对这子序列中的函数有 $F[\varphi_{1n} - \varphi_{1m}]$ 趋于零, 这里的积分只积过球 K_1 的内部. 由 φ_{1n} 这个序列我们又可以选一子序列 φ_{2n}, 使得积过球 K_2 的积分 $F[\varphi_{2n} - \varphi_{2m}]$ 趋于零. 这样作下去, 我们对每一个 i 都得到一个序列 φ_{in}, 由此可做出对角序列 φ_{nn}, 我们将用 φ_{v_n} 来表示它. 我们知道, 对这个序列说来, 积过任一球 K_i 的积分 $F[\varphi_{v_n} - \varphi_{v_m}]$ 趋于零. 为了证明当积分积过整个空间时同样的事实成立, 我们只要证明积过球 K_i 外部的积分恒小于一个不依赖于 n 和 m 的界限, 而当 R 无限增大时这个界限趋于零. 为此, 我们

注意当 R 充分大, $r \geqslant R$ 时我们假定有 (42): $V \leqslant B/r^\beta \leqslant B/R^\beta$, 因此积过半径为 R 的球外部的积分满足不等式

$$F[\varphi_{v_n} - \varphi_{v_m}] \leqslant \frac{B}{R^\beta} H[\varphi_{v_n} - \varphi_{v_m}] \leqslant \frac{4B}{R^\beta}.$$

这就证明了我们的论断.

6.6 本征函数的节

前面我们已对本征值的一般性质作了准确的论述; 可是要研究本征函数的一般性质却有较大的困难. 这是不足为奇的, 因为由本征值问题可定出大量不同的函数类. 在下一章中我们将研究几种特殊的情形, 而在这一节中我们只对本征函数作较为一般的探讨.

节, 也就是基本区域 G 中使某些本征函数取值为零的那些点, 是特别富有趣味的 (见第 5 章 5.5 节). 在处理一维、二维、三维的问题时, 我们依次采用名称*节点*、*节线*和*节面*; 一般说来, 我们用节这个名字 [1].

注意: 一本征值问题的第一个本征函数在基本区域的内部不可能有节 (证明可直接由下面所给的定理得出). 所以它在各处必须具有同样的符号, 因此和这第一个本征函数正交的*所有其他本征函数必须有节*.

关于节的位置和密度, 我们可以作一些一般的叙述. 例如, 试在边界条件 $u=0$ 下来考虑微分方程 $\Delta u + \lambda u = 0$. 假如 G' 是整个在 G 内而不包含 u_n 的节的一个区域, 我们来考虑在 G 中由函数 u_n 的节所限定并包含 G' 的最小子区域 G''. 对 G'' 这个区域说来, 函数 u_n 必定是第一个本征函数, λ_n 为最小本征值. 另一方面, 按照定理 3, G'' 的第一个本征值不能大于 G' 的第一个本征值 γ, 因此 $\gamma \geqslant \lambda_n$. 例如, 若 G' 为半径为 a 的圆, 则 $\gamma = \tau^2$, 其中 τ 为方程 $J_0(a\tau) = 0$ 最小的根. 因此我们有 $\gamma = k_{0,1}^2/a^2$, 其中如第 5 章 5.5 节所作, 我们用 $k_{0,1}$ 表示零阶贝塞尔函数的第一个零点. 所以我们得到 $a^2 \leqslant k_{0,1}^2/\lambda_n$; 这个关系告诉了我们节线网的密度, 一般我们不能希望知道得比这更多. 假如我们回想一下 6.4 节中的渐近关系 $\lambda_n \sim 4\pi n/f$, 我们可以看出假如 n 充分大, 凡面积大于 $k_{0,1}^2 f/4n$ 的每一个圆必定包含第 n 个本征函数的节线. 假如不考虑圆而考虑边长为 a 的方块, 我们得到相应的关系 $a^2 \leqslant 2\pi^2/\lambda_n$. 读者将可以对一个或多个变数的其他问题导出完全类似的结果.

此外, 我们可以证明以下关于本征函数的节的一般定理: *给了区域 G 上的自伴二阶微分方程 $L[u] + \lambda\rho u = 0 (\rho > 0)$, 以及任意齐次边界条件; 假如把它的本征*

1) 我们假定对所考虑的微分方程说来, 节是分段光滑的曲线或曲面, 它们把基本区域分为具有分段光滑的边界的一些子区域.

函数按本征值的增加而排列起来, 则第 n 个本征函数 u_n 的节把区域 G 分成的子区域的个数不大于 n. 在此对自变量的数目未作任何假定[1])

为简单计, 我们假定 G 是 x, y 平面上的区域, 边界条件则为 $u=0$. 令 λ_n 为第 n 个本征值, 也就是说, 它是在所给的边界条件, 以及附加条件

$$\iint_G \rho\varphi^2 dx\, dy = 1, \tag{48}$$

$$\iint_G \rho\varphi v_i\, dx\, dy = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1) \tag{49}$$

之下, 本征值问题中的积分 $D[\varphi]$ 的极大–极小.

我们假定相应本征函数 u_n 的节把区域 G 分为多于 n 个子区域 $G_1, G_2, \cdots, G_{n+1}, \cdots$, 并定义 n 个函数 $w_1, w_2, \cdots, w_n$, 使得 w_i 在子区域 G_i 内和 u_n 相同 (在差一个规一因子的限度内), 在 G_i 外为零, 而且

$$\iint_G \rho w_i^2 dx\, dy = 1.$$

假如我们作线性组合 $\varphi = c_1w_1 + c_2w_2 + \cdots + c_nw_n$, 并使它满足规一化条件

$$\iint_G \rho\varphi^2 dx\, dy = c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2 = 1,$$

分部积分, 我们立刻就可以看出 φ 满足方程

$$D[\varphi] = \lambda_n,$$

因为 w_i 满足 $L[w_i] + \lambda_n\rho w_i = 0$. 因为对任意给定的函数 v_i, 我们可以定系数 c_i 使得在 (48) 外 φ 还满足条件 (49), 所以同一个微分方程在边界条件 $u=0$ 之下对区域 $G' = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$ 的第 n 个本征值 λ'_n 不能大于 λ_n; 由 6.2.1 小节, 定理 2, 它又不能小于 λ_n, 因此它恰好等于 λ_n. 由定理 3, 由此可得, 对 G 中包含 G' 的每一个子区域 G'' 说来, 第 n 个本征值恰好等于 λ_n. 令 $u_n^{(1)}, u_n^{(2)}, \cdots, u_n^{(m)}$ 为对任意 m 个这样的区域 $G', G'', G''', \cdots, G^{(m)}$(每一个都包含它前面的区域) 按上述方式得出的本征函数. 假如把这些本征函数延拓到它相应的子区域之外去, 要求它们在这些子区域之外恒为零, 则它们作成了一组 m 个线性独立[2])的函数, 这些函数都是微分方程 $L[u_n^{(i)}] + \lambda_n\rho u_n^{(i)} = 0$ 在 G 上的解. 我们可以定出系数为 γ_i 的一线性组合

$$\varphi = \gamma_1 u_n^{(1)} + \cdots + \gamma_m u_n^{(m)},$$

1) 见 Courant. Ein allgemeiner Satz zur Theorie der Eigenfunktionen selbstadjungierter Differentialausdrücke.

2) 显然这些函数是线性独立的, 因为我们该记得 $u_n^{(h)}$ 不可能在任一 $G^{(h)}$ 的子区域中恒等于零. 这个事实, 在常微分方程的情形可由唯一性定理得出, 在偏微分方程的情形它是方程为椭圆型的后果, 在第 II 卷中我们还要回来讨论这个问题.

使它不到处为零, 而且满足 $m-1$ 个条件

$$\iint_G \rho\varphi v_i dxdy = 0 \quad (i=1,2,\cdots,m-1);$$

由于 φ 不能恒等于零 (因为 $u_n^{(i)}$ 线性独立), 我们可乘以适当的因子而把它按 (48) 规一化. 可是由于第 m 个本征值的极大–极小性质, 我们就必须有

$$D[\varphi] \geqslant \lambda_m.$$

另一方面, 分部积分可得

$$D[\varphi] = \lambda_n.$$

可是由于 $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k = \infty$, 当 m 充分大时我们有 $\lambda_m > \lambda_n$. 这样我们就得到一个矛盾, 它说明上面关于子区域 $G_1G_2,\cdots$ 的个数大于 n 的假定是不成立的. 无须多说, 这个证明对任意多个变数皆成立[1].

在施图姆–刘维尔型本征值问题 $(py')'-qy+\lambda\rho y=0$ 的特殊情形, 刚才证明的一般定理可以显著地改进: 我们还可以证明第 n 个本征函数的节点把基本区域分成的段数不大于 n; 这样我们就证明了定理: **施图姆–刘维尔型问题的第 n 个本征函数的节点把基本区域恰好分为 n 部分.** 通常我们用连续性的讨论来证明这一点, 以下是这种论证的大意.

为简单计, 我们只限于讨论微分方程 $y''+\lambda\rho y=0$. 我们用 $y(x,\lambda)$ 来表示方程这样的解, 它在 $x=0$ 为零并连续依赖于参数 λ; 我们有恒等式

$$y(x,\lambda_1)y'(x,y)-y(x,\lambda)y'(x,\lambda_1) = (\lambda_1-\lambda)\int_0^x \rho y(x,\lambda)y(x,\lambda_1)dx.$$

假如 $x=\xi$ 为 $y(x,\lambda)$ 的正零点, 则有

$$y(\xi,\lambda_1)y'(\xi,\lambda) = (\lambda_1-\lambda)\int_0^\xi \rho y(x,\lambda)y(x,\lambda_1)dx.$$

现在令 λ_1 大于 λ 并且和它这样接近使得上式右端的积分为正. 于是 $y(\xi,\lambda_1)$ 和 $y'(\xi,\lambda)$ 必须同号. 如果我们假定在 $x=\xi$ 函数 $y(x,\lambda)$ 的值由负变为正, 因此 $y'(\xi,\lambda)$ 为正 ——$y'(\xi,\lambda)$ 和 $y(\xi,\lambda)$ 不能同时为零 —— 则 $y(\xi,\lambda_1)$ 为正, 因为当 $\lambda_1-\lambda$ 充分小时 $y(x,\lambda_1)$ 和 $y(x,\lambda)$ 相差为任意小, 所以 $y(x,\lambda_1)$ 的值在 $x=\xi$ 的邻近必须由负变为正, 故有 $y(x,\lambda_1)$ 的一个零点在 ξ 之左[2] 而我们可以叙述: 当 λ 连续增

---

1) 可推广刚才证明的定理如下: 前 n 个本征函数的任一线性组合用其节把区域分成子区域的个数不大于 n. 见 Göttingen dissertation. H. Herrmann: Beiträge zur Theorie der Eigenwerte und Eigenfunktionen. 1932.

2) y 和 y' 不能在同一点为零的事实说明当 λ 增大时在 0 和 ξ 之间的零点个数既不能多出也不能消失.

大时, 函数 $y(x,\lambda)$ 所有的零点皆减小. 第一个本征函数仅在基本区域的两端具有零点. 当 λ 由第一个本征值变为第二个本征值时, 第二个零点由右向左移入区间之内, 并连续移动下去, 直到函数的第三个零点变为区间的端点, 其余可类推, 这样我们的定理显然成立 1).

我们之所以能证明这个事实是因为我们处理的是常微分方程. 在偏微分方程的本征值问题中, 可以存在任意大的数 n, 对它说来本征函数 u_n 的节只把整个基本区域分为两个子区域. 关于这一点, 在方块 $0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant \pi$ 上的方程 $\Delta u + \lambda u = 0$ 可给出一简单的例子 2). 这时候, 很容易看出属于本征值 $\lambda = 4r^2 + 1$ 的本征函数 $\sin 2rx \sin y + \mu \sin x \sin 2ry$(其中 μ 为充分接近 1 的正常数) 只具有一条节线. 图 7 和图 8 显示出了当 $r = 12$ 时如何由一组曲线的小变动而产生这些节线.

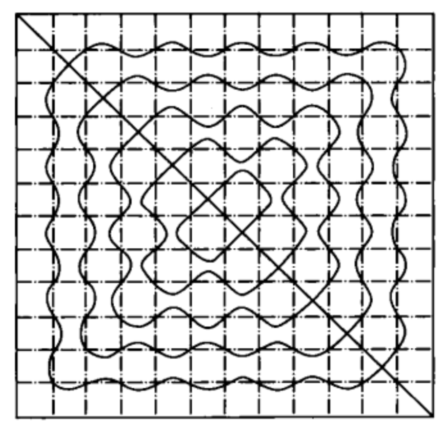


图 7

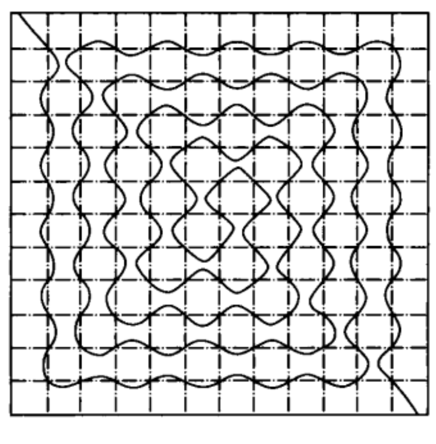


图 8

1) 我们可以避免利用连续性的方法而以下述定理为基础, 它不只限于在一个自变数的情形成立: 令 u 为 $L[u] + \lambda\rho u = 0$ 的一个解, 它在闭区域 B 上有二级连续的微商. 设 u 在 B 的边界 Γ 上为零, 在其内部不变号, 又设 v 是 $L[v] + \mu\rho v = 0$ (其中 $\mu > \lambda$) 的解, 则 v 在 B 中必须变号 (自然在这里我们把 u 和 v 在 B 内恒等于零的情形除外). 利用格林公式, 我们立刻可以证明这事实 (可以两个自变数的情形为例), 我们有

$$\iint_B (vL[u] - uL[v])dxdy = (\mu - \lambda)\iint_B \rho uvdxdy = \int_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial n}ds,$$

其中 $\partial/\partial n$ 表示外法向微商. 不失一般性, 我们可以假定 u 和 v 在 B 中取正值; 由于在 Γ 上我们有 $\partial u/\partial n \leqslant 0$, 上面方程中右边的式子为非正, 可是中间的式子当 v 在 B 中不变号时将为正. 故得矛盾.

假如我们把这个结果用于零边值的施图姆–刘维尔问题, 我们可以看出在两个本征函数中, 具有较多个零点的那个必须属于较大的本征值, 因为对零点较少的本征函数说来, 我们可以适当选它的两个零点而得出一区间, 使在这个区间之内必然包含另一本征函数某两个零点所决定的区间. 因为第一个本征函数没有零点在区间内, 所以第 n 个本征函数 (它不能有多于 $n-1$ 个零点) 必须在基本区间内有 $n-1$ 个零点.

2) 见 A. Stern. Bemerkungen über asymptotisches Verhalten von Eigenwerten und Eigenfunktionen. Göttingen: Dissertation, 1925.

6.7 补充材料和问题

6.7.1 本征值的极小性质、由完备性所作的推导

在我们的变分问题中所得到的本征函数的完备性会被用来证明它们组成了相应微分方程的解的全体. 反过来 (例如在三角函数和勒让德函数的情形), 我们也可以由微分方程本征值问题的解所做成的完备函数组出发. 我们将证明这样的函数组和用极值性质所定出的函数组相同. 我们假定所处理的微分方程为

$$L[u] + \lambda \rho u = 0,$$

基本区域为二维区域 G, 边界条件为 $u = 0$. 令该微分方程问题中的本征函数为 $u_1, u_2, \cdots$, 联属本征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$. 考虑在 G 中具有连续一级微商及分段连续二阶微商, 在边界 Γ 上为零, 并满足条件

$$\iint_G \rho \varphi^2 dxdy = 1, \tag{50}$$

$$\iint_G \rho \varphi u_i dxdy = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1) \tag{51}$$

的函数 φ. 我们现在来证明 φ 满足不等式

$$D[\varphi] \geqslant \lambda_n.$$

由于边界条件 $\varphi = 0$, 格林公式给出

$$D[\varphi] = -\iint_G \varphi L[\varphi] dxdy;$$

此外, 将完备性关系 (见公式 (23a)) 用于函数 φ 和 $L[\varphi]/\rho$, 可得出关系

$$D[\varphi] = -\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \iint_G u_i L[\varphi] dxdy, \tag{52}$$

其中

$$\gamma_i = \iint_G \rho \varphi u_i dxdy.$$

利用格林公式和关系 $L[u_i] = -\lambda_i \rho u_i$, 由 (52) 可得

$$D[\varphi] = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \gamma_i^2. \tag{53}$$

现在, 由于 (51) 说明

$$\gamma_i = 0, \quad 当 i = 1, 2, \cdots, n-1,$$

而由 (50) 以及完备性关系, 我们有

$$\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i^2 = 1,$$

所以立刻知道假如将 λ_i 按增加的次序排列, 我们有

$$D[\varphi] \geqslant \lambda_n.$$

此外, 前面已指出, 由简单的计算我们可以得到

$$D[u_n] = \lambda_n,$$

这就说明我们已经对函数类 φ 证明了第 n 个本征函数的极小性. 如果我们只假定函数 φ 为连续并有分段连续的一阶微商, 同样的讨论也能适用; 因为这样一类的函数以及其微商总可以用上面定义的那类函数中的某一个来近似, 而使得相应的积分 $D[\varphi]$ 相差一任意小的数量 (关于这一点可参看第 4 章 4.3.7 小节中的说明).

6.7.2 用没有节这个性质来刻画第一个本征函数

第一个本征函数的特性是它在基本区域内不为零. 现在我们将用雅可比所引进的一个重要的方法来证明这个性质刻画出了第一个本征函数 (乘数变分法).

我们限于考虑方程

$$\Delta u - qu + \lambda u = 0.$$

我们希望证明: 假如存在这方程的一个解 u, 它在区域 G 的边界 Γ 上为零, 但是在内部到处不为零, 则

$$\mathfrak{D}[\varphi] = \iint_G (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + q\varphi^2) dxdy \geqslant \lambda \iint_G \varphi^2 dxdy$$

对所有的可取函数 φ 成立, 而只当 $\varphi =$ 常数 $\times u$ 时等式成立. 我们假定每一个这种函数 φ 皆表为

$$\varphi = u\eta$$

的形式, 这是可能的, 因为 u 在 G 中不为零; 我们有

$$\mathfrak{D}[\psi] = \iint_G [u^2(\eta_x^2 + \eta_y^2) + 2uu_x\eta\eta_x + 2uu_y\eta\eta_y + (u_x^2 + u_y^2)\eta^2 + qu^2\eta^2] dxdy.$$

注意 $2\eta\eta_x = (\eta^2)_x, 2\eta\eta_y = (\eta^2)_y$, 并分部积分, 我们得到

$$\mathfrak{D}[\varphi] = \iint_G [u^2(\eta_x^2 + \eta_y^2) - u\Delta u\eta^2 + qu^2\eta^2] dxdy,$$

这是因为所有的边界上的积分为零. 利用 u 的微分方程, 我们有

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}[\varphi] &= \iint_G [u^2(\eta_x^2+\eta_y^2)+\lambda u^2\eta^2]dxdy \\ &\geqslant \lambda\iint_G u^2\eta^2 dxdy = \lambda\iint_G \varphi^2 dxdy,\end{aligned}$$

其中等号仅当 $\eta_x=\eta_y=0$ 时成立, 也就是 $\eta=$ 常数时成立, 命题得证.

6.7.3 本征值的另外一些极小性质

读者可以证明以下定理: 求积分式

$$D[v_1,v_2,\cdots,v_n]=\mathfrak{D}[v_1]+\mathfrak{D}[v_2]+\cdots+\mathfrak{D}[v_n]$$

的极小, 其中我们以所有在基本区域 G 内有分段连续的微商, 规一化并互相正交的一组 n 个函数为可取函数组; 则问题的解是 $v_i=u_i$, 或者由这些函数经过正交变换而得出的任一函数组, $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 表示区域 G 的前 n 个本征函数, $D[v_1,v_2,\cdots,v_n]$ 的极小值等于前 n 个本征值的和 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$.

我们还可以证明下述定理: 令 $v_1,v_2,\cdots,v_{n-1}$ 在 G 内连续, 并令 $d\{v_1,v_2,\cdots,v_{n-1}\}$ 为积分式 $\mathfrak{D}[\varphi]$ 的下界, 此处除了满足一般的连续性条件外, 还要求 φ 受限制于一个附加条件

$$\iint_G \rho\varphi^2 dxdy-\sum_{i=1}^{n-1}\left(\iint_G \rho\varphi v_i dxdy\right)^2=1.$$

于是第 n 个本征值 λ_n 等于 $d\{v_1,v_2,\cdots,v_{n-1}\}$ 的极大, 当 $v_1=u_1,v_2=u_2,\cdots,v_{n-1}=u_{n-1},\varphi=u_n$ 时 d 达到这个极大.

这种表述之所以有趣, 是因为它只用到一个二次附加条件而不要求 $n-1$ 个线性条件; 不过, 这种附加条件的形式是等周问题中所不常见的, 它是比较复杂的. 至于如何在二次型的初等情形叙述与此相应的极值问题, 我们留给读者去做.

本征值问题的另一种表述是在许多应用中很有用的, 我们将在边界条件 $u=0$ 下对微分方程 $\Delta u+\lambda u=0$ 加以叙述: 求

$$H[\varphi]=\iint_G \varphi^2 dxdy=\text{极小–极大},$$

附加条件为

$$\begin{aligned}D[\varphi] &= \iint_G (\varphi_x^2+\varphi_y^2)dxdy=1, \\ D[\varphi,v_i] &= 0\quad (i=1,2,\cdots,n-1),\end{aligned}$$

叙述中所谓极小–极大问题的意义不难立刻明白.

另一个等价的问题是在同样的附加条件下使

$$\iint_G (\Delta\varphi)^2 dxdy$$

为极大-极小, 其中我们仍旧要求函数 φ 具有连续的一阶微商及分段连续的二阶微商.

6.7.4 本征值的渐近分布

(a) 对板振动的微分方程 $\Delta\Delta u - \lambda u = 0$ 及边界条件 $u = 0$ 和 $\partial u/\partial n = 0$ (夹住的板), 我们有渐近关系

$$A(\lambda) \sim \frac{f}{4\pi}\sqrt{\lambda},$$

由此可得

$$\lambda_n \sim \left(\frac{4\pi n}{f}\right)^2.$$

在这里, 和前面一样, $A(\lambda)$ 是小于界限 λ 的本征值的个数, λ_n 表示第 n 个本征值, f 表示板的面积. 因此, 我们可以这样叙述: 夹住的板的第 n 个本征值, 当 n 增大时, 渐近地等于边缘固定的膜的第 n 个本征值的平方. 特别地, 它只依赖于板的大小而不依赖于其形状. 在三维空间有类似的事实成立 [1).

(b) 试用 6.4.3 小节的方法, 导出施图姆–刘维尔方程 (见 6.2.3 小节的结果) 以及四阶常微分方程的本征值的渐近分布律.

(c) 对由任意定号二次变分问题所产生的自伴椭圆型微分方程, 导出本征值的渐近分布律.

6.7.5 双参数本征值问题

用变分方法, 解双参数本征值问题 (见第 5 章 5.9.3 小节拉梅问题).

6.7.6 包含参数的边界条件

在边界条件中包含参数的本征值问题 (见第 5 章 5.16.4 小节) 也很容易利用变分法来解. 对微分方程 $\Delta u = 0$ 及边界条件 $\partial u/\partial n = \lambda u$, 我们须使积分

$$\iint_G (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dxdy$$

为极小, 其中 φ^2 在边界上的积分满足条件

$$\int_\Gamma \varphi^2 ds = 1,$$

1) 见 Courant. Über die schwingungen eingespannter Platten.

还须加适当的线性附加条件. 我们把这个想法的实现留给读者去完成.

假如 G 是单位圆, 这问题的解为势函数 $r^n\cos n\theta, r^n\sin n\theta$; 本征值为 $\lambda_n=n$.

在一般的情形, 利用本章开展的方法很容易看出 λ_n 和 n 同级. 所以由 6.3.1 小节知本征函数对积分式 $\mathfrak{H}[\varphi]=\int_\Gamma\varphi^2ds$ 而言为完备的. 换句话说, 将本征函数的边值看作 s 的函数, 它形成一完备组, 由此也就可以得出结论: 每一个在 G 内正规的位势函数可以用本征函数平均逼近.

6.7.7 闭曲面的本征值问题

拉普拉斯球面调和函数的本征值问题是曲面上本征值问题的例子, 在这问题中整个曲面上的正规性条件代替了边界条件. 本章的方法说明这些本征值问题和商式 $\mathfrak{D}/\mathfrak{H}$ 的极小或极大–极小问题有密切的联系; $\mathfrak{D}$ 是由 φ 的微商作成的二次式而 $\mathfrak{H}[\varphi]$ 是一个正定二次式, 它不包含微商而以闭曲面为其积分区域. 这个理论可推广于闭曲面上其他的二次微分式.

6.7.8 当有奇点出现时本征值的估计

在 6.2.4 小节中我们处理了有关贝塞尔本征值问题的奇点; 零阶的贝塞尔函数要求我们利用贝塞尔函数的特殊性质作另外的处理. 这不是必要的, 因为我们现在将讨论一个较一般的办法.

我们考虑联属于式子

$$D[\varphi]=\int_0^1 x\varphi'^2dx,\quad H[\varphi]=\int_0^1 x\varphi^2dx$$

的本征值问题, 在 $x=0$ 没有边界条件, 在 $x=1$ 边界条件为 $\varphi(1)=0$. 在引进 $\sqrt{x}\varphi$ 为新的因变数后, 我们不难对问题的第 n 个本征值 λ_n 得到估计 $\lambda_n\leqslant n^2\pi^2$. 因此对小于 λ 的本征值个数 $A(\lambda)$ 我们有 $A(\lambda)\geqslant\sqrt{\lambda}/\pi$.

为了估计 λ_n 的下界, 从而求出 $A(\lambda)$ 的上界 —— 这乃是我们这里特殊的目的 —— 我们选一任意小的在 0 和 1 之间的正数 ε 并注意 $A(\lambda)\leqslant B_1(\lambda)+B_2(\lambda)$, 其中 B_1 和 B_2 依次表示对式子

$$D_1=\int_0^\varepsilon x\varphi'^2dx,\quad H_1=\int_0^\varepsilon x\varphi^2dx$$

及

$$D_2=\int_\varepsilon^1 x\varphi'^2dx,\quad H_2=\int_\varepsilon^1 x\varphi^2dx$$

而言小于 λ 的本征值个数. 在这里我们不再要求函数 φ 在 $x=\varepsilon$ 这点连续, 因此在两种情形中, $x=\varepsilon$ 这点都作为自由端点出现. 利用本章中所开展的方法, 我们对

$B_2(\lambda)$ 求得渐近关系 $B_2(\lambda)/\sqrt{\lambda} \to (1-\varepsilon)/\pi$; 剩下来是要估计 $B_1(\lambda)$. 我们将 H_1 加强为 H_1^* 而将 D_1 减弱为 D_1^*:

$$H_1^* = \varepsilon \int_0^\varepsilon \varphi^2 dx \quad D_1^* = \int_0^\varepsilon x\left(1-\frac{x}{\varepsilon}\right)\varphi'^2 dx.$$

引用意义显然的符号, 我们有 $B_1(\lambda) < B_1^*(\lambda)$. 另一方面, 我们可以明晰写出这个新本征值问题的本征函数和本征值. 为此, 我们用变换 $x=(1+\xi)\varepsilon/2$ 把区间 $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$ 映到区间 $-1 \leqslant \xi \leqslant 1$ 上去. 这时候我们得到 ξ 的勒让德多项式为本征函数, 而得到 $n(n+1)/\varepsilon^2$ 这些数为本征值. 因此 $B_1(\lambda) \leqslant B_1^*(\lambda) \leqslant \varepsilon(1+\delta)\sqrt{\lambda}$, 其中 δ 随 λ 的增加而趋于零. 总结这些结果, 我们几乎立刻可得到渐近关系

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\pi},$$

因为我们可以取 ε 为任意小.

6.7.9 板和膜的极小定理

若给定周长或面积, 并给定密度常数和弹性常数, 则在所有的夹住边缘的板或膜之中, 其边界为圆的具有最低的基音 [要知道如何证明, 可参看下面列举的第一篇论文 (讨论周长为常数) 以及 G. Faber[1]和 E. Krahn[2]的著作 (讨论面积为常数)].

6.7.10 双质量分布的极小问题

读者可证明下述定理: 在给定的均匀张力下有一拉紧的弦, 在弦上有一给定的的质量分布, 当整个的质量都集中在弦的中点时, 弦的基音最低.

对膜和板试证明类似的结果.

6.7.11 施图姆–刘维尔问题的节点、极大–极小原理

6.6 节的定理说, 第 n 个本征函数用其零点把基本区域分为 n 部分, 这定理可用以下的讨论为基础而加以证明 [3]. 给了一条可以振动的弦, 假如固定其上任意选的 $n-1$ 个内点, 则所得由 n 段独立的弦所组成的系统, 其基音和各子系统的基音中最低的相同 (见 6.1.3 小节). 这个分隔系统的基本振动就是当其他子系统处于静止位置时某一子系统的基本振动. 假如我们变动节点, 则当 n 个子系统都具有同

1) G. Faber. Beweis, dass unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die Kreisförmige den tiefsten Grundton gibt. S.-Ber. Bayr. Akad. Wiss. (math.-phys. Kl.), 1923, 169–172.

2) E. Krahn. Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises. Math. Ann., Vol. 94, 1925, 97–100.

3) 见 K. Hohenemser. Praktische Wege zur angenäherten Schwingungs-berechung elastischer Systeme. Ingenieur-Archiv, Vol. 1, No. 3, 1930, 1–24.

样的基音时, 分隔系统的基音达到极大. 因为假如两个相邻的子系统具有不同的基音, 我们可以移动它们的公共节点把其中一个的基音提高而把另一个的降低, 这样使得这两个子系统具有同样高的基音. 在我们所考虑的这个极大的情形, 分隔系统的振动可以用一连续可微函数来表示, 它就是原来未受约束的系统相应于同一振动频率的本征函数, 它在上述 (相应于最大基音的) $n-1$ 个点上为零. *因此, 假如弦在 $n-1$ 个点固定, 而我们希望选择这些点使所得系统的基音尽可能地高, 则在区间内具有 $n-1$ 个零点的原系统的本征函数给出了我们的解答.* 假如我们把这样所得到的本征值记作 μ_n, 相应本征函数记作 v_n, 则 $\mu_{n+1} \geqslant \mu_n$, 这是因为存在 v_n 的相邻二零点, 它所确定的区间包含 v_{n+1} 的二零点在其内部, 而区间长度的减小引起的是基音的提高.

像前面一样, 假如我们用 λ_n 表示按增加的次序排列起来的本征值, 可以看出我们恒有 $\mu_n \geqslant \lambda_n$, 因为 μ_n 必然包含在 λ_n 之中. 另一方面, 预先给定节点不过相当于 6.1.4 小节定义本征值 λ_n 的变分问题中我们所考虑的线性附加条件的特殊情形或极限情形. 假如我们只限于考虑这种特殊的附加条件, 则极大–极小值, 也就是 μ_n 这个数不会大于在采纳任意线性附加条件时的极大–极小值, 也就是说它不大于 λ_n. 因此 $\mu_n \leqslant \lambda_n$, 由于上面的结果, 所以我们就有 $\mu_n = \lambda_n$. 这就完成了关于施图姆–刘维尔本征函数的零点定理的证明.

参 考 文 献

Courant, R.: Beweis des Setzes, dass von allen homogenen Membranen gegebenem Umfanges und gegebener Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton besitzt. Math. Zeitschr., Vol. 1, 1918, pp. 321–328.

——, Über die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der mathematischen Physik Ibid., Vol. 7, 1920, pp. 1–57.

——, Über die Schwingungen eigenspannter Platten. Ibid., Vol. 15, 1922, pp. 195–200.

——, Ein allgemeiner Satz zur Theorie der Eigenfunktionen selbstadjungierter Differentialausdrücke. Nachr. Ges. Göttingen (math. phys. Kl.), 1923, Session of July 13.

——, Über die Anwendung der Variationsrechnung in der Theorie der Eigenschwing ungen und über neue Klassen von Funktionalgleichungen. Acta Math., Vol. 49, 1926, pp. 1–68.

Kneser, A.: Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik. 2nd ed., F. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1922.

Liouville, J.: Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujetis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre contenant un paramètre variable. J. de math. pures et appl., Ser. 1, Vol. 1, 1836, pp. 253–265. Ibid., Vol. 2, 1837, pp. 16–35, 418–436.

Weyl, H.: Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung). Math. Ann., Vol. 71. 1912, pp. 441–479.

——, Über die Abhängigkeit der Eigenschwingungen einer Membran von deren Begrenzung. Journ. f. d. reine u. angew. Math., Vol. 141, 1912, pp. 1–11.

——, Über das Spektrum der Hohlraumstrahlung. Ibid., pp. 163–181.

——, Über die Randwertaufgabe der Strahlungstheorie und asymptotische Spektralgesetze. Ibid., Vol. 143, 1913, pp. 177–202.

Richardson, R. G. D.: Das Jacobrsche Kriterium der Variationsrechnung und die Oszillationseigenschaften linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. First communication, Math. Ann., Vol. 68, 1910, p. 279. Second communication, Ibid., Vol 71, 1911–1912, p. 214.

——, Über die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Bestehen eines Kleinschen Oszillationstheorems. Ibid., Vol. 73, 1918, p. 289.



第 7 章　本征值问题所定义的特殊函数

7.1　线性二阶微分方程的初步讨论

在本章中我们将研究某一类已经有了定义的函数：贝塞尔函数、勒让德函数和普遍的拉普拉斯球面调和函数. 我们的观点将比以前略为普遍一些; 我们允许独立变数取复数值, 并应用函数论的方法. 还有, 我们不懂研究所说的各函数, 而且要研究相应微分方程的解的全体. 我们假定已知：即使是在独立变数是复数 $z=x+iy$ 的情形, 这一类的微分方程也有两个线性独立的解, 通解是这些解的一个常系数线性组合. 除去在由系数所决定的某些固定的奇点之外, 所有的解都是 z 的正则解析函数. 许多重要的函数类都可以定义为这种具有解析系数的线性微分方程的解.

要得到线性微分方程

$$L[u]+\mu u=0$$

的解的一个积分表示式, 积分变换的方法往往是很有用的; 这里我们先来说一说这方法的大意. 我们通过方程

$$u(z)=\int_C K(z,\zeta)v(\zeta)d\zeta \tag{1}$$

引进复变数 $\zeta=\xi+i\eta$ 的一新未知函数 $v(\zeta)$ 来代替函数 $u(z)$, 式中变换核 $K(z,\zeta)$(假定它对于所含的每一复变数都解析) 和积分路线 C 都要适当地确定. 假定运算手续 L 可以和积分手续互换, 则微分方程成为

$$\int_C (L[K]+\mu K)v(\zeta)d\zeta=0,$$

这里的微分运算 L 是对变数 z 进行的.

现在我们这样来定 K 使 $K(z,\zeta)$ 满足一个偏微分方程

$$L[K]=A[K],$$

其中 $A[K]$ 是一个只含对变数 ζ 的微商的线性微分式. 分部积分以消去这些微商, 上述积分就成为

$$\int_C K(z,\zeta)(B[v]+\mu v)d\zeta,$$

其中 $B[v]$ 代表 $A[v]$ 的伴随微分式 (参看第 5 章 5.5.1 小节). 除去这积分之外, 还出现一与边界有关的项; 适当地选择积分路线可以使这项等于零. 如果 K 的偏微分方程 (可以有各种的选法) 以及变换出来的方程

$$B[v] + \mu v = 0$$

可以求解, 并且所得结果使上面所作的各假设都成立, 则这方法确能引到前述解 $u(z)$ 的积分式.

在分析中这种积分变换有好几种式样. 例如核

$$K(z,\zeta) = e^{z\zeta} \text{ 或 } e^{iz\zeta}$$

给出拉普拉斯变换, 核

$$K(z,\zeta) = (z-\zeta)^{\alpha}$$

给出欧拉变换, 如果积分路线选得适当的话.

7.2 贝塞尔函数

首先我们来讨论贝塞尔方程

$$z^2u'' + zu' + z^2u - \lambda^2 u = 0 \tag{2}$$

和所有它的解; 我们认定 z 和参数 λ 二者都是复数.

7.2.1 积分变换的应用

对方程 (2) 作变换 (1), 得

$$\int_C (z^2K_{zz} + zK_z + z^2K - \lambda^2 K)v(\zeta)d\zeta = 0.$$

现在要求 K 满足方程

$$z^2K_{zz} + zK_z + z^2K + K_{\zeta\zeta} = 0.$$

对于这方程说, 函数

$$K(z,\zeta) = e^{\pm iz\sin\zeta}$$

是一个在整个 z 和 ζ 平面上的单值正则解. 方程 (2) 成为

$$\int_C (K_{\zeta\zeta} + \lambda^2 K)v(\zeta)d\zeta = 0,$$

或用分部积分,

$$\int_C K(z,\zeta)\{v''+\lambda^2 v\}d\zeta+\int_C \frac{\partial}{\partial\zeta}\{K_\zeta v-Kv'\}d\zeta=0.$$

变换后的方程 $v''+\lambda^2 v=0$ 有解为 $e^{\pm i\lambda\zeta}$, 因此我们只需适当选择积分路线. 我们注意到, 在图 9 和图 10 中路线 L_1 和 L_2 的竖向部分上, $-iz\ \sin\zeta$ 的实部当 $\mathrm{Re}(z)>0$ 时是负的, 并在 $|\zeta|$ 增大时趋于 $-\infty$. 因此, 如令 $K(z,\zeta)=e^{-iz\ \sin\zeta}$, 则表达式 $K_\zeta v-Kv'$ 在 L_1 和 L_2 的两头都趋于零而我们得方程 (2) 的两积分解

$$\begin{aligned} H_\lambda^1(z)&=-\frac{1}{\pi}\int_{L_1} e^{-iz\ \sin\ \zeta+i\lambda\zeta}d\zeta,\\ H_\lambda^2(z)&=-\frac{1}{\pi}\int_{L_1} e^{-iz\ \sin\ \zeta+i\lambda\zeta}d\zeta, \end{aligned}\tag{3}$$

这就是所谓汉克尔函数, 很容易验证, 这两积分对于 $\mathrm{Re}(z)>0$ 是收敛的并满足导出它们时所需的假设.

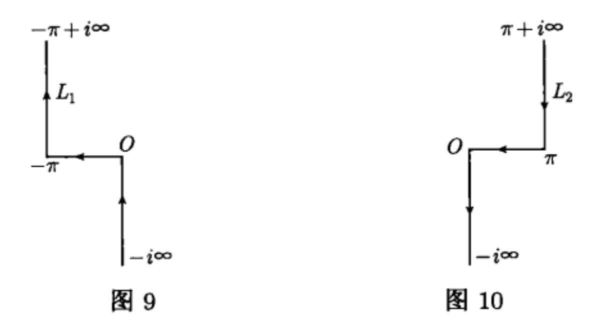


图 9　　　图 10

7.2.2　汉克尔函数

由积分 (3) 所定义的汉克尔函数只在右半平面 $\mathrm{Re}(z)>0$ 有定义. 但是很容易把它们解析延拓.

如果对固定的 $z=x+iy$, 令

$$f(\zeta)=-iz\ \sin\ \zeta+i\lambda\zeta,$$
$$\zeta=\xi+i\eta,\quad \lambda=a+ib,$$

则

$$\mathrm{Re}f(\zeta)=y\ \sin\ \xi\ \cosh\ \eta+x\ \cos\ \xi\ \sinh\ \eta-b\xi-a\eta,$$
$$\mathrm{Im}f(\zeta)=-x\ \sin\ \xi\ \cosh\ \eta+y\ \cos\ \xi\ \sinh\ \eta+a\xi-b\eta.$$

如果代替 0 和 $-\pi$, 我们取 ξ_0 和 $-\pi-\xi_0$ 为 L_1 的竖向部分的横坐标, 则沿新路线

L_1' 的积分 $\int_{L_1'} e^{f(\zeta)}d\zeta$ 对于那些满足

$$y\ \sin\ \xi_0 - x\ \cos\ \xi_0 < 0$$

的 z 而言仍旧是收敛的, 就是说, 对于以直线

$$y\ \sin\ \xi_0 - x\ \cos\ \xi_0 = 0$$

为界的半平面中所有的 z 收敛. 对在这半平面中同时也在 $x > 0$ 半平面中的那部分的点, 两条积分路线都可以用. 显然, 根据柯西积分定理, 它们给出同样的结果. 而在这半平面的其余部分, 沿新路线的积分就给出函数 $H_\lambda^1(z)$ 的解析延拓. 如果按适当的方法, 令 ξ_0 取一无限序列的正数值及负数值, 我们就渐次得到 $H_\lambda^1(z)$ 的全部解析延拓; 即得到一黎曼面, 原点为支点, 其级数依赖于 λ.

$\xi_0 = -\pi/2$ 时, 积分路线的水平部分等于零, $H_\lambda^1(z)$ 的积分式为

$$H_\lambda^1(z) = \frac{e^{-i\pi\lambda/2}}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iz\ \cosh\ \eta - \lambda\eta}d\eta,$$

它在上半平面 $\mathscr{I}_m(z) > 0$ 代表该函数. 如果让 z 在扇形区域

$$\delta \leqslant \arg\ z \leqslant \pi - \delta$$

中趋于无穷, 则被积函数在整个积分路线上趋于零, 而函数 $H_\lambda^1(z)$ 也就趋于零, 因为在每一子集合 $\mathscr{I}_m(z) \geqslant \rho > 0$ 中, 积分一致收敛. 同样, 当 z 在扇形区域

$$-\pi + \delta \leqslant \arg\ z \leqslant -\delta$$

中趋于无穷时, 函数 $H_\lambda^2(z)$ 趋于零. 因此, 我们得到下述结果:

当 z 在上半平面的扇域 $\delta \leqslant \arg\ z \leqslant \pi - \delta$ 中趋于无穷时, 汉克尔函数 $H_\lambda^1(z)$ 趋于零. 当 z 在下半平面的扇域 $-\pi + \delta \leqslant \arg z \leqslant -\delta$ 中趋于无穷时, 汉克尔函数 $H_\lambda^2(z)$ 趋于零[1)].

从汉克尔函数在无穷处的性质可以推知: *$H_\lambda^1(z)$ 和 $H_\lambda^2(z)$ 都不恒等于零, 并且对于每一 λ 它们都是线性独立的.*

为了证明这事实, 我们证明 $H_\lambda^2(z)$ 在正虚轴上, $H_\lambda^1(z)$ 在负虚轴上随着 $|z|$ 无限地增大.

要得到 $H_\lambda^2(z)$ 的在正虚轴上收敛的一个表示式, 我们取积分路线 L_2' 的竖向部分的横坐标为 $-\xi_0$ 及 $\pi + \xi_0$, 其中 ξ_0 是区间 $0 < \xi_0 \leqslant \pi/2$ 中的任意一数. 由于在

1) 这一结论只适用于函数 $H_\lambda^1(z)$ 和 $H_\lambda^2(z)$ 的开始分支; 其他分支都是两原分支的线性组合, 因此不呈现所述性质.

这一部分上积分 $\int e^{f(\zeta)}d\zeta$ 之值随 y 的增大而趋于零, 我们只需研究剩下的部分

$$\int_{\pi+\xi_0}^{-\xi_0} e^{y \sin \xi - b\xi + ia\xi} d\xi,$$

也就是 —— 很容易从替换 $\xi = \xi' + \pi/2$ 得到 —— 积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}+\xi_0} \cosh b\xi \, e^{y \cos \xi} \cos a\xi d\xi.$$

但这积分当 $y \to \infty$ 时是无限增大的 (在 $|a| \leqslant 1$ 的情形, 可以直接看出这一点; 在 $|a| > 1$ 的情形, 稍作准确一点的估计也可以看出[1]).

关于 $H_\lambda^1(z)$ 在负虚轴上的情形也可以应用类似的讨论.

函数 $H_\lambda^1(z)$ 和 $H_\lambda^2(z)$ 线性独立的事实说明从汉克尔函数可以得出贝塞尔方程的解的全体. 因为任何一个解都可以表为下述线性组合

$$c_1 H_\lambda^1(z) + c_2 H_\lambda^2(z).$$

我们还看到, *汉克尔函数 $H_\lambda^1(z)$ 和 $H_\lambda^2(z)$, 除去一不含 z 的因子外, 唯一地由它们在无穷远处的行为及方程 (2) 所确定*. 因为, 如果贝塞尔方程有两个线性无关的解具有所说特性, 譬如在上半平面的特性, 则每一解 —— 其特例为 $H_\lambda^2(z)$—— 也应有此特性. 但这是同刚才证明了的 $|H_\lambda^2(z)|$ 在正虚轴上无限增加的事实冲突的.

最后, 我们来看一看, 当 $z \neq 0$ 时, 汉克尔函数*与参数 λ 的相依关系*. 因为 (3) 中的被积函数是 λ 的解析函数而积分在任一有限的 λ 区域中一致收敛, *所以汉克尔函数是 λ 的解析函数*; 事实上它们是*整超越函数*.

7.2.3 贝塞尔函数和诺伊曼函数

在物理中, λ 和 z 都是实数时方程 (2) 的解特别重要. 要找它们的表示式, 我们写

$$\begin{aligned} H_\lambda^1(z) &= J_\lambda(z) + iN_\lambda(z), \\ H_\lambda^2(z) &= J_\lambda(z) - iN_\lambda(z), \end{aligned} \tag{4}$$

1) 选 ξ_0 使 $\pi/2 + \xi_0$ 为 $\pi/2a$ 的整数倍, 于是问题中的积分为

$$\int_0^{n\pi/2a} \cosh b\xi \, e^{y \cos \xi} \cos a\xi d\xi = \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \xi \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu \cosh \frac{b}{a}\left(\xi + \nu\frac{\pi}{2}\right) e^{y \cos \frac{1}{a}(\xi + \nu\frac{\pi}{2})} \right\} d\xi.$$

和数中的第一项随着 y 的增大而愈来愈重要, 因为指数 $\left[\cos \frac{1}{a}\xi\right]$ 比后面的任何指数 $\left[\cos \frac{1}{a}\left(\xi + \nu\frac{\pi}{2}\right)\right]$ 至少大 $1 - \cos \frac{\pi}{2a}$ 倍, 但第一项是随着 y 无限增大的.

其中

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{2}(H_\lambda^1(z) + H_\lambda^2(z)) \tag{5}$$

称为 λ 级的贝塞尔函数,

$$N_\lambda(z) = \frac{1}{2i}(H_\lambda^1(z) - H_\lambda^2(z))$$

为相应的诺伊曼函数. 因行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2i} & -\frac{1}{2i} \end{vmatrix} = \frac{i}{2}$$

不等于零, 函数 $J_\lambda(z)$ 和 $N_\lambda(z)$ 对于任何 λ 都是线性独立的.

当 z 为实数时, 汉克尔函数 $H_\lambda^1(z)$ 及 $H_\lambda^2(z)$ 互为复数共轭. 因为如果在表示式

$$\overline{H_\lambda^1(z)} = -\frac{1}{\pi}\int_{\overline{L}_1} e^{iz\sin\zeta - i\lambda\zeta}d\zeta$$

中以 $-\zeta$ 代 ζ ($\overline{L}_1$ 是 L_1 对实轴的反射), 我们得

$$\overline{H_\lambda^1(z)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\overline{L}_1} e^{-iz\sin\zeta + i\lambda\zeta}d\zeta.$$

但 $-\overline{L}_1$ 和反方向的 L_2 相同, 故

$$\overline{H_\lambda^1(z)} = -\frac{1}{\pi}\int_{L_2} e^{-iz\sin\zeta + i\lambda\zeta} = H_\lambda^2(z).$$

因此, 当 z 和 λ 是实数时, $J_\lambda(z)$ 和 $N_\lambda(z)$ 分别为汉克尔函数的实部和虚部, $J_\lambda(z)$ 和 $N_\lambda(z)$ 都是实函数.

由于在贝塞尔方程中出现的只是 λ^2, 所以只要 $H_\lambda^\nu(z)$, $(\nu = 1, 2)$ 是解, 则函数 $H_{-\lambda}^\nu(z)$ 一定也是解. 但函数 $H_\lambda^\nu(z)$ 和 $H_{-\lambda}^\nu(z)$ 不能是线性独立的, 因为按本节第 2 小节, 它们在无穷远处的行为是一样的.

事实上, 如果在表示式

$$H_{-\lambda}^1(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{L_1} e^{-iz\sin\zeta - i\lambda\zeta}d\zeta$$

中引入新的积分变量: ζ 和 π, 我们立得关系

$$H_{-\lambda}^1(z) = e^{i\lambda\pi}H_\lambda^1(z); \tag{6}$$

由同样的计算, 得

$$H_{-\lambda}^2(z) = e^{-i\lambda\pi}H_\lambda^2(z). \tag{6'}$$

关于负级数的贝塞尔函数和诺伊曼函数, 我们得到

$$J_{-\lambda}(z)=\frac{e^{i\lambda\pi}H_\lambda^1(z)+e^{-i\lambda\pi}H_\lambda^2(z)}{2},\tag{7}$$

及

$$N_{-\lambda}(z)=\frac{e^{i\lambda\pi}H_\lambda^1(z)-e^{-i\lambda\pi}H_\lambda^2(z)}{2i}.\tag{7'}$$

不像汉克尔函数, 它们并非对于任何 λ 都分别和函数 $J_\lambda(z)$, $N_\lambda(z)$ 线性相关. 只有对于那些使行列式

$$\frac{1}{4}\begin{vmatrix} e^{i\lambda\pi} & e^{-i\lambda\pi} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{i}{2}\sin\ \lambda\pi$$

等于零的 λ 值, 换言之, 只有对于 λ 的整数值 n, 它们才分别线性相关. 在这种情形下, 有

$$J_{-n}(z)=(-1)^nJ_n(z),\tag{8}$$

$$N_{-n}(z)=(-1)^nN_n(z).\tag{8'}$$

因此, 当 λ 不是整数 n 时, 方程 (2) 的通解可表为

$$c_1J_\lambda(z)+c_2J_{-\lambda}(z).$$

反过来, 如果 $\lambda=n$, 我们就用和数

$$c_1J_\lambda(z)+c_2N_\lambda(z)$$

作为通解. 但以后将看到, 即使是在这种情形, $N_n(z)$ 也很容易从 $J_n(\lambda)$ 和 $J_{-n}(\lambda)$ 算出来 (参看本节第 9 小节).

7.2.4　贝塞尔函数的积分表示式

如果把 $H_\lambda^1(z)$ 和 $H_\lambda^2(z)$ 的积分式 (3) 加起来, 则在负虚轴上的积分路线消去而得 $J_\lambda(z)$ 在右半平面 $\mathrm{Re}(z)>0$ 的表示式

$$J_\lambda(z)=-\frac{1}{2\pi}\int_L e^{-iz\ \sin\ \zeta+i\lambda\zeta}d\zeta,\tag{9}$$

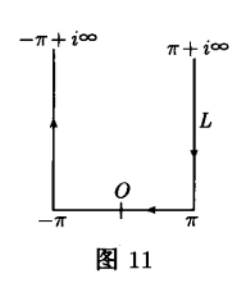


图 11

其中 L 是图 11 所示的路线.

在 $\lambda=n$ 的特殊情形中, 由于被积函数的周期性, 在路线 L 的竖向部分上的积分也消掉了. 因此

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{iz\ \sin\ \zeta-in\zeta}d\zeta\tag{10}$$

或

$$J_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos\ (z\ \sin\ \zeta-n\zeta)d\zeta,\tag{10'}$$

因为 (10) 式中被积函数的实部是偶函数, 虚部是奇函数.

用这些积分可以对所有的 z 来定义 $J_n(z)$. 由此可见, **整数级的贝塞尔函数是全平面上的单值正则函数, 也就是整函数.**

(10) 式还告诉我们, $J_n(z)$ 是函数 $e^{iz\,\sin\,\zeta}$ 对 ζ 的傅里叶展开

$$e^{iz\,\sin\,\zeta} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{in\zeta} \tag{11}$$

中的第 n 个傅里叶系数. 这一由母函数 $e^{iz\,\sin\,\zeta}$ 得到的展式可以当作 n 为整数时 $J_n(z)$ 的定义.

当 z 和 ζ 都是实数时, 由 (11) 可得

$$\cos\,(z\ \sin\ \zeta) = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(z)\ \cos\ n\zeta,$$

$$\sin\,(z\ \sin\ \zeta) = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(z)\ \sin\ n\zeta.$$

对于复数 z 和 ζ, 它们也是成立的.

如果我们注意到

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$$

即得

$$\begin{aligned} \cos\,(z\ \sin\ \zeta) &= J_0(z) + 2\sum_{1}^{\infty} J_{2n}(z)\ \cos\ 2n\zeta, \\ \sin\,(z\ \sin\ \zeta) &= 2\sum_{1}^{\infty} J_{2n-1}(z)\ \sin(2n-1)\zeta; \end{aligned} \tag{12}$$

特别情形: 当 $\zeta = \pi/2$ 时, 有

$$\cos\ z = J_0(z) - 2J_2(z) + 2J_4(z) - + \cdots,$$

$$\sin\ z = 2J_1(z) - 2J_3(z) + - \cdots.$$

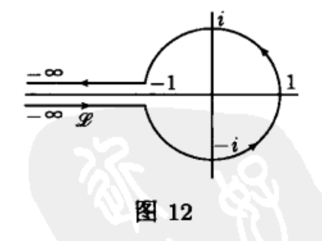


图 12

如果在 (9) 中引进新积分变量 $\zeta' = e^{-i\zeta}$, 则得

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L e^{z(\zeta-\zeta^{-1})/2}\zeta^{-\lambda-1}d\zeta, \tag{13}$$

其中 L 是图 12 所示回路, 这回路沿负实轴的两岸延伸到 $\zeta = -1$ 这点然后沿单位圆绕原点一周[1].

---

1) 我们也可以直接根据 7.1 节中摘述的方法得到这一表示式. 我们要求变换核满足微分方程

$$z^2K_{zz} + zK_z + z^2K - \zeta(\zeta K_\zeta)\zeta = 0,$$

它的解是 $K = e^{z(\zeta-\zeta^{-1})/2}$. 变换后的微分方程是 $[\zeta(\zeta v)']' - \lambda^2 v = 0$, 其解为 $v = \zeta^{\pm\lambda-1}$.

当 λ 等于整数 n 时, 直线部分的积分相消而有

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint e^{z(\zeta-\zeta^{-1})/2}\zeta^{-n-1}d\zeta. \tag{14}$$

因此 $J_n(z)$ 也是洛朗展开

$$e^{z(\zeta-\zeta^{-1})/2} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(z)\zeta^n \tag{15}$$

的第 n 个系数. 这一展开也可以用来作为整数级的 $J_n(z)$ 的定义.

如果在 (13) 式中作变换 $\zeta = 2v/z$—— 并于开始时假定 $\mathrm{Re}(z) > 0$—— 取同样的积分路线, 得

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \int_L e^{v-z2/4v}v^{-(\lambda+1)}dv. \tag{16}$$

但右方积分对于所有 z 的数值均收敛, 故 (16) 提供一个对于所有的 z 都适用的贝塞尔函数的表示式. 特别, 我们看到, 对于任何λ, $J_\lambda(z)/z^\lambda$都是z的一个整函数.

7.2.5　汉克尔函数和贝塞尔函数的另一积分表示式

从 $J_\lambda(z)/z^\lambda$ 所满足的微分方程出发, 应用拉普拉斯变换, 可得贝塞尔函数的另一积分表示式 (确实, 我们似乎有理由可以预期, 用这种方法会得到特别简单的结果). 为此, 我们在方程

$$u'' + \frac{1}{z}u' + \left(1 - \frac{\lambda^2}{z^2}\right)u = 0$$

中引入新变量 $\omega(z)$:

$$u = \omega z^\lambda,$$

方程变为

$$z\omega'' + (2\lambda+1)\omega' + z\omega = 0, \tag{17}$$

令

$$\omega(z) = \int_C K(z,\zeta)v(\zeta)d\zeta,$$
$$K = e^z\zeta,$$

得

$$\int_C \{zK_{zz} + (2\lambda+1)K_z + zK\}v(\zeta)d\zeta = 0.$$

对于拉普拉斯变换这特殊情形,

$$K_z = \zeta K, \quad K_\zeta = zK,$$

因之 $zK_{zz}=\zeta^2K_\zeta$ 而得

$$\begin{aligned}&\int_C\{(1+\zeta^2)K_\zeta+(2\lambda+1)\zeta K\}v(\zeta)d\zeta\\=&-\int_C K(z,\zeta)\{(1+\zeta^2)v'-(2\lambda-1)\zeta v\}d\zeta\\&+\int_C\frac{\partial}{\partial\zeta}(Kv(1+\zeta^2))d\zeta=0.\end{aligned}$$

如果我们这样来确定 C 的 $v(\zeta)$ 使

$$(1+\zeta^2)v'(\zeta)-(2\lambda-1)\zeta v(\zeta)=0$$

而且 $e^{z\zeta}v(\zeta)(1+\zeta^2)$ 在 C 的两端取同值, 则原方程的求解问题就解决了. 由

$$\frac{v'(\zeta)}{v(\zeta)}=\frac{2\lambda-1}{1+\zeta^2}\zeta,$$

我们得到

$$v(\zeta)=c(1+\zeta^2)^{\lambda-1/2}.$$

于是

$$\omega(z)=c\int_C e^{z\zeta}(1+\zeta^2)^{\lambda-1/2}d\zeta.$$

引进 $i\zeta$ 作为新积分变量, 把 $i(-1)^{\lambda-1/2}$ 合并在常数中并仍令 C 表积分路线, 得

$$\omega(z)=c\int_C e^{iz\zeta}(\zeta^2-1)^{\lambda-1/2}d\zeta.$$

为了找一合适积分路线, 我们先作出被积函数的黎曼面, 被积函数在 $\log(\zeta-1)+\log(\zeta+1)=\chi$ 的黎曼面上是单值的. 把 ζ 平面沿着与正实轴平行、从 $\zeta=+1$ 和 $\zeta=-1$ 起到 $\zeta=i\infty$ 止的两条线上割开, 我们得到一单连通区域. 在这区域中可以根据 χ 的虚部在 ζ 平面的实轴上的数值唯一地确定 χ 的一个分支. 我们确定 χ 的两个分支 B_1 和 B_2: 当 ζ 为正实数时[1], χ 的虚部在 B_1 上为零, 在 B_2 上为 $2\pi i$. 从任何一条割线的右方跨过割线至左方相当于从 B_1 进入 B_2*.

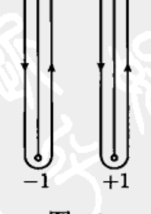


图 13

令 C_1 和 C_2 表示两条分别在 B_1 和 B_2 上的路径: C_1 包围由 $\zeta=+1$ 出发的割线, C_2 包围从 $\zeta=-1$ 出发的割线, 但都不与割线相交 (图 13). 代替平行于虚轴的割线, 我们也可以取与正实轴成 α 角 $(0<\alpha<2\pi)$ 的割线, 然后确定 C_1 和 C_2 如前.

对于那些使 $\mathrm{Re}(iz\zeta)$ 沿割线趋于 $-\infty$ 的 z, 积分 $\omega(z)$ 在 C_1 上或 C_2 上收敛. 同时,

1) 应为 "当 ζ 为大于 1 的正实数时".—— 译者
* 应为 "从一单值区进入另一单值区".—— 译者

$$Kv(\zeta^2-1)=(\zeta^2-1)^{\lambda+1/2}e^{iz\zeta}$$

在积分路线的两端也都趋于零; 换言之, $\omega(z)$ 是 (17) 的解. 当割线与实轴 ξ 成 α 角时, 合于这情况的 $z=x+iy$ 满足

$$y\ \cos\ \alpha+x\ \sin\ \alpha>0,$$

即 z 位于以直线 $y\ \cos\ \alpha+x\ \sin\ \alpha=0$ 为界的两半平面之一中. 但是, 我们可以像本节第 2 小节中那样来解析延拓这些积分, 只要适当地令 α 取一无界序列的正数值及负数值即可. 如果像图 13 那样特殊地在两条路上都选 $\alpha=\pi/2$, 则两积分都在右半平面 $\mathrm{Re}(z)>0$ 收敛. 如果把路线 C_1 转到沿正实轴, 则相应积分在上半平面收敛, 且当 z 在扇域

$$\delta\leqslant\arg\ z\leqslant\pi-\delta\quad(0<\delta<\pi/2)$$

中无限增大时积分趋于 0. 因此, 按照本节第 2 小节中的讨论, 这积分必然与 $H_\lambda^1(z)/z^\lambda$ 重合, 最多差一与 z 无关的因子.

故

$$H_\lambda^1(z)=a_1z^\lambda\int_{C_1}e^{iz\zeta}(\zeta^2-1)^{\lambda-1/2}d\zeta,$$

同样,

$$H_\lambda^2(z)=a_2z^\lambda\int_{C_2}e^{iz\zeta}(\zeta^2-1)^{\lambda-1/2}d\zeta.$$

系数 a_1 和 a_2 只能与 λ 有关, 它们的数值应相等但符号相反. 我们先对于实数 λ, 利用当 λ 和 z 为实数时两汉克尔函数为复数共轭的性质 (见本节第 3 小节) 来证明这点. 当 λ 和 z 为实数时, 我们有[1)]

$$\overline{H_\lambda^{(2)}(z)}=\bar{a}_2z^\lambda\int_{C_1}e^{iz\zeta}(\zeta^2-1)^{\lambda-1/2}d\zeta.$$

这可以验证如下: 在适当的单值区域 B_1 和 B_2 中, 当 $|\zeta|$ 很大时, 在与虚轴平行的四条线上 (图 13)(也就是说, 当 $|\zeta|\to\infty$, ζ 由各方趋近割线时), $\log(\zeta^2-1)$ 的虚部的值[2)], 由左至右约分别等于 $-\pi i,\pi i,-\pi i,\pi i$. 因此我们有

$$\overline{H_\lambda^{(2)}(z)}=\frac{\bar{a}_2}{a_1}H_\lambda^{(1)}(z)=H_\lambda^{(1)},$$

即 $\bar{a}_2=a_1$. 现在我们来证明, 当 λ 为实数并 $>-\dfrac{1}{2}$ 时, a_1 和 a_2 都是纯虚数, 从而证明 $a_2=-a_1$. 因 a_1 和 a_2 解析地依赖于 λ, 故对于所有的 λ 值都应有 $a_1+a_2=0$.

1) 要保证在正实轴 (对 z 言 —— 译者) 上的收敛性, 我们取 C_1 和 C_2 平行于虚轴 (见图 13).

2) 即当 $|\zeta|\to\infty$ 而 ζ 从割线的不同方向趋于割线时, $\log(\zeta^2-1)$ 之值.

要看出 a_1 是纯虚数, 取 $z=iy, y>0$, 并把 c_1 转到沿正实轴从 $\zeta=1$ 到 $\zeta=+\infty$ 的路线. 于是

$$H_\lambda^{(1)}(iy)=a_1(1-e^{-2\pi i(\lambda-1/2)})(iy)^\lambda\int_1^\infty e^{-y\zeta}(\zeta^2-1)^{\lambda-1/2}d\zeta.$$

由公式

$$H_\lambda^1(iy)=\frac{e^{-\pi i\lambda/2}}{\pi i}\int_{-\infty}^\infty e^{-y\cosh\eta-\lambda\eta}d\eta$$

得

$$a_1(\lambda)\cos\ \pi\lambda=\frac{b(\lambda)}{\pi i},$$

其中 $b(\lambda)$ 当 λ 为实数且 $>-\frac{1}{2}$ 时是实数. 因此对于这样的 λ 值, $\overline{a}_1=-a_1$ 而有 $a_2=-a_1$.

由本节第 2 小节知汉克尔函数是 λ 的解析函数, 又可立刻看出, 积分 $\int e^{iz\zeta}(\zeta^2-1)^{\lambda-1/2}d\zeta$ 也如此, 因此, 系数 $a_1(\lambda)$ 和 $a_2(\lambda)$ 是 λ 的解析函数, 亦即关系 $a_1=-a_2=c$ 普遍成立.

如果把两汉克尔函数的积分表示式相加, 结果所得的积分路线可以变形为一横 8 字形的路线 $\mathfrak{A}$(图 14), 它沿正向绕 $+1$ 一周并沿负向绕 -1 一周. 这样, 我们得到贝塞尔函数的一个表示式

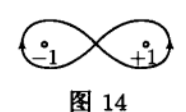


图 14

$$J_\lambda(z)=cz^\lambda\int_{\mathfrak{A}}e^{iz\zeta}(\zeta^2-1)^{\lambda-1/2}d\zeta,$$

这表示式当 $\lambda\neq n+\frac{1}{2}(n=0,\pm1,\cdots)$ 时在全 z 平面上成立, 原因是积分路线位于平面上的有限部分.

为了确定 c, 我们把这表示式同积分式 (16) 相比, 得到 $z=0$ 时的关系

$$c\int_{\mathfrak{A}}(\zeta^2-1)^{\lambda-1/2}d\zeta=\frac{1}{2^\lambda}\frac{1}{2\pi i}\int_L e^v v^{-\lambda-1}dv.$$

在下一小节中我们将看到, 左方积分之值为

$$\int_{\mathfrak{A}}(\zeta^2-1)^{\lambda-1/2}d\zeta=2\pi i\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}.$$

要算出右方的积分, 我们来看积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L e^v v^{t-1}dv$$

在 t 是正实数的特殊情形. 因为这积分代表一个 t 的解析函数, 所以只要对于这些特殊的 t 值把它化为已知的解析函数即可.

在 $t>0$ 的假定下, 由于指数 $t-1>-1$, 积分直到原点均收敛, 我们可以把积分路线的单位圆部分缩小至原点. 根据柯西定理, 如果取积分路线为沿实轴的下岸由 $-\infty$ 到 0 然后沿上岸由 0 回到 $-\infty$(图 15), 来代替 L, 积分之值不变, 即

$-\infty$　　0

图 15

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L e^v v^{t-1}dv=\frac{1}{2\pi i}\int_{\substack{-\infty\\ \text{实轴下岸}}}^{0} e^v v^{t-1}dv+\frac{1}{2\pi i}\int_{\substack{0\\ \text{实轴上岸}}}^{-\infty} e^v v^{t-1}dv \qquad (t>0).$$

令 $v=-w$, 前一积分成为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\infty^0 w^{t-1}e^{-(t-1)\pi i}e^{-w}(-dw)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty w^{t-1}e^{-(t-1)\pi i}e^{-w}dw,$$

第二个积分成为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty w^{t-1}e^{(t-1)\pi i}e^{-w}(-dw).$$

它们的和为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty w^{t-1}e^{-w}(e^{t\pi i}-e^{-t\pi i})dw.$$

因 $e^{t\pi i}-e^{-t\pi i}=2i\ \sin\ \pi t$, 而按定义

$$\int_0^\infty w^{t-1}e^{-w}dw=\Gamma(t),$$

所以两积分之和等于

$$\frac{\sin\ \pi t}{\pi}\Gamma(t).$$

由 Γ 函数的辅助定理

$$\Gamma(t)\Gamma(1-t)=\frac{\pi}{\sin\ \pi t}.$$

得

$$\frac{\sin\ \pi t}{\pi}\Gamma(t)=\frac{1}{\Gamma(1-t)}.$$

因此

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L v^{t-1}e^v dv=\frac{1}{\Gamma(1-t)},$$

而常数 c 之值为

$$c=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2^\lambda}\frac{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}-\lambda\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)}.$$

我们最后得到 $J_\lambda(z)$ 的表示式为

$$J_\lambda(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}{2\pi i\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\lambda\int_{\mathfrak{A}}e^{iz\zeta}(\zeta^2-1)^{\lambda-1/2}d\zeta. \tag{18}$$

这表示式除去 $\lambda=n+1/2$(n 为 $\geqslant 0$ 的整数) 之外, 对于所有的 λ 都成立.

对于汉克尔函数, 我们可以找到相应的公式:

$$\begin{aligned}H_\lambda^1(z)&=\frac{1}{\pi i}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\lambda\int_{C_1}e^{iz\zeta}(\zeta^2-1)^{\lambda-1/2}d\zeta,\\H_\lambda^2(z)&=\frac{-1}{\pi i}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\lambda\int_{C_2}e^{iz\zeta}(\zeta^2-1)^{\lambda-1/2}d\zeta.\end{aligned} \tag{18'}$$

如果 $\mathrm{Re}(\lambda)>-\frac{1}{2}$, 我们可以从 (18) 式导出很有用的表示式

$$J_\lambda(z)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\lambda\int_{-1}^{+1}e^{iz\zeta}(1-\zeta^2)^{\lambda-1/2}d\zeta. \tag{19}$$

令 $\zeta=\sin\ \tau$, 得 $\left(\text{当 } \mathrm{Re}(\lambda)>-\frac{1}{2} \text{ 时}\right)$

$$J_\lambda(z)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\lambda\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos\ (z\ \sin\ \tau)(\cos\ \tau)^{2\lambda}d\tau. \tag{20}$$

7.2.6 贝塞尔函数的幂级数展开

我们可以用初等方法得到在全 z 平面上单值解析的 $J_\lambda(z)/z^\lambda$ 的幂级数展开. 例如, 我们可以像在第 5 章中那样设

$$u(z)=z^\lambda\sum_0^\infty a_\nu z^\nu,$$

代入微分方程 (2) 中, 然后逐次来定系数 a_ν. 不过在我们目前的体系中, 这幂级数展开可从积分表示式得出.

我们从积分式 (18) 着手, 把函数 $e^{iz\zeta}$ 展成幂级数 (但注意只有当 $\lambda\neq n+\frac{1}{2}$ ($n=$

$0, \pm1, \pm2, \cdots$) 时才能应用 (18) 式). 因为这级数在任何有限的 ζ 区域中一致收敛, 故可逐项积分而得

$$J_\lambda(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}{2\pi i\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}i^n\int_{\mathfrak{A}}\zeta^n(\zeta^2-1)^{\lambda-1/2}d\zeta.$$

计算积分 $\int_{\mathfrak{A}}\zeta^n(\zeta^2-1)^{\lambda-1/2}d\zeta$ 时, 我们注意到, 所讨论的是 λ 的解析函数, 因此只要对于所有 $\mathrm{Re}(\lambda)>0$ 的 λ 确定这些函数即可. 在这种情形下, 我们可以把积分路线变形为在区间 $-1 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 上来回一周的路线.

被积函数之值为:

$$\begin{aligned} &e^{\pi i(\lambda-1/2)}\zeta^n(1-\zeta^2)^{\lambda-1/2} \qquad \text{在实轴上岸},\\ &e^{-\pi i(\lambda-1/2)}\zeta^n(1-\zeta^2)^{\lambda-1/2} \qquad \text{在实轴下岸},\end{aligned}$$

因此,

$$\int_{\mathfrak{A}}\zeta^n(\zeta^2-1)^{\lambda-1/2}d\zeta = -2i\ \sin\ \pi\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1}\zeta^n(1-\zeta^2)^{\lambda-1/2}d\zeta.$$

右方积分当 n 为奇数时等于零; 当 n 为偶数时, 得

$$\int_{\mathfrak{A}}\zeta^{2n}(\zeta^2-1)^{\lambda-1/2}d\zeta = 4i\ \sin\ \pi\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\int_{0}^{1}\zeta^{2n}(1-\zeta^2)^{\lambda-1/2}d\zeta.$$

用变换 $\zeta^2=u$, 上式变为

$$\int_{\mathfrak{A}}\zeta^{2n}(\zeta^2-1)^{\lambda-1/2}d\zeta = 2i\ \sin\ \pi\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\int_{0}^{1}u^{n-1/2}(1-u)^{\lambda-1/2}du.$$

右方积分是一个第一类的欧拉积分. 根据熟知的关系

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

得

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{A}}\zeta^{2n}(\zeta^2-1)^{\lambda-1/2}d\zeta &= 2i\ \sin\ \pi\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)B\left(n+\frac{1}{2},\lambda+\frac{1}{2}\right)\\ &= 2i\ \sin\ \pi\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+\lambda+1)}.\end{aligned}$$

但 $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\pi/\sin\ \pi x$, 因此 $\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\sin\ \pi\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)=\pi/\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)$ 而得

$$\int_{\mathfrak{A}}\zeta^{2n}(\zeta^2-1)^{\lambda-1/2}d\zeta=2\pi i\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\Gamma(n+\lambda+1)}.$$

在 $n=0$ 的特殊情形

$$\int_{\mathfrak{A}}(\zeta^2-1)^{\lambda-1/2}d\zeta=2\pi i\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}.$$

把这些计算结果代入 $J_\lambda(z)$ 的级数中, 得

$$J_\lambda(z)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+\lambda+1)}.$$

但

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

故

$$J_\lambda(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}\frac{1}{\Gamma(n+\lambda+1)}. \tag{21}$$

如果 λ 非整数, 系数 $1/\Gamma(n+\lambda+1)$ 都不等于零. 但如果 λ 是整数, 则

$$\frac{1}{\Gamma(n+\lambda+1)}=0,\qquad 当\ n+\lambda+1\leqslant 0,$$

$$\frac{1}{\Gamma(n+\lambda+1)}=\frac{1}{(n+\lambda)!},\qquad 当\ n+\lambda+1>0.$$

可以看出上面所作关于 $\lambda\neq n+\frac{1}{2}$ 的假设, 对于 (21) 的成立并非必要, 因为级数 (21) 对于 $\lambda=n+\frac{1}{2}$ 也一致收敛, 并且像我们已经见到的, $J_\lambda(z)$ 是 λ 的解析函数.

级数 (21) 对所有的 z 值均收敛, 因此 $J_\lambda(z)/z^\lambda$ 是一个整数越函数, 如果它不是一个多项式或一常数. 但后一情形是不可能的, 因为当 λ 是负整数时只有有限个

$$\frac{1}{\Gamma(n+\lambda+1)}$$

等于零, 其他的都不等于零, 故此 z^{2n} 的系数不等于零而 $J_\lambda(z)/z^\lambda$ 的级数有无穷个非零项.

从 (21) 立见当 λ 和 z 都是实数时, $J_\lambda(z)$ 也是实数, 因为这时 Γ 函数是实数.

7.2.7 各贝塞尔函数间的关系

我们已经导出贝塞尔函数的幂级数展开及积分表示式. 我们现在利用它的积分表示式来阐明贝塞尔函数的一些一般的特性. 由 (16) 式

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \int_L v^{-(\lambda+1)} e^{v - z^2/4v} dv,$$

其中 L 是图 12 中所示的积分路线, 我们有

$$\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} = \frac{1}{2^\lambda}\frac{1}{2\pi i}\int_L v^{-(\lambda+1)} e^{v - z^2/4v} dv.$$

两方对 z^2 微分, 并在右方形式地在积分号下求微商, 得

$$\frac{d^k}{d(z^2)k}\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} = \frac{1}{2^\lambda}\frac{1}{2\pi i}\int_L v^{-(\lambda+1)}\left(\frac{-1}{4v}\right)^k e^{v - z^2/4v} dv.$$

积分号下求微商是合法的, 因为在路线 L 上不等式 $|v| \geqslant 1$ 成立, 因之当 $|z| \leqslant h$ 时, 函数

$$|e^{-z^2/4v}| \leqslant e^{|z^2/4v|} \leqslant e^{h^2}$$

一致有界, 而右方为一 z^2 的解析函数是一致收敛积分.

以 $z^{\lambda+k}$ 乘最后方程的两端时, 右端出现另一贝塞尔函数, 于是有

$$\frac{d^k}{d(z^2)^k}\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{J_{\lambda+k}(z)}{z^{\lambda+k}}, \tag{22}$$

或写成另一形式

$$\left(\frac{d}{zdz}\right)^k \frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} = (-1)^k \frac{J_{\lambda+k}(z)}{z^{\lambda+k}}.$$

对于 $k=1$ 的特殊情形, 有

$$\frac{d}{dz}\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} = -\frac{J_{\lambda+1}(z)}{z^\lambda}, \tag{23}$$

亦即递推公式

$$\frac{dJ_\lambda(z)}{dz} = \frac{\lambda}{z}J_\lambda(z) - J_{\lambda+1}(z). \tag{24}$$

当 $\lambda = 0$ 时, 这式子成为

$$J_1(z) = -\frac{dJ_0(z)}{dz}.$$

我们进一步来讨论 $\lambda=-\frac{1}{2}, \lambda=\frac{1}{2}$ 的情形. 由 (21) 有

$$J_{-\frac{1}{2}}(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}.$$

因

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)&=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\&=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi},\end{aligned}$$

故

$$J_{-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\ z.$$

利用公式 (23) 于 $\lambda=-\frac{1}{2}$ 的情形,

$$\frac{d}{dz}\frac{J_{-\frac{1}{2}}(z)}{z^{-\frac{1}{2}}}=-\frac{J_{\frac{1}{2}}(z)}{z^{-\frac{1}{2}}},$$

得

$$\frac{d}{dz}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\ z=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\ z=-\frac{J_{\frac{1}{2}}(z)}{z^{-\frac{1}{2}}},$$

或者

$$J_{\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\ z, \tag{25}$$

将两式相除, 得

$$\frac{J_{-\frac{1}{2}}(z)}{J_{\frac{1}{2}}(z)}=\cot\ z.$$

因此, 当 $\lambda=-\frac{1}{2},\lambda=\frac{1}{2}$ 时, 贝塞尔函数可以简单地用三角函数来表示.
由公式

$$\begin{aligned}J_{\lambda}(z)&=\frac{H_{\lambda}^{1}(z)+H_{\lambda}^{2}(z)}{2},\\J_{-\lambda}(z)&=\frac{H_{\lambda}^{1}(z)e^{i\lambda\pi}+H_{\lambda}^{2}(z)e^{-i\lambda\pi}}{2}\end{aligned}$$

得, 当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时,

$$J_{\frac{1}{2}}(z)=\frac{H_{\frac{1}{2}}^{1}(z)+H_{\frac{1}{2}}^{2}(z)}{2}$$

及

$$J_{-\frac{1}{2}}(z)=\frac{i\left(H_{\frac{1}{2}}^{1}(z)-H_{\frac{1}{2}}^{2}(z)\right)}{2},$$

或

$$-iJ_{-\frac{1}{2}}(z)=\frac{H^1_{\frac{1}{2}}(z)-H^2_{\frac{1}{2}}(z)}{2}.$$

把它们相加, 得

$$H^1_{\frac{1}{2}}(z)=J_{\frac{1}{2}}(z)-iJ_{-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}(\sin\ z-i\ \cos\ z)=-i\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{iz};\qquad(26)$$

相减, 得

$$H^2_{\frac{1}{2}}(z)=J_{\frac{1}{2}}(z)+iJ_{-\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}(\sin\ z+i\ cos\ z)=i\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{-iz}.\qquad(26')$$

这些公式再度显示: **贝塞尔、诺伊曼和汉克尔函数间的关系与正弦、余弦和指数函数间的关系相似**. 这种类似处在将来讨论关于零点的分布的定理时还会表明(参看本节第 8 小节).

应用 (22)

$$\frac{d^k}{d(z^2)^k}\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda}=\left(-\frac{1}{2}\right)^k\frac{J_{\lambda+k}(z)}{z^{\lambda+k}}$$

于 $\lambda=\frac{1}{2}$ 的情形, 有

$$\frac{d^k}{d(z^2)^k}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\ z}{z}=\left(-\frac{1}{2}\right)^k\frac{J_{k+\frac{1}{2}}(z)}{z^{k+\frac{1}{2}}},$$

因此,

$$J_{k+\frac{1}{2}}(z)=(-1)^k\frac{(2z)^{k+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\frac{d^k}{d(z^2)^k}\frac{\sin\ z}{z}.$$

换言之, 任一贝塞尔函数 $J_{k+\frac{1}{2}}(z)$ 可以表为 z 及三角函数的有理函数乘上 $\sqrt{z}$.

另一不同的递推公式可以从

$$J_\lambda(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L e^{\frac{z(\zeta-\zeta^{-1})}{2}}\zeta^{-\lambda-1}d\zeta$$

用积分号下求微商的方法得到. 结果是

$$J'_\lambda(z)=\frac{1}{4\pi i}\left\{\int_L e^{\frac{z(\zeta-\zeta^{-1})}{2}}\zeta^{-\lambda}d\zeta-\int_L e^{\frac{z(\zeta-\zeta^{-1})}{2}}\zeta^{-\lambda-2}d\zeta\right\},$$

或

$$J'_\lambda(z)=\frac{1}{2}\{J_{\lambda-1}(z)-J_{\lambda+1}(z)\}.\qquad(27)$$

从这式中减去关系式

$$J'_\lambda(z)=\frac{\lambda}{z}J_\lambda(z)-J_{\lambda+1}(z),$$

得

$$J_{\lambda-1}(z)+J_{\lambda+1}(z)=\frac{2\lambda}{z}J_\lambda(z). \tag{28}$$

最后的关系式还可以写成

$$\frac{J_{\lambda-1}(z)}{J_\lambda(z)}=\frac{2\lambda}{z}-\frac{1}{\dfrac{J_\lambda(z)}{J_{\lambda+1}(z)}}=\frac{2\lambda}{z}-\cfrac{1}{\cfrac{2\lambda+2}{z}-\cfrac{1}{\cfrac{2\lambda+4}{z}-\ddots}},$$

也就是说, $J_{\lambda-1}(z)/J_\lambda(z)$ 可以用一无穷连分式来表示. 不过我们这里不能讨论它的收敛问题, 以 z 乘两方, 上式成为

$$z\frac{J_{\lambda-1}(z)}{J_\lambda(z)}=2\lambda-\frac{z^2}{2\lambda+2}-\frac{z^2}{2\lambda+4-\ddots}. \tag{29}$$

当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时, 这式化为

$$z\frac{J_{-1/2}(z)}{J_{1/2}(z)}=z\ \cot\ z=1-\cfrac{z^2}{3-\cfrac{z^2}{5-\ddots}}, \tag{30}$$

它代表关于$\cot z$ 的一无穷连分式. 这是早在十八世纪就知道的公式, 兰伯特[1)]曾用它来证明 π 是无理数, 他令 $z=\pi/4$.

对于指数为整数 n 的贝塞尔函数, 下述函数关系成立:

$$J_n(a+b)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}J_\nu(a)J_{n-\nu}(b). \tag{31}$$

这式子的证明可以直接从母函数的关系 $e^{i(a+b)\sin\zeta}=e^{ia\sin\zeta}\cdot e^{ib\sin\zeta}$ 得到. 因为按这关系, 有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(a+b)e^{in\zeta}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}J_\nu(a)J_{n-\nu}(b)\right)e^{in\zeta},$$

由此即得 (31).

这公式有一推广. 对于 $n=0$ 的情形, 推广式是

$$J_0(\sqrt{a^2+b^2+2ab\ \cos\ \alpha})=J_0(a)J_0(b)+2\sum_{1}^{\infty}J_\nu(a)J_{-\nu}(b)\cos\ \nu\alpha. \tag{32}$$

---

1) J. H. Lambert. Mémoire sur quelques propriétés remarquable des quantités transcendentes circulaires et logarithmique. Acad. sc. Berlin. Mém., Vol. 17(1761), 1768, 265–322, 尤其是 p. 269.

要证明它, 我们利用积分表示式 (10) 把乘积 $J_\nu(a)J_{-\nu}(b)$ 写成一双重积分

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}d\zeta_1\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(a\sin\zeta_1+b\sin\zeta_2)-i\nu(\zeta_1-\zeta_2)}d\zeta_2.$$

稍微变换一下就可以把这积分变成

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}J_0(\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha})e^{-i\nu\alpha}d\alpha,$$

因而 (32) 得证.

最后, 我们注意到, 在一定的假设之下, 一个函数 $f(r)$ 可以用贝塞尔函数来表示, 如同它可以 (按照傅里叶积分定理) 用指数函数来表示那样 (见第 2 章 2.6 节及第 5 章 5.12 节). *设 $f(r)$ 连续并分段平滑, 且设*

$$\int_0^\infty r|f(r)|dr<\infty,$$

则对于每一整数 n 及 $r>0$, $f(r)$ 可以表成

$$f(r)=\int_0^\infty sds\int_0^\infty tf(t)J_n(st)J_n(sr)dt. \tag{33}$$

这公式可推得如下：令

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta.$$

考虑函数

$$g(x,y)=f(r)e^{in\theta}.$$

在上设关于 $f(r)$ 的假定下, 这函数必然是连续的, 并且 —— 除在零点的邻近 —— 具有分段连续微商. 如果应用二维的傅里叶积分定理 (见第 2 章 2.6.2 小节) 于 $g(x,y)$, 并把居于里面的两积分的次序互换 (这一点需要验证), 得

$$g(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(ux+vy)}dudv\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(\xi,\eta)e^{-i(u\xi+v\eta)}d\xi d\eta.$$

引进极坐标来代替 ξ,η,u,v 作为积分变量:

$$\xi=s\cos\alpha,\qquad u=t\cos\beta,$$
$$\eta=s\sin\alpha,\qquad v=t\sin\beta,$$

得

$$f(r)e^{in\theta}=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty tdt\int_{-\pi}^{\pi}e^{irt\cos(\beta-\theta)}d\beta\int_0^\infty sf(s)ds\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\alpha}e^{-ist\cos(\alpha-\beta)}d\alpha.$$

作代换

$$\beta - \theta = \frac{\pi}{2} + \beta',$$

$$\alpha - \beta = \alpha' - \frac{\pi}{2},$$

则由于指数函数的周期性, 上式成为

$$f(r)e^{in\theta} = \frac{e^{in\theta}}{4\pi^2}\int_0^\infty tdt\int_{-\pi}^{\pi} e^{-irt\sin\beta' + in\beta'}d\beta'\int_0^\infty sf(s)ds\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ist\sin\alpha' + in\alpha'}d\alpha'.$$

应用 (10) 式而对 α' 和 β' 积分, 立得所述关系

$$f(r) = \int_0^\infty tJ_n(rt)dt\int_0^\infty sf(s)J_n(st)ds.$$

前面提到, 在这证明里关于积分换序的问题, 需要验证一下. 要避免这一点, 我们可以给公式 (33) 另一与证傅里叶积分定理类似的证明. 我们利用对于任何在原点等于零并分段平滑的函数 $f(r)$ 都成立的关系

$$\begin{aligned} f(r) &= \lim_{v\to\infty}\int_0^a sf(s)P_v(s,r)ds, \\ P_v(s,r) &= \int_0^v tJ_n(st)J_n(rt)dt, \end{aligned} \tag{34}$$

a 表任何正数, 且 $a > r > 0$. 这关系完全与第 2 章中的狄利克雷积分相当, 证明亦类似. 现在我们来证明, 在积分 $\int_0^\infty r|f(r)|dr$ 存在的假定下, 对 s 的积分可以延至无穷. 原因是, 当 $r \neq s$ 时有恒等式

$$P_v(r,s) = \frac{v}{s^2 - r^2}\{sJ_n(vr)J_{n+1}(vs) - rJ_n(vs)J_{n+1}(vr)\}. \tag{35}$$

它是从下一小节中的 (36) 式利用递推关系 (24) 得到的. 这恒等式告诉我们. 对于固定的 $r \neq 0$, $P_v(r,s)$ 随着 s 的增加而一致 (对于 v 言) 趋于零 (例如, 可用贝塞尔函数在它的变量很大时的渐近展开来证明这一点 —— 关于渐近展开见第 5 章 5.11.2 小节或第 7 章 7.6.2 小节). 因此, 当 a 够大时, 积分

$$\int_a^b sf(s)P_v(r,s)ds$$

对 v 和 b 而言可一致地为任意小, 这也就证明了关系 (33).

7.2.8　贝塞尔函数的零点

最后, 我们来推导一些关于贝塞尔函数的零点的定理[1)].

贝塞尔函数 $J_\lambda(z)$ 满足微分方程

$$J_\lambda''(z)+\frac{1}{z}J_\lambda'(z)+\left(1-\frac{\lambda^2}{z^2}\right)J_\lambda(z)=0.$$

令

$$z=\xi_1 t,\quad \xi_1=\text{常数}\neq 0,$$

得

$$J_\lambda''(\xi_1 t)+\frac{1}{\xi_1 t}J_\lambda'(\xi_1 t)+\left(1-\frac{\lambda^2}{\xi_1^2 t^2}\right)J_\lambda(\xi_1 t)=0.$$

同样, 如令

$$z=\xi_2 t,\quad \xi_2=\text{常数}\neq 0,$$

得

$$J_\lambda''(\xi_2 t)+\frac{1}{\xi_2 t}J_\lambda'(\xi_2 t)+\left(1-\frac{\lambda^2}{\xi_2^2 t^2}\right)J_\lambda(\xi_2 t)=0.$$

以 $\xi_1^2 tJ_\lambda(\xi_2 t)$ 乘第一个方程, 以 $-\xi_2^2 tJ_\lambda(\xi_1 t)$ 乘第二个方程, 把结果相加, 得

$$\begin{aligned}&t(\xi_1^2 J_\lambda''(\xi_1 t)J_\lambda(\xi_2 t)-\xi_2^2 J_\lambda''(\xi_2 t)J_\lambda(\xi_1 t))\\&+(\xi_1 J_\lambda'(\xi_1 t)J_\lambda(\xi_2 t)-\xi_2 J_\lambda'(\xi_2 t)J_\lambda(\xi_1 t))\\&+(\xi_1^2-\xi_2^2)tJ_\lambda(\xi_1 t)J_\lambda(\xi_2 t)=0.\end{aligned}$$

它的前两项的和等于函数

$$t(\xi_1 J_\lambda'(\xi_1 t)J_\lambda(\xi_2 t)-\xi_2 J_\lambda'(\xi_2 t)J_\lambda'(\xi_1 t))$$

对 t 的微商. 如果这函数在区间 (0,1) 中有意义, 则将上式由 0 至 1 积分, 得

$$\begin{aligned}&t(\xi_1 J_\lambda'(\xi_1 t)J_\lambda(\xi_2 t)-\xi_2 J_\lambda'(\xi_2 t)J_\lambda(\xi_1 t))|_0^1\\&+(\xi_1^2-\xi_2^2)\int_0^1 tJ_\lambda(\xi_1 t)J_\lambda(\xi_2 t)dt=0.\end{aligned}\tag{36}$$

因 $J_\lambda(z)/z^\lambda$ 系 z 的整函数, 不难证明

$$t(\xi_1 J_\lambda'(\xi_1 t)J_\lambda(\xi_2 t)-\xi_2 J_\lambda'(\xi_2 t)J_\lambda(\xi_1 t))=t^{2\lambda+2}g(t),$$

---

1) 参看第 6 章 6.2.4 小节中与此有关的结果.

其中 $g(t)$ 是 t 的一个整函数. 因此, 如果 $\lambda > -1$, 则当 $t = 0$ 时, 最后的式子等于零, 而 (36) 成为

$$(\xi_1 J'_\lambda(\xi_1) J_\lambda(\xi_2) - \xi_2 J'_\lambda(\xi_2) J_\lambda(\xi_1)) + (\xi_1^2 - \xi_2^2) \int_0^1 t J_\lambda(\xi_1 t) J_2(\xi_2 t) dt = 0. \tag{37}$$

由这方程, 我们可以对于 $J_\lambda(z)$ 的零点的分布作出一些结论 (见第 6 章, 6.6 节).

令 ξ 为 $J_\lambda(z)$ 的一个不等于零的零点. 令 $\xi_1 = \xi, \xi_2 = \bar{\xi}, \bar{\xi}$ 是 ξ 的共轭复数. 于是只有当 ξ 是实数时, ξ_1 才会等于 ξ_2.

设 λ 为实数, 则对于实数 z, $J_\lambda(z)$ 取实数值. 幂级数 (21) 之系数为实数, 因此, 如果 $J_\lambda(\xi)$ 等于零, $J_\lambda(\bar{\xi})$ 也要等于零. 在 (37) 中令 $J_\lambda(\xi_1) = J_\lambda(\xi_2) = 0$, 则大括号等于零, 第二项变成

$$(\xi^2 - \bar{\xi}^2) \int_0^1 t |J_\lambda(\xi t)|^2 dt = 0.$$

我们假设了 $\xi \neq 0$. 又因贝塞尔函数不恒等于零, 故 $\int_0^1 t|J_\lambda(\xi t)|^2 dt \neq 0$, 因此 $(\xi^2 - \bar{\xi}^2) = (\xi - \bar{\xi})(\xi + \bar{\xi}) = 0$, 即

$$\xi = \bar{\xi} \text{ 或 } \xi = -\bar{\xi},$$

也就是说 ξ 或者是实数, 或者是纯虚数. 所以当 $\lambda > -1$ 时, 贝塞尔函数 $J_\lambda(z)$ 只有实数或纯虚数的零点.

为了讨论贝塞尔函数的纯虚数零点, 我们来看幂级数展开

$$\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} = \frac{1}{2^\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \frac{1}{\Gamma(n + \lambda + 1)}.$$

作代换 $z = ai$, a 为实数 $\neq 0$, 得

$$\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} = \frac{1}{2^\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{2}\right)^{2n} \frac{1}{n!\Gamma(n + \lambda + 1)}.$$

因 λ 是实数, 所以除了有限个数的例外, $n + \lambda + 1$ 对于所有的 n 都是正的. 又因 Γ 函数当它的变量为正数时取正数值, 所以幂级数的系数, 除去开头有限几个之外, 其他都是正的. 当 $|a|$ 很大时, 高次项占优势, 又因 $a \neq 0$ 时 $(a/2)^{2n} > 0$, 所以当 $|a|$ 够大时 $J_\lambda(z)/z^\lambda > 0$. 因此, 只能在虚轴上有限的一段上出现函数 $J_\lambda(z)/z^\lambda$ 的零点. 也就是说, 作为一个整超越函数, $J_\lambda(z)/z^\lambda$ 只能有有限个数的纯虚数零点. 当 $\lambda > -1$ 时 $J_\lambda(z)/z^\lambda$ 不能有纯虚数零点. 因为在这种情形中对于所有的 n

$$n + \lambda + 1 > 0,$$

$$\Gamma(n + \lambda + 1) > 0,$$

因此, 级数的系数都是正数, 级数本身也就是正的. 特别情形, 当 $\lambda = 0, 1, 2, \cdots$ 时, 不存在纯虚数零点.

综合上述, 得到下面的结论: 当实数 $\lambda > -1$ 时, $J_\lambda(z)$ 只有实数零点. 如 λ 为任意实数, 则 $J_\lambda(z)$ 只能有有限个纯虚数零点. 事实上, 可以证明, 当 λ 为实数时, 不在实轴上的零点的总数总是有限的.

对于每一正整数 λ, 函数 $J_\lambda(z)$ 有无穷个实数零点. 这可以从前一章中的讨论来证明, 因为 $\lambda_n(z)$ 的诸零点给出一微分方程的本征值组.

我们最后要来说一说贝塞尔函数的实零点的位置.

设 λ 为实数并令

$$\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} = v, \quad J_\lambda(z) = vz^\lambda,$$

则有 (17) 式

$$zv'' + (2\lambda + 1)v' + zv = 0.$$

如果 ξ 是 v' 的一个正数零点, 则当 $z = \xi$ 时微分方程成为

$$\xi v''(\xi) + \xi v(\xi) = 0,$$

因之

$$v''(\xi) + v(\xi) = 0.$$

由此可知, 在 ξ 点二阶微商 $v''(\xi)$ 不能也等于零. 因为如果这样, 那么就会有 $v(\xi) = 0$, 由此及 $v'(\xi) = 0$ 就得到 (17) 的解 $v(z)$ 恒等于零的结论. 因此, 我们断定 $v(\xi)$ 和 $v''(\xi)$ 具相反的符号.

令 ξ_1 及 $\xi_2 (> \xi_1)$ 为 $v'(z)$ 的两相邻零点, 使当 $\xi_1 < z < \xi_2$ 时 $v'(z) \neq 0$. 于是按罗尔定理, 在 ξ_1 和 ξ_2 之间必有 v'' 的奇数个零点; 因此, $v''(\xi_1)$ 与 $v''(\xi_2)$ 异号, 而 $v(\xi_1)$ 与 $v(\xi_2)$ 也随之异号. 所以在 ξ_1 和 ξ_2 之间有奇数个 v 的零点 —— 至少有一个. 但由罗尔定理, 这种零点只能有一个, 因为在 v 的两相邻零点之间必有 v' 的奇数个零点, 而按假设, v' 在 ξ_1 和 ξ_2 之间是没有零点的. 准此, v 恰恰有一个零点在 ξ_1 与 ξ_2 之间. 换言之, 在 v' 的两相邻零点之间, 有而且只有 v 的一个零点. v和v'的正数零点是互相隔开的; 对于负数零点, 情形也相同.

在本节第 7 小节中, 我们曾推导出关系 (23)

$$\frac{d}{dz}\frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda} = -\frac{J_{\lambda+1}(z)}{z^\lambda}$$

或

$$v' = -\frac{J_{\lambda+1}(z)}{z^\lambda}.$$

PDG

既然 v 和 v' 的零点互相隔开, 而且由于

$$v = \frac{J_\lambda(z)}{z^\lambda}, \quad v' = -\frac{J_{\lambda+1}(z)}{z^\lambda},$$

所有 v 和 v' 的正负零点也是 $J_\lambda(z)$ 和 $\lambda_{\lambda+1}(z)$ 的零点, 因此, $J_\lambda(z)$ 和 $J_{\lambda+1}(z)$ 的零点互相隔开.

当 $\lambda = -\frac{1}{2}, \lambda = \frac{1}{2}$ 时, 我们有

$$J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\ z, J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\ z,$$

它们的零点分别为

$$\pm\frac{\pi}{2},\ \pm\frac{3\pi}{2},\ \pm\frac{5\pi}{2},\ \cdots,\ \pm\frac{(2n+1)\pi}{2},\ \cdots$$

和

$$0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \cdots,\ \pm n\pi,\ \cdots;$$

它们的确是互相隔开的.

在这方面, 贝塞尔函数也显出它们同三角函数相似之处.

7.2.9 诺伊曼函数

如果 λ 不是整数, 我们可以从关系 (5)

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{2}(H_\lambda^1(z) + H_\lambda^2(z))$$

和 (7)

$$J_{-\lambda} = \frac{1}{2}(e^{i\lambda\pi} H_\lambda^1(z) + e^{-i\lambda\pi} H_\lambda^2(z))$$

解出 $H_\lambda^1(z)$ 和 $H_\lambda^2(z)$ 来. 我们得到

$$H_\lambda^1(z) = -\frac{1}{i \sin \lambda\pi}(J_\lambda(z)e^{-i\lambda\pi} - J_{-\lambda}(z)), \tag{38}$$

$$H_\lambda^2(z) = \frac{1}{i \sin \lambda\pi}(J_\lambda(z)e^{i\lambda\pi} - J_{-\lambda}(z)), \tag{38'}$$

因之,

$$N_\lambda(z) = \frac{1}{2i}(H_\lambda^1(z) - H_\lambda^2(z)) = \frac{J_\lambda(z)\ \cos\ \lambda\pi - J_{-\lambda}(z)}{\sin\ \lambda\pi}. \tag{39}$$

但是用 J_λ 和 $J_{-\lambda}$ 来表示诺伊曼函数的这个式子当 λ 为整数时不成立, 因为在这情形中分子 $J_\lambda(z) \cos \lambda\pi - J_{-\lambda}(z)$ 和分母 $\sin\ \lambda\pi$, 作为 λ 的函数, 都是一级零点.

不过由于分子和分母当 $z \neq 0$ 时都是 λ 的正规解析函数, 我们可以把二者微分, 以求该函数在 λ 为整数时之值. 对下述商式

$$\frac{\dfrac{\partial J_\lambda(z)}{\partial \lambda}\cos\ \lambda\pi - J_\lambda(z)\pi\ \sin\ \lambda\pi - \dfrac{\partial J_{-\lambda(z)}}{\partial \lambda}}{\pi\ \cos\ \lambda\pi}$$

取极限, 得关于整数 λ 的公式

$$N_\lambda(z) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial J_\lambda(z)}{\partial \lambda} - (-1)^\lambda \frac{\partial J_{-\lambda}(z)}{\partial \lambda}\right). \tag{40}$$

很容易验证, 方才得到的式子是 λ 为整数时微分方程的一个解. 事实上, 如果我们把贝塞尔方程

$$\frac{d^2 J_\lambda(z)}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dJ_\lambda(z)}{dz} + \left(1 - \frac{\lambda^2}{z^2}\right) J_\lambda(z) = 0$$

(它是一个关于 λ 的恒等式) 对 λ 微分, 我们得到

$$\frac{d^2}{dz^2}\frac{\partial J_\lambda(z)}{\partial \lambda} + \frac{1}{z}\frac{d}{dz}\frac{\partial J_\lambda(z)}{\partial \lambda} + \left(1 - \frac{\lambda^2}{z^2}\right)\frac{\partial J_\lambda(z)}{\partial \lambda} = \frac{2\lambda}{z^2} J_\lambda(z).$$

同样, 对于 $-\lambda$, 我们有

$$\frac{d^2}{dz^2}\frac{\partial J_{-\lambda}(z)}{\partial \lambda} + \frac{1}{z}\frac{d}{dz}\frac{\partial J_{-\lambda}(z)}{\partial \lambda} + \left(1 - \frac{\lambda^2}{z^2}\right)\frac{\partial J_{-\lambda}(z)}{\partial \lambda} = \frac{2\lambda}{z^2} J_{-\lambda}(z).$$

以 $(-1)^\lambda$ 乘第二个方程, 把所得结果从第一个方程中减去, 利用 $J_\lambda(z) = (-1)^\lambda J_{-\lambda}(z)$ 的关系, 可看出所得结果的右方在 λ 为整数时等于零. 因此, 函数

$$\frac{\partial J_\lambda(z)}{\partial \lambda} - (-1)^\lambda \frac{\partial J_{-\lambda}(z)}{\partial \lambda} = \pi N_\lambda(z) \quad (\lambda = \text{整数})$$

是贝塞尔方程的另一解.

方才推出的诺伊曼函数同函数 $J_\lambda(z)$ 及 $J_{-\lambda}(z)$ 之间的关系使我们能够从贝塞尔函数的表示式求出相应的 $N_\lambda(z)$ 的表示式. 举例说, 从积分表示式 (9), 我们得到, 当 $\lambda \neq n$ 时

$$N_\lambda(z) = -\frac{1}{2\pi\ \sin\ \pi\lambda}\int_L e^{-iz\ \sin\ \zeta}\{e^{i\lambda\zeta}\cos\ \pi\lambda - e^{-i\lambda\zeta}\}d\zeta, \tag{41}$$

以及当 $\lambda = n$ 时

$$N_n(z) = -\frac{i}{\pi^2}\int_L \zeta e^{-iz\ \sin\ \zeta}\cos\ n\zeta d\zeta \quad (n = \text{偶数}), \tag{42}$$

$$N_n(z)=\frac{1}{\pi^2}\int_L \zeta e^{-iz\sin\zeta}\sin\ n\zeta d\zeta\quad (n=\text{奇数}), \tag{42'}$$

又例如利用本节第 5 小节的积分公式 (20), 我们可以从

$$N_0(z)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\partial J_\lambda}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0}$$

得到

$$\pi N_0(z)=2(C+\log\ 2)J_0(z)+\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos\ (z\ \cos\ \zeta)\log(z\ \sin^2\ \zeta)d\zeta, \tag{43}$$

其中 C 是有名的欧拉常数.

同样, $N_\lambda(z)$ 的级数展开也可以从 $J_\lambda(z)$ 和 $J_{-\lambda}(z)$ 的级数展开得到. 我们将较详细地讨论 λ 为整数的情形. 这时,

$$J_\lambda(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^\lambda\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}\frac{1}{\Gamma(n+\lambda+1)}.$$

我们可以在和数号下求微分, 得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial J_\lambda(z)}{\partial\lambda}&=\log\ \frac{z}{2}\cdot J_\lambda(z)+\left(\frac{z}{2}\right)^\lambda\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}\left(\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)}\right)_{t=n+\lambda+1},\\ \frac{\partial J_{-\lambda}(z)}{\partial\lambda}&=-\log\frac{z}{2}\cdot J_{-\lambda}(z)-\left(\frac{z}{2}\right)^{-\lambda}\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}\left(\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)}\right)_{t=n-\lambda+1}.\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

我们先来定微商 $d/dt[1/\Gamma(t)]$, 当 t 为正整数时之值. 当 $t\neq 0,\ -1,\ -2,\ \cdots$ 时, Γ 函数满足下述函数关系:

$$\Gamma(t+1)=t\Gamma(t).$$

求对数微商, 得

$$\frac{\Gamma'(t+1)}{\Gamma(t+1)}=\frac{1}{t}+\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}.$$

重复 k 次, 得

$$\frac{\Gamma'(t+k+1)}{\Gamma(t+k+1)}=\frac{1}{t+k}+\frac{1}{t+k-1}+\cdots+\frac{1}{t}+\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}$$
$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots).$$

我们有

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)}=-\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma^2(t)}=-\frac{1}{\Gamma(t)}\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)};$$

如在前式中令 $t=1$, $k=n-1$, 我们得到, 当 $n=1,2,3,\cdots$ 时

$$\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+1+\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}$$
$$=\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+1-C.$$

知道了 $\Gamma'(t)/\Gamma(t)$ 当 t 为正整数时之值, 就可以得出所求微商 $d/dt[1/\Gamma(t)]$ 在这些点上的值:

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)}\right)_{t=1}=C$$

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)}=-\frac{1}{(t-1)!}\cdot\left\{\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t-2}+\cdots+1-C\right\},\text{当}t=2,3,\cdots.$$

要得到 t 为负整数时微商之值, 我们从方程

$$\frac{\Gamma'(t+k+1)}{\Gamma(t+k+1)}=\frac{1}{t+k}+\frac{1}{t+k-1}+\cdots+\frac{1}{t}+\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}$$

解出 $\Gamma'(t)/\Gamma(t)$ 来. 以 $-1/\Gamma(t)$ 乘所得结果, 得

$$-\frac{1}{\Gamma(t)}\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}=\frac{1}{\Gamma(t)}\left\{\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}+\cdots+\frac{1}{t+k-1}+\frac{1}{t+k}\right\}$$
$$-\frac{1}{\Gamma(t)}\frac{\Gamma'(t+k+1)}{\Gamma(t+k+1)}.$$

如果令 t 趋近于 $-k$, 则左方, 因之右方, 趋近于 $[d/dt(1/\Gamma(t))]_{t=-k}$. 但当 $t\to-k$ 时 $1/\Gamma(t)$ 趋于零, 而

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}+\cdots+\frac{1}{t+k-1}$$

及

$$\Gamma'(t+k+1)/\Gamma(t+k+1)$$

均保持为有限, 故右方只剩下 $1/\Gamma(t)(t+k)$ 这一项. 以 $t(t+1)\cdots(t+k-1)$ 乘分子分母, 利用 Γ 函数的函数关系, 即见分母等于 $\Gamma(t+k+1)$ 并且当 $t\to-k$ 时它趋近于 $\Gamma(1)=1$; 因为分子趋近于 $(-1)^k k!$, 所以

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{1}{\Gamma(t)}\right)_{t=-k}=(-1)^k k!.$$

把所得微商 $d/dt(1/\Gamma(t))$ 在 t 等于整数时之值代入级数 (44) 中, 即得, 当 $\lambda=1,2,\cdots$ 时,

$$\pi N_\lambda(z)=\frac{\partial J_\lambda(z)}{\partial\lambda}-(-1)^\lambda\frac{\partial J_{-\lambda}(z)}{\partial\lambda}$$

$$
\begin{aligned}
&=2J_\lambda(z)\left(\log\ \frac{z}{2}+C\right)-\left(\frac{z}{2}\right)^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\lambda-1}\frac{(\lambda-n-1)!}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}\\
&\quad-\left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda}\frac{1}{\lambda!}\left\{\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda-1}+\cdots+1\right\}-\left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{n!(n+\lambda)!}\\
&\quad\cdot\left\{\frac{1}{n+\lambda}+\frac{1}{n+\lambda-1}+\cdots+1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+1\right\},
\end{aligned}
\tag{45}
$$

当 $\lambda=0$ 时,

$$
\pi N_0(z)=2J_0(z)\left(\log\frac{z}{2}+C\right)-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+1\right\}.
$$

由最后的展开式, 我们可以对贝塞尔方程的解所能具有的**奇异性**获得一个观念.

除去 $z=\infty$ 是所有非零解的一个本性奇点之外, 只有原点一点可能是贝塞尔方程的解的奇点. 如果 λ 不是整数, 则通解可用函数 $J_\lambda(z)$ 和 $J_{-\lambda}(z)$ 来表示, 于是在原点只能呈现 z^λ 及 $z^{-\lambda}$ 形的奇异性. 如果 $\lambda=n$ 为整数, 则解除了在原点有一 n 级极点之外, 只能再有一形如 $z^n\log z$ 的对数奇异点, 因为, 任何解总可以表为函数 $J_\lambda(z)$ 和 $N_\lambda(z)$ 的线性组合, 而它们是没有其他奇点的.

指数 n 为整数的贝塞尔函数 $J_n(z)$ 则是在原点也保持为正规的解.

7.3 勒让德函数

勒让德函数, 以及从它用微分的方法得到的高次球面函数, 已经在本书的其他部分[1)]作为实变函数研究过了, 并且推出了它们的许多性质. 现在我们进一步要在复变数 $z=x+iy$ 的情形来求得这些函数的积分表示式; 同时, 我们还要找出勒让德方程的其余的解. 在这种过程中, 我们将清楚地看到, 勒让德函数 $P_n(z)$ 中的参数 n 毋需限于正整数[2)].

7.3.1 施拉夫利积分

从 n 次勒让德多项式的表示式

$$
P_n(z)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n
$$

1) 第 2 章 2.8 节和第 5 章 5.10.2 小节.

2) 本节可以特别参看 E. F. Whittaker and G. N. Watson. A Course of Modern Analysis 一书. 第四版. Cambridge: Cambridge University Press, 1927, 302–336 页.

PDG

(第 2 章 2.8 节), 利用柯西积分公式, 我们立刻得到

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(\zeta^2-1)^n}{2^n(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta, \tag{46}$$

z 为任意复数. 这里 C 是复数 $\zeta=\xi+i\eta$ 平面上正向绕 $\zeta=z$ 一周的积分路线. 由这施拉夫利所给的表示式, 可以导出重要的结果和推广. 首先我们看到, 勒让德方程

$$\frac{d}{dz}\left((1-z^2)\frac{dP_n}{dz}\right)+n(n+1)P_n=0$$

是积分表示式 (46) 的直接结果. 事实上, 如果在积分号下求微商, 这微分方程的左方成为

$$\begin{aligned}&\frac{n+1}{2\pi i2^n}\int_C\frac{(\zeta^2-1)^n}{(\zeta-z)^{n+3}}((n+2)(1-z^2)-2z(\zeta-z)+n(\zeta-z)^2)d\zeta\\ =&\frac{n+1}{2\pi i2^n}\int_C\frac{(\zeta^2-1)^n}{(\zeta-z)^{n+3}}(2(n+1)\zeta(\zeta-z)-(n+2)(\zeta^2-1))d\zeta\\ =&\frac{n+1}{2\pi i2^n}\int_C\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{(\zeta^2-1)^{n+1}}{(\zeta-z)^{n+2}}\right)d\zeta.\end{aligned}$$

但积分路线是闭合的, 而 $(\zeta^2-1)^{n+1}/(\zeta-z)^{n+2}$ 又是单值的, 所以对 ζ 而言这式子恒等于零. 要推广 $P_n(z)$ 的定义到 n 不等于正整数而是任意的情形, 我们可以利用这一直接的关于勒让德方程的验证. 因为不论 n 为何, 施拉夫利积分 (46) 显然一定代表勒让德方程的一个解, 只要 $(\zeta^2-1)^{n+1}/(\zeta-z)^{n+2}$ 在积分一圈之后回到原来的数值; 例如当积分路线是被积函数的黎曼面上一闭合回路时便是如此. 但在这种情形中, $P_n(z)$ 一般将不是 z 的一个整有理函数 —— 甚至不是一个单值解析函数. 这种路线可由下法得到: 把 ζ 平面沿实轴从 -1 到 $-\infty$ 并沿任意路线从 1 到 z 点割开; z 平面也类似地从 $-\infty$ 到 -1 割开, 然后选一正向绕点 $\zeta=z$ 及 $\zeta=+1$ 但不含点 $\zeta=-1$ 于内的闭合回路为 C. 这样定义的函数

$$P_\nu(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{(\zeta^2-1)^\nu}{2^\nu(\zeta-z)^{\nu+1}}d\zeta \tag{47}$$

也称为 *ν 级的勒让德函数*, 它在割开的 z 平面上是单值的, 并满足勒让德方程

$$((1-z^2)u')'+\nu(\nu+1)u=0; \tag{48}$$

它而且是唯一在 $z=1$ 有界, 数值为

$$P_\nu(1)=1$$

的解[1]. 这一特性显然可以从积分表示式看出, 如果我们让 z 趋于 1. 在上述微分方程中以 $-\nu-1$ 代 ν, 方程不变, 因此有恒等式

$$P_\nu(z)=P_{-\nu-1}(z),$$

这用直接计算是不容易证明的.

由积分表示式还可以看出, $P_\nu(z)$ 满足下列递推公式

$$\begin{gathered}P'_{\nu+1}(z)-zP'_\nu(z)=(\nu+1)P_\nu(z),\\(\nu+1)P_{\nu+1}(z)-z(2\nu+1)P_\nu(z)+\nu P_{\nu-1}(z)=0.\end{gathered}\tag{49}$$

第二式曾在第 2 章 2.8.3 小节中推出过, 不过那时 ν 是整数.

7.3.2 拉普拉斯的积分表示式

如果 z 的实部是正的, 而且假设 $z\neq 1$, 我们就可以取以 z 点为心, $|\sqrt{(z^2-1)}|$ 为半径的圆作为 C. 这圆具有上面所要求的性质, 因为在 $\mathrm{Re}(z)>0$, $z\neq 1$ 的情形下, 不等式 $|z-1|^2<|z+1||z-1|$. 令 $\zeta=z+\sqrt{z^2-1}e^{i\varphi}$, 使积分变量为实数 φ, $\varphi\leqslant\pi$, 则施拉夫利积分立刻变为对于 $z=1$ 也成立的拉普拉斯第一积分式

$$P_\nu(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(z+\sqrt{z^2-1}\cos\ \varphi)^\nu d\varphi,\tag{50}$$

其中这样规定多值函数 $(z+\sqrt{z^2-1}\cos\ \varphi)^\nu$, 使当 $\varphi=\pi/2$ 时函数等于 z^ν; 这里的 z^ν 代表 z^ν 的主值, 特殊地当 z 为正数, ν 为实数时, z^ν 是实数.

由公式 $P_\nu=P_{-\nu-1}$ 立得拉普拉斯的第二积分表示式

$$P_\nu(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{d\varphi}{(z+\sqrt{z^2-1}\cos\ \varphi)^{\nu+1}}.\tag{51}$$

应当注意, 对于那些使 $z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi$ 在积分路线上等于零的 z 值而言, 第一表示式只是对于 $\nu\leqslant-1$ 不成立, 而第二式则对于 $\nu\geqslant 0$ 不成立. 因此, 至少有一个表示式在平面上定义 P_ν 的一单值分支 (除去在沿实轴从 -1 到 ∞ 的割线上).

7.3.3 第二类勒让德函数

微分方程 (48) 必定还有一个与 $P_\nu(z)$ 线性独立的第二解. 这解很容易从施拉夫利积分得到, 只要另取一与前不同的积分路线即可. 这种路线可以是一个 8 字形的路线 $\mathfrak{U}$ (见图 14), 只要它不含 z 点于内. 由积分

$$Q_\nu(z)=\frac{-1}{4i\ \sin\ \nu\pi}\int_{\mathfrak{U}}\frac{1}{2^\nu}\frac{(\zeta^2-1)^\nu}{(z-\zeta)^{\nu+1}}d\zeta\tag{52}$$

---

1) 事实上, 第二解 Q_ν(将在本节第 3 小节中定义) 在 $z=1$ 点对数式地趋于无穷, 任何与 P_ν 线性无关的解都是如此.

所定义的解析函数 $Q_\nu(z)$ 也满足勒让德方程; 积分中, 当 $\mathfrak{A}$ 与实轴交于 $\zeta=1$ 之右时, $\arg(\zeta^2-1)=0$. $Q_\nu(z)$ 称为**第二类勒让德函数**, 它在沿实轴从 $+1$ 到 $-\infty$ 割开的 z 平面上是正规及单值的. 我们先明白地假设在这表示式中 ν 不是一个整数, 因为否则归一因子 $1/\sin\nu\pi$ 就要成为无穷. 当 $\nu+1$ 的实部为正数时, 我们可以收缩积分路线使有

$$Q_\nu(z)=\frac{1}{2^{\nu+1}}\int_{-1}^{1}\frac{(1-\zeta^2)^\nu}{(z-\zeta)^{\nu+1}}d\zeta \tag{53}$$

(比较 7.2.6 小节的计算). 这公式现在也可以应用于 ν 是非负整数的情形.

由 (52) 式易见 $Q_\nu(z)$ 在 $z=1$ 和 $z=-1$ 两点对数地趋于无穷, 因为积分路线一定穿过连接 z 点到 $+1$ 和 -1 两点的线.

同 $P_\nu(z)$ 的拉普拉斯积分类似, 函数 $Q_\nu(z)$ 也有一个这样的积分表示式. 在上面的积分 (51) 中, 令

$$\zeta=\frac{e^\varphi\sqrt{z+1}-\sqrt{z-1}}{e^\varphi\sqrt{z+1}+\sqrt{z-1}}$$

并先看实数 $z>1$ 的情形, 稍作计算, 我们得到

$$Q_\nu(z)=\int_0^\infty\frac{d\varphi}{(z+\sqrt{z^2-1}\ \cosh\ \varphi)^{\nu+1}}\quad(\nu>-1), \tag{54}$$

其中被积函数之值确定如前.

7.3.4　联属勒让德函数 (高阶勒让德函数)

高阶的勒让德函数由下述方程定义:

$$P_{\nu,h}(z)=(1-z^2)^{h/2}\frac{d^h}{dz^h}P_\nu(z),$$

$$Q_{\nu,h}(z)=(1-z^2)^{h/2}\frac{d^h}{dz^h}Q_\nu(z)$$

(见第 5 章 5.10.2 小节). 对于这些函数, 我们同样有积分公式. 这些公式可以从施拉夫利积分表示式 (47) 经过微分后作代换 $\zeta=z+\sqrt{z^2-1}e^{i\varphi}$ 得到 (见本节第 2 小节). 写明出来, 我们有

$$P_{\nu,h}(z)=(i)^h\frac{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+h)}{\pi}\cdot\int_0^\pi(z+\sqrt{z^2-1}\ \cos\ \varphi)^\nu\ \cosh\ \varphi d\varphi. \tag{55}$$

从这个式子可以立刻看出, 例如, 所有相应于 $h>0$ 的勒让德函数当 $z=1$ 时都等于零.

7.4 应用积分变换方法于勒让德、切比雪夫、埃尔米特及拉盖尔方程

勒让德方程的理论以及那些在第 2 章中讨论过的正交函数的理论, 也可以用 7.1 节所说的积分变换的方法来开展. 下面我们简略地说一说如何做法.

7.4.1 勒让德函数

对勒让德方程

$$L[u] = (1 - z^2)u'' - 2zu' = -\lambda(\lambda + 1)u \tag{56}$$

用变换

$$u(z) = \int_C K(z, \zeta)v(\zeta)d\zeta,$$

我们得到下述条件

$$\int_C \{(1 - z^2)K_{zz} - 2zK_z + \lambda(\lambda + 1)K\}v(\zeta)d\zeta = 0.$$

如果我们要求变换核满足微分方程

$$(1 - z^2)K_{zz} - 2zK_z + \zeta(\zeta K)_{\zeta\zeta} = 0, \tag{57}$$

而得其一解 $K = 1/\sqrt{1 - 2z\zeta + \zeta^2}$, 则在积分中以 $-\zeta(\zeta K)_{\zeta\zeta}$ 代 $L[K]$, 并对所得结果分部积分, 可得 $v(\zeta)$ 所满足的微分方程

$$\zeta(v\zeta)'' - \lambda(\lambda + 1)v = 0,$$

它的解是 $v = \zeta^\lambda$ 和 $v = \zeta^{-\lambda-1}$. 由此得积分

$$\begin{aligned} P_\lambda(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{\zeta^{-\lambda-1}}{\sqrt{1 - 2z\zeta + \zeta^2}}d\zeta, \\ Q_\lambda(z) &= \frac{1}{4i\ \sin\ \pi\lambda}\int_{C_2} \frac{\zeta^{-\lambda-1}}{\sqrt{1 - 2z\zeta + \zeta^2}}d\zeta, \end{aligned} \tag{58}$$

C_1 和 C_2(见图 16 及图 17) 是被积函数的黎曼面上的曲线.

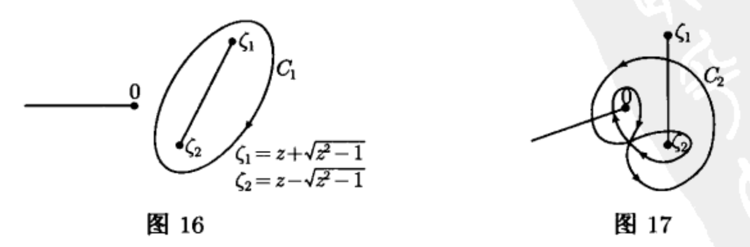


图 16　　图 17

用变换

$$\zeta = z + \sqrt{z^2 - 1}\cos\ \varphi$$

并适当地把积分路线变形, 我们立刻得到拉普拉斯积分 (51) 和 (54):

$$P_\lambda(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (z + \sqrt{z^2-1}\cos\ \varphi)^{-\lambda-1} d\varphi,$$

$$Q_\lambda(z) = \int_0^\infty (z + \sqrt{z^2-1}\cosh\ \varphi)^{-\lambda-1} d\varphi \quad (\lambda < -1).$$

上面所选的核

$$K(z,\zeta) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2z\zeta + \zeta^2}},$$

或任何其他满足微分方程 (57) 的函数, 是勒让德方程的母函数. 盖因这样一个核的级数展开

$$K(z,\zeta) = \sum_0^\infty u_n(z)\zeta^n$$

的系数 $u_n(z)$ 是上列形式的积分:

$$u_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{K(z,\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta;$$

而因积分路线是闭合的, 故 $u_n(z)$ 是方程 (56) 当 $\lambda = n$ 时的一个解.

7.4.2 切比雪夫函数

在切比雪夫方程

$$L[u] = (1 - z^2)u'' - zu' = -\lambda^2 u \tag{59}$$

的情形, 我们取微分方程

$$(1 - z^2)K_{zz} - zK_z + \zeta(\zeta K_\zeta)_\zeta = 0 \tag{60}$$

的一个解为 K, 例如取 $K(z,\zeta) = (1-\zeta^2)/(1 - 2z\zeta + \zeta^2)$. 由它得下述形式的解

$$\begin{aligned} P_\lambda(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{1-\zeta^2}{1-2z\zeta+\zeta^2}\zeta^{-\lambda-1} d\zeta, \\ Q_\lambda(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{1-\zeta^2}{1-2z\zeta+\zeta^2}\zeta^{-\lambda-1} d\zeta. \end{aligned} \tag{61}$$

这里, C_1 和 C_2 是被积函数的黎曼面上的闭合曲线并包含被积函数分母的零点

$$\zeta_1 = z + \sqrt{z^2-1}, \qquad \zeta_2 = z - \sqrt{z^2-1}$$

于其内 (见图 18).

应用柯西积分定理, 得

$$P_\lambda(z)=(z+\sqrt{z^2-1})^\lambda,\qquad Q_\lambda(z)=(z-\sqrt{z^2-1})^\lambda. \tag{62}$$

图 18

和数

$$T_\lambda(z)=\frac{1}{2^\lambda}(P_\lambda(z)+Q_\lambda(z))=\frac{(z+\sqrt{z^2-1})^\lambda+(z-\sqrt{z^2-1})^\lambda}{2^\lambda}$$

当 $\lambda=n$ 时变成 n 次切比雪夫多项式; 这和数也可以由积分

$$T_\lambda(z)=\frac{1}{2^\lambda}\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{1-\zeta^2}{1-2z\zeta+\zeta^2}\zeta^{-\lambda-1}d\zeta$$

来表示, 其中的 C 现在同时包含 ζ_1 和 ζ_2 两点于内.

7.4.3 埃尔米特函数

在埃尔米特方程

$$L[u]=u''-2zu'=-2\lambda u \tag{63}$$

的情形, 我们要 K 满足方程

$$K_{zz}-2zK_z+2\zeta K_\zeta=0. \tag{64}$$

函数 $e^{2z\zeta-\zeta^2}$ 是它的一个解. 如果分别取图 19 中的曲线 C_1 和 C_2 之一为 C, 即得两解

$$\begin{aligned}P_\lambda(z)&=\frac{1}{\pi i}\int_{C_1}\frac{e^{-\zeta^2+2z\zeta}}{\zeta^{\lambda+1}}d\zeta,\\ Q_\lambda(z)&=\frac{1}{\pi i}\int_{C_2}\frac{e^{-\zeta^2+2z\zeta}}{\zeta^{\lambda+1}}d\zeta.\end{aligned} \tag{65}$$

它们的算术平均

$$H_\lambda(z)=\frac{1}{2}(P_\lambda(z)+Q_\lambda(z)),$$

换言之, 积分

$$H_\lambda(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{e^{-\zeta^2+2z\zeta}}{\zeta^{\lambda+1}}d\zeta,$$

当 $\lambda=n$ 时恰为埃尔米特多项式 $H_n(z)$; C 是图 21 中的回路.

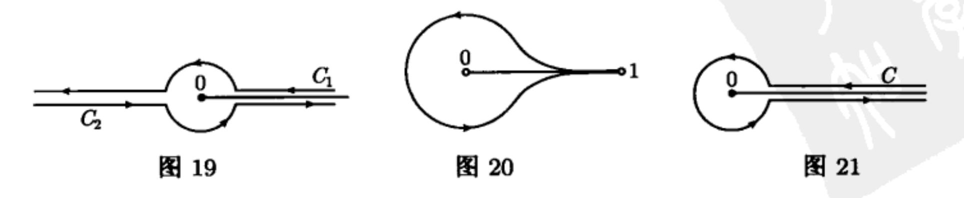


图 19　　图 20　　图 21

如果 $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$, 我们可以把积分路线向原点收缩而得积分解 —— 差一与 z 无关的常数因子 ——

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\zeta^2+2z\zeta}}{\zeta^{\lambda+1}} d\zeta \tag{66}$$

及

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-\zeta^2+2z\zeta}}{\zeta^{\lambda+1}} d\zeta. \tag{67}$$

7.4.4　拉盖尔函数

相应地, 对于拉盖尔方程

$$L[u] = zu'' + (1-z)u' = -\lambda u, \tag{68}$$

我们要求 $K(z,\zeta)$ 满足偏微分方程

$$zK_{zz} + (1-z)K_z + \zeta K_z = 0 \tag{69}$$

而得下述形式的积分

$$\int_C \frac{e^{-z\zeta/(1-\zeta)}}{1-\zeta} \zeta^{-\lambda-1} d\zeta. \tag{70}$$

在选择积分路线 C 时, 必须注意到, $\zeta = 1$ 是被积函数的本性奇点. 如果特殊地取图 20 中的曲线为 C, 则积分

$$L_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-z\zeta/(1-\zeta)}}{1-\zeta} \zeta^{-\lambda-1} d\zeta \tag{71}$$

代表的解当 $\lambda = n$ 时就是拉盖尔多项式.

作变换

$$u = \frac{\zeta}{\zeta - 1},$$

(71) 成为

$$L_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-uz}}{u^{\lambda+1}} (1+u)^\lambda du, \tag{72}$$

C 现在是图 21 中的路线.

还有, 我们可以看出, 和在勒让德方程的情形一样, 联属于这里所讨论各方程的偏微分方程的每一个解都可以看作是原方程一族解的**母函数**. 特别言之, 我们所用的各特殊核的幂级数展开所定义的则是切比雪夫、埃尔米特和拉盖尔多项式.

7.5 拉普拉斯球面调和函数

拉普拉斯球面调和函数 $Y_n(\theta,\varphi)$ 是在第 5 章 5.8 节中作为球面上的微分方程

$$\Delta^*Y+\lambda Y=\frac{1}{\sin^2\theta}Y_{\varphi\varphi}+\frac{1}{\sin\ \theta}(\sin\ \theta Y_\theta)_\theta+\lambda Y=0 \tag{73}$$

对应于本征值 $\lambda=n(n+1)$ 的处处正规的本征函数而引进的. 我们看到, 函数 $r^nY_n=U_n$ 是一些直角坐标 x,y,z 的 n 次齐次多项式, 它们满足微分方程 $\Delta U=0$. 反过来, 微分方程 $\Delta U=0$ 的任一 n 次齐次整有理解 U_n, 除以 r^n 之后, 就成为一拉普拉斯球面调和函数. 由于一个 n 次齐次多项式有 $(n+1)(n+2)/2$ 个系数, 而条件 $\Delta U_n\equiv 0$ 又确定了这些系数间的 $(n-1)n/2$ 个线性齐次关系 —— 因为 ΔU_n 是 $(n-2)$ 次的齐次式 —— 所以 U_n 至少有

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}-\frac{(n-1)_n}{2}=2n+1$$

个独立系数; 也就是说, 至少有 $2n+1$ 个线性独立的 n 阶球面调和函数.

在本节中将证明上述条件都是相互独立的, 因之恰有 $2n+1$ 个线性独立的 n 阶球面调和函数. 还要证明, 这些函数 Y_n 确实代表我们的本征值问题的全部本征函数, 因之 $\lambda=n(n+1)$ 也就代表了所有本征值. 最后, 我们要把这些函数明白地用联属勒让德函数表示出来; 后者是我们在 7.3 节和第 5 章 5.10.2 小节中所熟悉的. 我们从最后这一点做起.

7.5.1 $2n+1$ 个 n 阶球面调和函数的确定

我们仍用熟悉的方法, 即设 $Y(\theta,\varphi)=p(\varphi)q(\theta)$, 来求得特殊的球面调和函数. 把它代到 $\lambda=n(n+1)$ 的方程 (73) 中去, 并用 "′" 来表示对 φ 的微分, 用一点来表示对 θ 的微分, 于是方程 (73) 成为

$$\frac{p''(\varphi)}{p(\varphi)}=-\frac{(\sin\ \theta\dot q)^{\cdot}\sin\ \theta}{q}-n(n+1)\sin^2\theta=-\rho,$$

其中 ρ 必须是一个常数. 由此我们得到 q 所满足的方程

$$(\sin\ \theta\dot q)^{\cdot}+\left(n(n+1)\sin\ \theta-\frac{\rho}{\sin\ \theta}\right)q=0,$$

其中参数 ρ 必须如此来确定, 使方程有一在 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 时都是正规的解. 令 $z=\cos\ \theta$ 并以一撇来表示对 z 的微分, 这方程立刻变为

$$((1-z^2)q')'+\left(n(n+1)-\frac{\rho}{1-z^2}\right)q=0,$$

边界条件为解在 $z=+1$ 和 $z=-1$ 都是正规的. 这问题是我们在第 5 章 5.10.2 小节中熟知的, 只不过形式略异. 我们已知它的解是 $\rho=h^2$, $q=P_{n,h}(z)$, 其中 $P_{n,h}(z)$ 是 h 阶的勒让德函数: $P_{n,h}(z)=(1-z^2)^{h/2}(d^h/dz^h)P_n(z)$, h 的可取值为 $0,1,2,\cdots,n$. 因 $p''(\varphi)+h^2p(\varphi)=0$, 所以 p 应当是 $a_h\cos\ h\varphi+b_h\sin\ h\varphi$. 又因为 $Y=pq$, 故

$$Y(\theta,\varphi)=(a_h\cos\ h\varphi+b_h\sin\ h\varphi)P_{n,h}(\cos\ \theta)$$

为 (73) 之一解. 因此函数

$$Y_n=\frac{a_{n,0}}{2}P_n(\cos\ \theta)+\sum_{h=1}^{n}(a_{n,h}\cos\ h\varphi+b_{n,h}\sin\ h\varphi)P_{n,h}(\cos\ \theta) \tag{74}$$

是一个 n 维的球面调和函数, 它线性地包含 $(2n+1)$ 个任意的参数. 不久就可以看明白, 这函数是可能的解中最为一般的解. 函数 $\cos\ h\varphi P_{n,h}(\cos\ \theta)$, $\sin\ h\varphi P_{n,h}(\cos\ \theta)$ 都是线性独立的, 因为它们互相正交; 它们称为 n 阶对称球面调和函数.

7.5.2　函数组的完备性

由早先的定理我们立刻看到, $\cos\ h\varphi P_{n,h}(\cos\ \theta)$, $\sin\ h\varphi P_{n,h}(\cos\ \theta)$ 这 $2n+1$ 个函数组成一球面上的完备正交函数组. 函数 $\sin\ h\varphi$, $\cos\ h\varphi$ 组成一个关于变量 φ 的完备组, 而函数 $P_{n,h}(z)$ 对于每一 h 也组成一关于 z 的完备组, 因为一个本征值问题的本征函数组全体总是完备的 (见第 6 章 6.3.1 小节). 现在只要回忆第 2 章 2.1.6 小节中的定理, 它给出了关于如何从单变量的两个完备组造出一个二元完备函数组的普遍法则, 那么就可以证明我们的函数组的完备性.

由这结果, 立刻知道方程 (73) 除此以外没有其他的本征函数, 因此也就不可能有数值 $n(n+1)$ 以外的本征值. 这就回答了所有上面提出的问题 (注意, 这是前述代数事实 —— 恰有 $2n+1$ 个线性独立函数 Y_n—— 的一个解析证明).

自然, 这事实也可以单从代数的出发点来证明. 我们来看任意一个 x,y,z 的 n 次齐次多项式 $u=\Sigma a_{rst}x^ry^sz^t(r+s+t=n)$. 每一系数, 除差一常数因子外, 可以表为微商 $\partial^nu/\partial x^r\partial y^s\partial z^t$ 的形式, 如果 $\Delta u=0$, 则每一形如 $\partial^mu/\partial x^\alpha\partial y^\beta\partial z^r$ 的微商都可以写成只含对 x 微分不超过一次的形式; 因为我们可以利用关系 $u_{xx}=-u_{yy}-u_{zz}$ 消去所有高于一次的 u 对 x 的微商 (例如 $\partial^3u/\partial x^2\partial y=-\partial^3u/\partial y^3-\partial^3u/\partial z^2\partial y$). 因此, 如果 $\Delta u=0$, 则所有 u 的系数都是 $2n+1$ 个系数 $a_{0,0,n},a_{0,1,n-1},\cdots,a_{0,n,0}$; $a_{1,0,n-1},a_{1,1,n-2},\cdots,a_{1,n-1,0}$ 的线性组合; 至于这 $2n+1$ 个系数则可任意选择.

7.5.3　展开定理

既然函数 (74) 代表了我们问题的全体本征函数, 则根据早先的定理 (参看, 例如第 5 章 5.14.5 小节), 任何一个在球面上连续并有直到二阶连续微商的函数 $g(\theta,\varphi)$

可以按这些球面调和函数展成一个绝对并一致收敛的级数

$$g(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_{n,0}P_n(\cos\ \theta)+\sum_{h=1}^{\infty}(a_{n,h}\cos\ h\varphi+b_{n,h}\sin\ h\varphi)P_{n,h}(\cos\ \theta)\right],$$

其中的系数 $a_{n,0}$, $a_{n,h}$, $b_{n,h}$ 可用第 5 章 5.10 节中的公式决定如下:

$$\begin{aligned}
a_{n,0}&=\frac{2n+1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi}g(\theta,\varphi)P_n(\cos\ \theta)\sin\ \theta d\theta d\varphi,\\
a_{n,h}&=\frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-h)!}{(n+h)!}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi}g(\theta,\varphi)P_{n,h}(\cos\ \theta)\cos\ h\varphi\ \sin\ \theta d\theta d\varphi,\\
b_{n,h}&=\frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-h)!}{(n+h)!}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi}g(\theta,\varphi)P_{n,h}(\cos\ \theta)\sin\ h\varphi\ \sin\ \theta d\theta d\varphi.
\end{aligned}\tag{75}$$

关于把这结果推广到更为一般的函数 $g(\theta,\varphi)$ 的问题, 不需要在此讨论.

7.5.4 泊松积分

现在, 我们可以把势论中关于一个半径为 1 的球的边值问题 —— 边值为 $g(\theta,\varphi)$ —— 明显地写成

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}r^n\left[a_{n,0}P_n(\cos\ \theta)+\sum_{h=1}^{n}(a_{n,h}\ \cos\ h\varphi+b_{n,h}\sin\ h\varphi)P_{n,h}(\cos\ \theta)\right].$$

引用积分表示式 (75), 我们可以把求和及积分的次序互换, 因为当 $r\leqslant r_0<1$ 时和数的收敛是一致的. 这时, 和数可以加起来成一有限形式. 最简单的算法是先设 $\theta=0$, $\varphi=0$, 然后注意, 所得结果应当对于任何 θ,φ 都成立, 原因是, 球面上任何点都可以选作北极.

因 $P_n(1)$=1, $P_{n,h}(1)=0(h=1,2,\cdots,n)$, 我们得

$$4\pi u(r,0,0)=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)r^nP_n(\cos\ \theta)\right\}g(\theta,\varphi)\sin\ \theta d\theta d\varphi.$$

从定义方程

$$\sum_{n=0}^{\infty}h^nP_n(z)=(1-2hz+h^2)^{-1/2},$$

借助递推关系公式 (49), 很容易推出关系

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)h^nP_n(z)=\frac{1-h^2}{(1-2hz+h^2)^{3/2}},$$

利用它可以把前面的和数加成有限的形式. 加好之后再移动球的北极, 我们得到下列普遍式:

$$4\pi u(r,\theta,\varphi)=(1-r^2)\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi}\frac{g(\theta',\varphi')\sin\theta' d\theta' d\varphi'}{\{r^2-2r[\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')]+1\}^{3/2}}. \tag{76}$$

这就是所谓泊松积分, 它把在球内点上的势函数用边值来表示, 而不再明显地与球面调和函数关联. 在卷 II 中, 我们还要从势论的体系来讨论这积分.

7.5.5　麦克斯韦–西尔维斯特的球面调和函数表示式

麦克斯韦[1)]给过球面调和函数一个与位势的物理意义相连而完全不同于上的表式. 在本节中我们将根据麦克斯韦的基本概念和西尔维斯特的补充来研究球函数的特性, 并由此使理论得到新的发展.

先从集中在原点的一单位质量所产生的位势: $\frac{1}{r}=1\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 开始. 我们注意到, 势函数 u 的任何级微商 $v=\partial^n u/\partial x^\alpha\partial y^\beta\partial z^\gamma(\alpha+\beta+\gamma=n)$ 仍旧是势方程 $\Delta v=0$ 的一个解, 因为由 $\Delta u=0$ 微分, 我们可得

$$0=\frac{\partial}{\partial x}\Delta u=\Delta\frac{\partial u}{\partial x},$$

等等. 因此, 如果 a, b, c 是常数, 则函数

$$a\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+b\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+c\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}$$

也是一个势函数. 用符号线性式

$$L=a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\frac{\partial}{\partial z},$$

我们可以把上式写成 $L\frac{1}{r}$ 或

$$\alpha\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\nu},$$

其中 $a=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, $\partial/\partial\nu$ 代表沿 ν 方向的微分, ν 的方向余弦与 a,b,c 成正比[2)]. 物理上, 这是一个偶极矩为 α, 方向为 ν 的偶极子的势. 更普遍一点, 表示式

$$u=C\frac{\partial^n\frac{1}{r}}{\partial\nu_1\partial\nu_2\cdots\partial\nu_n}=CL_1L_2\cdots L_n\frac{1}{r} \tag{77}$$

1) A Treatise on Electricity and Magnetism. Vol. 1, pp. 179–214, 2nd ed.. Oxford: Clarendon Press, 1881.

2) 如果容许 a,b,c 取复数值, 则对于满足 $a^2+b^2+c^2=0$ 的三数自然应予以必要的注意.

与一"多极子"的势相应, 多极子的轴为 $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n$. L_i 代表 $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ 这些算符所组成的线性式, 其中系数 a_i, b_i, c_i 确定 ν_i 轴的方向. 很容易看出

$$u = U_n(x, y, z) r^{-2n-1}, \tag{78}$$

其中 U_n 是 x, y, z 的一个 n 次齐次多项式. 函数 U_n 本身满足势方程 $\Delta U_n = 0$, 这可以从下述普遍定理看出. 定理: *如果$u(x, y, z)$是势方程的一个解, 则$(1/r) \times u(x/r^2, y/r^2, z/r^2)$也是一个解*[1]. 当 $r = 1$ 时, 按照以前的定义 (第 5 章 5.9.1 小节), $U_n(x, y, z)$ 是 n 阶球面调和函数.

由于 (77) 中所出现的 n 个方向中的每一个都由两个参数决定, 而 u 本身又有一任意常数因子, 所以总起来共有 $2n+1$ 个任意常数. 因此, 可以猜想, 所有的 n 阶球面调和函数事实上都可以表成 (77) 的形式. 我们将严格地来证明这事实. 我们先把 $2n+1$ 个线性独立的对称球面调和函数 $P_{n,h}(\cos\theta) \sin h\varphi, P_{n,h}(\cos\theta) \cos h\varphi$ 用多极势来表示. 随后得知, 任一 n 阶球面调和函数是一个多极势的和. 最后我们证明凡若干个这种多极势的和皆等于一单个多极子的势, 这单个多极子可以用简单的几何作图法求得.

本节第 1 小节中的 $2n+1$ 个对称球面调和函数很容易从讨论对称多极子得到. 设方向为 $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n$ 的 n 个轴在 $x-y$ 平面上这样对称地排列着: 任何相邻二轴间的夹角为 $2\pi/n$. 令

$$\frac{\partial^n \dfrac{1}{r}}{\partial\nu_1 \partial\nu_2 \cdots \partial\nu_n} = u_n = U_n r^{-2n-1}, \tag{79}$$

并注意, 当球绕 z 轴转一 $2\pi/n$ 之角时左方不变, 我们立刻看出, 上式中的 n 阶球面调和函数

$$u_n r^{n+1} = U_n r^{-n} = Y_n(\theta, \varphi)$$

(它必然不恒等于零)[2], 看作 φ 的函数时, 是以 $2\pi/n$ 为周期的函数. 根据本节第 3 小节, 每一 n 阶球面调和函数都可以表为

$$\sum_{h=0}^{n} (a_{n,h} \cos h\varphi + b_{n,h} \sin h\varphi) P_{n,h}(\cos\theta).$$

因此 $Y_n(\theta, \varphi)$ 具有下述形式

$$\begin{aligned} Y_n(\theta, \varphi) &= [a_{n,n} \cos n\varphi + b_{n,n} \sin n\varphi] P_{n,n}(\cos\theta) + a_{n,0} P_{n,0}(\cos\theta) \\ &= \alpha \cos n(\varphi - \varphi_0) P_{n,n}(\cos\theta) + \beta P_{n,0}(\cos\theta), \end{aligned} \tag{80}$$

因为 (80) 中的这两项是仅有的, 对于 φ 说来是以 $2\pi/n$ 为周期的两项[3]. $P_{n,0}(\cos\theta)$

1) 从势方程的极坐标表示式立刻可以证明这定理 (见第 4 章 4.8.2 小节).

2) 多极子的势不能恒等于零, 这一点将在 416 页上证明.

3) 由 $Y_n(0, \varphi) = 0, P_{nn}(1) = 0$ 及 $P_n, 0(1) = 1$ 知 $\beta = 0$.—— 译者

这一项可以单另表成 r^{-1} 的微商. 我们有

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{(-1)^n n!}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta). \tag{80'}$$

(80′) 的右方是 $r^{-n-1}P_{n,0}(\cos\theta)$ 的倍数, 这一事实立刻可以从上面的说明得知, 其常数因子则可由递推公式 (49) 用归纳法算出.

要得到其余的 n 阶球面调和函数的多极子表示, 我们注意, 由于 (80) 的原故, 势 u_n 可以分解成

$$u_n=f(x,y)g\left(\frac{z}{r}\right)r^{-n-1}$$

其中 $f(x,y)=\alpha\cos n(\varphi-\varphi_0), f(0,0)=0$. 在这式中以 h 代 n, 然后对 z 微分 $n-h$ 次, 结果所得的势函数 $u_{n,h}$ 仍有下列形式:

$$u_{n,h}=f(x,y)g\left(\frac{z}{r}\right)r^{-n-1}.$$

由此可得结论: n 阶球面调和函数

$$Y_n(\theta,\varphi)=u_{n,h}r^{n+1}$$

必须具有 $\alpha\cos h(\varphi-\varphi_0)\omega(\theta)$ 的形式. 因此, 根据本节第 1 小节, 它必然等于

$$\text{常数}\times\cos h(\varphi-\varphi_0)P_{n,h}(\cos\theta). \tag{81}$$

反过来, 因为轴中之一可以任意选择, 所以这族函数中的每一个都可以用上述程序求得.

由于根据本节第 2 小节, 每一 n 阶球面调和函数可以表为 (81) 式这样的 $2n+1$ 个球面调和函数之和, 所以我们立刻可以从多极子的势和

$$u=\sum_{i+k+l=n}a_{ikl}\frac{\partial^n\frac{1}{r}}{\partial x^i\partial y^k\partial z^l} \tag{82}$$

来求得每一 n 阶球面调和函数. 至于, 反过来, 每一这种和数都是一个 n 阶球面调和函数这一点, 根据 7.5.1 小节乃是很显然的. 事实上, 当我们令各系数 a_{ikl} 跑过所有可能的数值时, 任何一个特殊的球面调和函数都出现无穷次. 下面我们立即来详尽地说明这一点.

我们先证明, 每一个上述形式的和数是一个具有适当的轴的单个多极子的势. 为此我们引进一种符号写法: 以变数 ξ,η,ζ 代表微分符号 $\partial/\partial x,\partial/\partial y,\partial/\partial z$ 而把我们的势写成 H/r; H 是一个 n 次多项式

$$H(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i+k+l=n}a_{ikl}\xi^i\eta^k\zeta^l.$$

根据 ξ,η,ζ 的意义, 函数 $(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)/r$ 恒等于零, 因此我们有 $H/r = H_1/r$, 只要 $H - H_1$—— 作为变数 ξ,η,ζ 的一个多项式 —— 可以写式 $Q\cdot(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)$, 其中 Q 代表 ξ,η,ζ 的一个 $(n-2)$ 次的齐次多项式.

在这里, 我们需要西尔维斯特所用的一个简单的定理[1]: *给定任一 n 次的齐次多项式 $H(\xi,\eta,\zeta)$, 我们可以定出 n 个线性式 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 和一个 $n-2$ 次的多项式 $Q(\xi,\eta,\zeta)$ 使下述关系成立:*

$$H = C\cdot L_1L_2\cdots L_n + Q\cdot(\xi^2+\eta^2+\zeta^2).$$

如果 H 是实的, 并要求各线性式中的系数是实数, 则除常数因子外, 各线性式 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 唯一地确定. 这一定理的证明, 以及这些 L_i 的几何特征, 都留到这一节的末尾去, 以免打断思路. 从西尔维斯特的定理, 立刻可以得到上面所作关于用一单个多极子来表示势 (82) 的论断. 因为如果 ν_i 表示垂直于平面 $L_i = 0$ 的轴向, 我们得到

$$u = H\frac{1}{r} = C\frac{\partial^n \frac{1}{r}}{\partial\nu_1\partial\nu_2\cdots\partial\nu_n},$$

而这正是我们所要的表示式.

上面已经把我们的理论的要点都指出来了. 我们还可以从一个稍为不同的角度来讨论这问题. 从这种角度出发, 我们可以避免依赖本节第 1、2 小节中的结果, 而强调出我们定理的纯代数的特性, 虽然在这样做时我们放松了显性表示式的一面. 首先我们要指出, 当且仅当差数 $H^*(\xi,\eta,\zeta) = H(\xi,\eta,\zeta) - H_1(\xi,\eta,\zeta)$ 可以被 $(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)$ 除尽时, 函数 H/r 和 H_1/r 才恒等. 像已经指出的, 这个断言的第一部分是显然的. 要证明第二部分, 我们必须肯定, 从关系 $H^*/r = 0$ 可以推断齐次多项式 $H^*(\xi,\eta,\zeta)$ 能被 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2$ 除尽[2]. 根据西尔维斯特定理,

$$H^* = C\cdot L_1^*L_2^*\cdots L_n^* + Q^*\cdot(\xi^2+\eta^1+\zeta^2), \tag{83}$$

其中 $L_1^*, L_2^*, \cdots, L_n^*$ 代表线性式, 在 H^* 是实的情形可以假定它们也是实的. 如果线性式之一 L_i 恒等于零, 则断言得证. 反之, 如果没有一个线性式恒等于零, 我们有

$$H^*\frac{1}{r} = C\cdot L_1^*L_2^*\cdots L_n^*\frac{1}{r} = C\frac{\partial^n\frac{1}{r}}{\partial\nu_1^*\partial\nu_2^*\cdots\partial\nu_n^*}.$$

由于原点是它的奇点, 所以这式右方的多极势只在 $C = 0$ 时才会在整个空间等于零. 否则, 对于适当的 $m, 0 \leqslant m < n$, 我们将有

---

1) J. J. Sylvester. Note on Spherical Harmonics. Phil. Mag., Vol. 2m, 1876, 291–307 and 400. Collected Mathematical Papers, Vol. 3, 37–51. Cambridge: Cambridge University Press, 1909.

2) 见 417 页脚注 2 所引的 A. Ostrowski 的工作.

$$\frac{\partial^m \frac{1}{r}}{\partial \nu_1 \cdots \partial \nu_m} = v_m \neq 0, \quad \frac{\partial v_m}{\partial \nu_{m+1}} = 0,$$

因而 v_m 将在每一平行于 ν_{m+1} 轴的线上为常数. 但这是不可能的, 因为原点是奇点. 因此我们有

$$H^*(\xi,\eta,\zeta) = Q^*(\xi,\eta,\zeta) \cdot (\xi^2+\eta^2+\zeta^2),$$

这就是我们所要证明的.

很清楚, 每一 n 次的齐次函数 $H(\xi,\eta,\zeta)$ 可以唯一地表为

$$H(\xi,\eta,\zeta) = G_n(\eta,\zeta) + \xi G_{n-1}(\eta,\zeta) + (\xi^2+\eta^2+\zeta^2) \cdot Q(\xi,\eta,\zeta), \tag{84}$$

这里的 G_n 代表只含 η,ζ 的一个 n 次齐次函数, G_{n-1} 是一个 $n-1$ 次的齐次函数, Q 是一个 $n-2$ 次的齐次函数. 当且仅当相属函数 $G_n, G_{n-1}, \overline{G}_n, \overline{G}_{n-1}$ 满足关系

$$G_n = \overline{G}_n, \quad G_{n-1} = \overline{G}_{n-1}$$

时, 两个 n 次函数 $H(\xi,\eta,\zeta)$ 和 $\overline{H}(\xi,\eta,\zeta)$ 之差才能被 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2$ 除尽. 既然在函数 G_n 和 G_{n-1} 中一共有 $2n+1$ 个系数听凭我们处置, 所以适才证明的引理表明, 恰有 $2n+1$ 个线性独立. 形如 H/r 的势. 因此, 每一个 n 次的球面调和函数都是若干多极子势之和. 要真正得出球面调和函数这种形式的表示式, 则除了单纯的存在证明之外, 还必须用到类似于上面叙述过的论证.

最后, 我们用代数几何中的一个简单概念来证明西尔维斯特的定理. 根据毕祖定理, 在 ξ,η,ζ 空间的 n 次锥面 $H(\xi,\eta,\zeta)=0$ 与绝对锥面 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=0$ 恰在 $2n$ 条边上相交; 其中所有重复的相交处都已恰当地给予了比重. 把这 $2n$ 条边用方程

$$L_i(\xi,\eta,\zeta) = a_i\xi + b_i\eta + c_i\zeta = 0 (i=1,2,\cdots,n)$$

所表示的 n 个平面这样连起来, 使每一个平面包含两条边, 而每一边只取到一次. 重复的边缘则按相重的次数出现[1]. 现在来看含两参数 λ 和 μ 的 n 级锥面束:

$$\lambda H + \mu L_1 L_2 \cdots L_n = 0.$$

属于这束的每一锥面都同绝对锥面相交于 $2n$ 条给定的边. 任意选一个属于上述 $2n$ 条边的绝对锥面的边. 我们这样来决定比值 λ/μ, 使 n 次锥面

1) 我们可以不诉之于较难的一般代数消去理论而把这规则的意义弄得更精确些: 令

$$\xi = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \eta = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \zeta = i = \sqrt{-1} \tag{$*$}$$

而使 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=0$ 单值化. 变换 $(*)$ 把 n 次齐次函数 $H(\xi,\eta,\zeta)$ 化为一个 $2n$ 次的有理函数 $H^*(t)$. 后者的零点决定 $H(\xi,\eta,\zeta)=0$ 及 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=0$ 两锥面的公共边. 如果 $H^*(t)$, 作为 t 的函数, 有一 k-重零点, 我们就说这两锥面有一 k 重的公共边. 现在要这样来选择线性型 $L_1, L_2, \cdots, L_n$, 使锥面 $H=0$ 同绝对锥面的每一 k- 重相交曲线同时也是平面族 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 的相交 k 重的边. 在任何情形下这规则都能实现是显而易见的.

$$\lambda H + \mu L_1 L \cdots L_n = 0$$

同时也通过这条边. 这总是可能的, 并且由此得到的是异于零和无穷的比值 λ/μ. 于是这新的 n 次锥面就同一个二次锥面有多于 $2n$ 条公共的交线. 这是不可能的, 除非它把这二次锥面完全含在里面. 这种情形当且仅当方程的左方含因子 $\xi^2+\eta^2+\zeta$ 时才发生[1], 也就是说,

$$\lambda H + \mu L_1 L_2 \cdots L_n = Q \cdot (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2).$$

这样就完成了西尔维斯特定理的证明[2]. 同时我们还给了与一球面调和函数相联属的多极子的各个轴一个简单的几何解释.

关于实值的问题, 我们必须注意: 虽然对于实 H 所有的交线都是虚的, 但它们是成对的复值共轭; 因此只有一种方法把它们投射到 n 个实平面上去.

7.6 渐近展开

我们常要用到当变量或参量数值很大时函数的渐近表示式. 在前一章中我们讨论了施图姆–刘维尔和贝塞尔函数的渐近行为, 但限制变量于实数域. 在本节中, 我们要讨论一些得到这种表示式的方法, 主要依靠用复变数和复变积分.

7.6.1 斯特林公式

作为渐近展开的第一个例子, 我们来看斯特林公式. 我们将用一个以后常要用到的方法来推出这公式; 不过这里并不出现复变积分. 当 $s>0$ 时我们有

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty t^s e^{-t} dt$$

1) 这断言的第一部分是显然的, 它的第二部分可以最简单地证明如下: 把反给的齐次型按 (84) 写成

$$G_n(\eta,\zeta) + \xi G_{n-1}(\eta,\zeta) + (\xi^2+\eta^2+\zeta^2)Q(\xi,\eta,\zeta).$$

现在如果 η,ζ 是任意一对使 $\eta^2+\zeta^2 \neq 0$ 的数值, 则两方程

$$0 = G_n(\eta,\zeta) + \sqrt{-(\eta^2+\zeta^2)}G_{n-1}(\eta,\zeta)$$

和

$$0 = G_n(\eta,\zeta) - \sqrt{-(\eta^2+\zeta^2)}G_{n-1}(\eta,\zeta)$$

同时成立. 我们立得

$$G_n(\eta,\zeta) = G_{n-1}(\eta,\zeta) = 0.$$

亦即 G_n 和 G_{n-1} 对任一对 η,ζ 的值而言皆为零 $(\eta^2+\zeta^2\neq 0)$; 因此它们对 η 和 ζ 而言恒等于零.

2) 这一代数定理是西尔维斯特在前面所引的文章中不经证明而用过的. 阿・奥斯特洛夫斯基指出有证明的必要, 见 Ostrowski. Mathematische Miszellen, I, Die Maxwellsche Erzeugung der Kugelfunktionen, Deutsch. Math. -Ver.Jahresber., Vol. 33, 1925, 245–251.

$$= s^{s+1}\int_0^\infty \tau^s e^{-s\tau}d\tau \qquad (t = s\tau)$$

$$= s^{s+1}e^{-s}\int_0^\infty e^{-s(\tau-1-\log\tau)}d\tau$$

$$= s^{s+1}e^{-s}\int_0^\infty e^{-sf(\tau)}d\tau \qquad (f(\tau) = \tau - 1 - \log\tau);$$

被积函数当 $\tau = 1$ 时等于 1, 对于所有其他数值则随 s 的增加而趋于零. 因此, 我们可以料想, 当 s 很大时只有紧接 $\tau = 1$ 的邻近才实质上对积分值有贡献. 准此, 我们把这积分代以在区间 $1-\varepsilon$ 到 $1+\varepsilon$ 上的积分 $\left(0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}\right)$, 首先估计由于略去 0 到 $1-\varepsilon$ 和 $1+\varepsilon$ 到 ∞ 的积分所引起的误差. 对于 $\dfrac{1}{2} \leqslant \tau \leqslant 1$ 我们有

$$\tau - 1 - \log\tau = \int_\tau^1 \left(\frac{1}{u} - 1\right)du \geqslant \int_\tau^1 (1-u)du$$
$$= \frac{1}{2}(\tau-1)^2 \geqslant \frac{1}{8}(\tau-1)^2,$$

而对于 $1 \leqslant \tau \leqslant 4$, 有

$$\tau - 1 - \log\tau = \int_1^\tau \left(1 - \frac{1}{u}\right)du \geqslant \frac{1}{4}\int_1^\tau (u-1)du = \frac{1}{8}(\tau-1)^2.$$

在积分

$$\int_0^{1-\varepsilon} e^{-sf(\tau)}d\tau, \quad \int_{1+\varepsilon}^4 e^{-sf(\tau)}d\tau$$

中, 把被积函数代以它们在 $1\mp\varepsilon$ 两点所取的最大值, 然后又以上界 $e^{-s\varepsilon^2/8}$ 来代替它们. 我们于是得到

$$\int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^4 \leqslant 4e^{-s\varepsilon^2/8}.$$

但对于 $\tau \geqslant 4$ 我们有 $\tau - 1 - \log\tau \geqslant \dfrac{3\tau}{4} - \log\tau > \tau/4$. 因此当 $s > 4$ 时

$$\int_4^\infty e^{-s(\tau-1-\log\tau)}d\tau < \int_4^\infty e^{-s\tau/4}d\tau < e^{-s} < e^{-s\varepsilon^2/8}.$$

令 $\varepsilon = s^{-2/5}$, 得

$$e^s s^{-s-1}\Gamma(s+1) = \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} e^{-sf(\tau)}d\tau + O(e^{-s^{1/5}/8})^{1)}.$$

为了找到右方积分的一个近似式, 我们利用关系

$$f(\tau) = \frac{(\tau-1)^2}{2} + (\tau-1)^3\psi(\tau),$$

1) 此处符号 $O(g(s))$ 的意义与第 5 章 5.11 节中的相同.

其中 $\psi(\tau)$ 是一个在区间 $1/2 \leqslant \tau \leqslant 3/2$ 中的正规函数, 它在这区域中的绝对值不超过一有限的界 M. 从这关系, 我们得到, 当 $1-\varepsilon \leqslant \tau \leqslant 1+\varepsilon$ 时

$$e^{-s(\tau-1)^2/2}e^{-Ms-1/5} \leqslant e^{-sf(\tau)} \leqslant e^{-s(\tau-1)^2/2}e^{Ms-1/5},$$

以及

$$e^{-sf(\tau)} = e^{-s(\tau-1)^2/2}(1+O(s^{-1/5})).$$

由此,

$$\begin{aligned}\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} e^{-sf(\tau)}d\tau &= (1+O(s^{-1/5}))\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{-su^2/2}du \\ &= (1+O(s^{-1/5}))\sqrt{\frac{2}{s}}\int_{-\varepsilon\sqrt{s/2}}^{+\varepsilon\sqrt{s/2}} e^{-v2}dv \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{s}}(1+O(s^{-1/5}))(1+O(e^{-s\varepsilon^2/2})) \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{s}}(1+O(s^{-1/5})),\end{aligned}$$

换言之,

$$\Gamma(s+1) = s^{s+1/2}e^{-s}\sqrt{2\pi}(1+O(s^{-1/5})). \tag{85}$$

因此有

$$\Gamma(s+1) \sim \sqrt{2\pi s}s^s e^{-s}. \tag{86}$$

7.6.2 当变量值大时汉克尔和贝塞尔函数的渐近计算

用同样的方法我们可以从积分式 (见 7.2.5 小节)

$$H_\lambda^1(z)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)(z/2)^\lambda}{\pi i\Gamma(1/2)}\int e^{iz\tau}(\tau^2-1)^{\lambda-1/2}d\tau$$

得到一个汉克尔函数当 $|z|$ 很大而辐角在 $-\pi/2+\delta < \arg z < \pi/5+\delta$ 之间时的渐近估计; 这里的积分路线是图 13 中右方的那条线路, z 必须满足 $-\pi/2 < \arg z < \pi/2$, 而当 $\tau > 1$ 时 $\log\,(\tau^2-1)$ 取实数值. 我们可以把 τ 平面上的割缝连同包住它们之一的积分路线一起转到 $\pi/2-\arg\,z$ 的方向上, 而不改变积分之值. 如果现在作代换

$$\tau - 1 = iu/z,$$

则 u 平面将被两条沿长平方向分别从 0 和 $2iz$ 到无穷的割缝割裂开, 新的积分路线则围绕沿正实轴的割缝, 在上半平面由右至左, 在下半平面则由左至右. 如果我们把 $u^{\lambda-1/2}$ 了解为在割开的平面上正实轴的下岸为正的唯一确定的单值分支, 而把 $(1+iu/2z)^{\lambda-1/2}$ 了解为当 $u=0$ 时等于 1 的分支, 我们有

$$H_\lambda^1(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}{\pi\sqrt{2\pi z}} e^{i(z+\pi\lambda/2-\pi/4)} \int e^{-u} u^{\lambda-1/2}\left(1+\frac{iu}{2z}\right)^{\lambda-1/2} du.$$

现在如果 $\mathrm{Re}(\lambda-1/2) > -1$, 我们可以紧缩绕 $u=0$ 的环路, 把沿这环路的积分变为沿正实轴下岸从 0 到 ∞ 的积分减去沿上岸从 ∞ 到 0 的积分. 但在后者中, 比起前者来, 多乘一 $e^{-2\pi i(\lambda+1/2)}$. 于是, 应用 Γ 函数的补充分式, 稍加计算, 得

$$H_\lambda^1(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \frac{e^{i(z-\lambda\pi/2-\pi/4)}}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-u} u^{\lambda-1/2}\left(1+\frac{ui}{2z}\right)^{\lambda-1/2} du. \tag{87}$$

最后一因子可用带柯西余项 (以 R 表示) 的泰勒级数写为

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{ui}{2z}\right)^{\lambda-1/2} =& \sum_{\nu=0}^{p-1}\binom{\lambda-\frac{1}{2}}{\nu}\left(\frac{ui}{2z}\right)^\nu \\ &+p\binom{\lambda-\frac{1}{2}}{p}\left(\frac{ui}{2z}\right)^p\int_0^1(1-t)^{p-1}\left(1+\frac{tui}{2z}\right)^{\lambda-1/2-p} dt.\end{aligned} \tag{88}$$

注意由此得一有用的关于余项的估值.

设 $\mathrm{Re}\left(\lambda-\frac{1}{2}-p\right) < 0$(只要 p 够大, 这总是可能的), 当 u 为正数时我们有

$$\begin{aligned}&\left|1+\frac{tui}{2z}\right| > \sin\delta, \quad \left|\arg\left(1+\frac{tui}{2z}\right)\right| < \pi, \\ &\left|\left(1+\frac{tui}{2z}\right)^{\lambda-1/2-p}\right| < e^{\pi|\mathscr{I}_m(\lambda)|}(\sin\delta)^{\mathrm{Re}(\lambda-1/2-p)} = A_p,\end{aligned}$$

其中 A_p 与 z 和 t 无关. 把 (88) 代入 (87) 中, 逐项积分, 得

$$\begin{aligned}H_\lambda^1(z) =& \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \frac{e^{i(z-\lambda\pi/2-\pi/4)}}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)} \\ &\cdot\left[\sum_{\nu=0}^{p-1}\binom{\lambda-\frac{1}{2}}{\nu}\Gamma\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{i}{2z}\right)^\nu + R_p\right]\end{aligned} \tag{89}$$

而

$$|R_p| \leqslant A_p\left|p\binom{\lambda-\frac{1}{2}}{p}\left(\frac{i}{2z}\right)^p\left\{\int_0^1(1-t)^{p-1}dt\int_0^\infty e^{-u}|u^{\lambda-1/2+p}|du\right\}\right|,$$

$$R_p = O(|z|^{-p}).$$

用类似于上述的方法, 作代换 $\tau + 1 = iu/z$, 我们得到

$$H_\lambda^2(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \frac{e^{-i(z-\lambda\pi/2-\pi/4)}}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)} \cdot \left[\sum_{\nu=0}^{p-1} \binom{\lambda-\frac{1}{2}}{\nu} \Gamma\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{i}{2z}\right)^\nu + S_p\right], \tag{90}$$

$$S_p = O(|z|^{-p}).$$

由此, 有

$$\begin{aligned} J_\lambda(z) =& \frac{1}{2}(H_\lambda^1(z) + H_\lambda^2(z)) \\ =& \frac{1}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \sum_{\nu=0}^{p-1} \binom{\lambda-\frac{1}{2}}{\nu} \frac{\Gamma\left(\lambda+\nu+\frac{1}{2}\right)}{(2z)^\nu} \\ & \cdot \left\{ \begin{array}{l} (-1)^{\nu/2}\cos\left(z-\frac{\lambda\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \\ (-1)^{(\nu+1)/2}\sin\left(z-\frac{\lambda\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \end{array} \right\} + O(|z|^{-p-1/2}), \end{aligned} \tag{91}$$

花括弧中上边的表示式用在 ν 是偶数的情形, 下边用在 ν 是奇数的情形.

这展开的第一项给出

$$J_\lambda(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\lambda\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) + O(|z|^{-3/2}), \tag{92}$$

它确定了第 5 章 5.11.2 小节中的极限值:

$$\alpha_\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad \delta_\infty = -\frac{\lambda\pi}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

7.6.3 马鞍点法

在很多情形中, 可以用一种更为一般的方法, 称为马鞍点法来定积分的渐近值. 我们考虑在路线 C 上的积分

$$\int_C e^{zf(\tau)}d\tau,$$

在 C 上当 τ 趋向端点时 $f(\tau)$ 的实数部分趋于 $-\infty$. 对于 z 的大正数值而言, 积分路线的较远部分, 换言之, 那些与 $\mathrm{Re}f(\tau)$ 的大负实数值相应的部分, 对积分的贡

献随 z 的增大而变小. 我们将设法把复平面上的积分路线变形, 使那当 z 很大时对积分作重要贡献的部分缩小到某一点的邻近. 为此, 我们必须选一积分路线, 使在其上 $\mathrm{Re}f(\tau)$ 尽可能快地从一极大值在两方迅速下降. 如果令 $\tau = u + iv$ 而把 $\mathrm{Re}f(\tau)$ 设想为位于 u, v 平面上方的一曲面 —— 此曲面的曲率在每一点都是负的 —— 则只要能够在马鞍点上引这样一条路线, 使在该点的两方路线尽可能陡地降到很大的 $\mathrm{Re}f(\tau)$ 的负值, 那么我们的目的就达到了. 在这种情形下, 当 z 取很大的正值时, 只有马鞍点的邻域才重要.

最陡下降曲线是从水平曲线 (等值线)$\mathrm{Re}f(\tau) =$ 常数的正交轨道得到的; 这些正交轨道的方程就是 $\mathscr{I}_m f(\tau) =$ 常数. 在马鞍点处函数 $\mathrm{Re}f(\tau)$ 和 $\mathscr{I}_m f(\tau)$ 沿曲线 $\mathscr{I}_m f(\tau)$ 的微商都等于零, 所以 $f(\tau)$ 的微商 $f'(\tau)$ 也等于零, 而马鞍点的位置可以从方程

$$f'(\tau) = 0$$

的根中找到.

斯特林公式的推导就是这种方法的一例; 其中实轴是从马鞍点下降得最陡的路线.

7.6.4　应用马鞍点法计算大参量和大变量的汉克尔函数和贝塞尔函数

我们首先用这方法来计算, 当 a 是实数及 λ 是大的正数时, 函数

$$H_\lambda^1(a\lambda) = -\frac{1}{\pi}\int_{L_1} e^{\lambda(-ia\sin\tau + i\tau)}d\tau$$

的渐近值. 把指数中 λ 的系数的实部和虚部分开:

$$-ia\sin\tau + i\tau = f(\tau) = a\cos u\sinh v - v + i(u - a\sin u\cosh v).$$

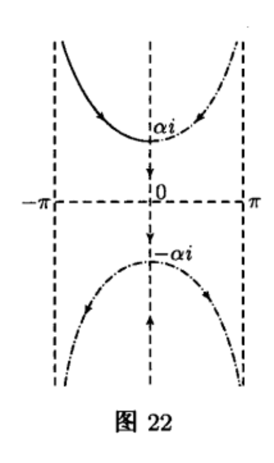


图 22

方程 $a\cos\tau = 1$ 的根是马鞍点, $u - a\sin u\cosh v =$ 常数这些曲线应当通过它们. 我们试组合这些曲线用以形成一适当的积分路线.

(1) 如果 $a < 1$, 譬如 $a = 1/\cosh\alpha(\alpha > 0)$, 这时马鞍点为 $\tau = \pm\alpha i$, 相应曲线为 $u - a\sin u\cosh v = 0 - a\sin 0\cdot\cosh v = 0$* 它们是由虚轴 $u = 0$ 和通过 $\tau = \pm\alpha i$ 分别由上或由下趋近于直线 $u = \pm\pi$ 的任一分支组成的. 我们把它们画在图 22 中, 其中 $f(\tau)$ 实部的增向由箭头表示. 沿向上的方向由曲线 $\mathscr{I}_m f(\tau) = 0$ 组成的线路所给出的显然是 H_λ^1; 因为我们可以把它变形为 L_1, 所差的只是从一任意高度开始的部分, 这部分

* 前面的等式是译者加的.

位于条件区域 $-\pi \leqslant u \leqslant -\pi+\varepsilon$ 中, 因此, 它对于积分值的贡献是任意小的. $-ia\sin\tau+i\tau$ 的实部在 $\tau=-\alpha i$ 有极大值 $\alpha-\tanh\alpha$. 我们仍如前 (7.6.1 小节) 用从 $(-\alpha-\varepsilon)i$ 到 $(-\alpha+\varepsilon)i(\varepsilon=\lambda^{-2/5})$ 的直线 L' 代替 L_1. 如果现在把剩下的积分路线分成两个相邻的有限部分和两个伸到无穷去的部分, 我们就可以找到完全与第 1 小节中所推出的估计值相应的估计:

$$\int_{-i\infty}^{(-\alpha-\varepsilon)i} e^{\lambda f(\tau)}d\tau+\int_{(-\alpha+\varepsilon)i}^{-\pi+i\infty} e^{\lambda f(\tau)}d\tau=e^{\lambda(a-\operatorname{tag} ha)}O(e^{-c_1^{\lambda\varepsilon^2}}),$$

其中 c_1(以及下面出现的 c_2, c_3 等) 代表一与 λ 无关 (因之也与 ε 无关) 的正的常数. 这就是说, 在两有限的区间上, 被积函数的绝对值最多不过等于它在 $(-\alpha\pm\varepsilon)i$ 两点上的值, 而对于这些值前面所指出的近似是成立的. 在无穷部分上, 很容易找到被积函数的绝对值形如 $e^{-c\lambda(s+c')}$ 的上界, 其中 s 是积分路线的弧长, c 和 c' 是与 ε 和 λ 无关的正的常数. 这些部分对于整个积分的贡献有估计值为 $O(e^{-c_1\lambda})$. 但在 L' 本身这一部分上,

$$\left|f(\tau)-(\alpha-\tanh\alpha+\frac{1}{2}f''(-\alpha i)(\tau+\alpha i)^2)\right|<c_2\varepsilon^3$$

$$f''(-\alpha i)=\tanh\alpha;$$

因此

$$e^{\lambda f(\tau)}=e^{\lambda[\alpha-\tanh\alpha+\tanh\alpha((\tau+\alpha i)^2/2)]}(1+O(\lambda^{-1/5})),$$

$$\begin{aligned}\int_{(-\alpha-\varepsilon)i}^{(-\alpha+\varepsilon)i} e^{\lambda f(\tau)}d\tau&=e^{\lambda(\alpha-\tanh\alpha)}\int_{(-\alpha-\varepsilon)i}^{(-\alpha+\varepsilon)i} e^{\lambda\tanh\alpha(\tau+ai)^2/2}d\tau(1+O(\lambda^{-1/5}))\\&=i\sqrt{\frac{2}{\lambda\tanh\alpha}}e^{\lambda(\alpha-\tanh\alpha)}\int_{-\varepsilon\sqrt{(\lambda\tanh\alpha)/2}}^{\varepsilon\sqrt{(\lambda\tanh\alpha)/2}} e^{-u^2}du(1+O(\lambda^{-1/5}))\\&=i\sqrt{\frac{2}{\lambda\tanh\alpha}}e^{\lambda(\alpha-\tanh\alpha)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du(1+O(e^{-c_3\lambda\varepsilon^2}))(1+O(\lambda^{-1/5}))\\&=i\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda\tanh\alpha}}e^{\lambda(\alpha-\tanh\alpha)}(1+O(e^{-c_3\lambda\varepsilon^2}))(1+O(\lambda^{-1/5})).\end{aligned}$$

由此我们得到

$$H_\lambda'(\alpha\lambda)=-i\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda\tan h\alpha}}e^{\lambda(\alpha-\tanh\alpha)}(1+O(\lambda^{-1/5})).\tag{93}$$

(2) 如果 $a>1$, 譬如 $a=1/\cos\alpha(0<\alpha<\pi/2)$. 这时马鞍点为 $\tau=\pm\alpha$, 而曲线为

$$u-a\sin u\cosh v=\pm(\alpha-a\sin\alpha),\ \cosh v=\frac{u\mp(\alpha-\tan\alpha)}{a\sin u},$$

我们把它们画在图 23 中; 连续路线相应于 $H_\lambda^1(x)$. 在马鞍点附近, 我们用与实轴形成角 $\pi/4$ 的一线段以及二联接线段 (在其中 $\mathscr{I}_m f(\tau)$ 的值不大于它在 $\tau=$

$-\alpha \pm \varepsilon e^{3\pi i/4}$ 两点的值) 来代替这路线 (见图 24). 仍令 $\varepsilon = \lambda^{-2/5}$, 如前得

$$\begin{aligned}\int_{L_1} e^{\lambda f(\tau)}d\tau &= e^{\lambda f(-\alpha)}\int_{-\alpha-\varepsilon e^{3\pi i/4}}^{-\alpha+\varepsilon e^{3\pi i/4}} e^{(\lambda/2)f''(-\alpha)(\tau+\alpha)^2}d\tau(1+O(\lambda^{-1/5}))\\ &= e^{i\lambda(\tan\alpha-\alpha)}\int_{-\alpha-\varepsilon e^{3\pi i/4}}^{-\alpha+\varepsilon e^{3\pi i/4}} e^{(-\lambda i/2)\tan\alpha(\tau+a)^2}d\tau(1+O(\lambda^{-1/5}))\\ &= e^{3\pi i/4}\sqrt{\frac{2}{\lambda\tan\alpha}}e^{i\lambda(\tan a-\alpha)}\int_{-\varepsilon\sqrt{(\lambda\tan\alpha)/2}}^{\varepsilon\sqrt{(\lambda\tan\alpha)/2}} e^{-u^2}du(1+O(\lambda^{-1/5}))\\ &= e^{3\pi i/4}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda\tan\alpha}}e^{i\lambda(\tan\alpha-\alpha)}(1+O(e^{-c_3\lambda\varepsilon^2}))(1+O(\lambda^{-1/5})),\end{aligned}$$

$$H_\lambda^1(a\lambda) = -e^{3\pi i/4}\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda\tan\alpha}}e^{i\lambda(\tan\alpha-\alpha)}(1+O(\lambda^{-1/5})). \tag{94}$$

图 23

图 24

(3) 如果 $a = 1$, 则 $f''(\tau)$ 在马鞍点 $\tau = 0$ 也等于零, 而由线 $\mathscr{I}_m f(\tau) = u - \sin u\cdot\cosh v = \mathscr{I}_m f(0) = 0$ 有三条分支通过 $\tau = 0$ (图 25), 其中一条是虚轴, 仍旧拿一段对实轴的倾角为 $5\pi/6$, 长为 $\varepsilon = \lambda^{-1/4}$ 的直线代替 L_1 在 $\tau = 0$ 附近的弯曲部分, 则对于 $-\varepsilon i$ 和 $\varepsilon e^{5\pi i/6}$ 之间的积分路线上所有的 τ 值. 有

$$\left|f(\tau) - \frac{i\tau^3}{6}\right| \leqslant c_1\varepsilon^5.$$

此外, 我们有

$$\int_{L_1} e^{\lambda f(\tau)}d\tau = \int_{-\varepsilon i}^{\varepsilon e^{5\pi i/6}} e^{\lambda f(\tau)}d\tau + O(e^{-c_1\lambda\varepsilon^3}),$$

$$\int_{-\varepsilon i}^{\varepsilon e^{5\pi i/6}} e^{\lambda f(\tau)}\cdot d\tau = \int_{-\varepsilon i}^{\varepsilon e^{5\pi i/6}} e^{\lambda i\tau^3/6}d\tau(1+O(\lambda^{-1/4})),$$

$$\int_{-\varepsilon i}^{\varepsilon e^{5\pi i/6}} e^{\lambda i\tau^3/6}d\tau = \int_0^{\varepsilon e^{5\pi i/6}} - \int_0^{-\varepsilon i} = \sqrt[3]{\frac{6}{\lambda}}(e^{5\pi i/6}+i)\int_0^{\varepsilon\sqrt[3]{\lambda/6}} e^{-u^3}du;$$

在最后一步的变换中，我们在第一个积分中令 $\tau=\sqrt[3]{6/\lambda}e^{5\pi i/6}u$，在第二积分中令 $\tau=-\sqrt[3]{6/\lambda}iu$. 最后一方程的右方等于

$$\sqrt[3]{6/\lambda}(e^{5\pi i/6}+i)\int_0^\infty e^{-u^3}du(1+O(e^{-c_3\varepsilon^3\lambda})),$$

只要 $\varepsilon^3\lambda$ 保持大于一定的正数. 另一方面,

$$\int_0^\infty e^{-u^3}du=\frac{1}{3}\int_0^\infty e^{-t}t^{-2/3}dt=\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right),$$

所以最后得

$$H_\lambda^1(\lambda)=-\frac{1}{3\pi}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)(e^{5\pi i/6}+i)\sqrt[3]{\frac{6}{\lambda}}(1+O(\lambda^{-1/4})). \tag{95}$$

求在 $a\geqslant 1$ 情形下 $J_\lambda(a\lambda)$ 的渐近公式时，我们用上面导出的关于 $H_\lambda^1(a\lambda)$ 的公式和下面三个用类似方法得到的公式:

$$H_\lambda^2(a\lambda)=i\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda\tanh\alpha}}e^{\lambda(\alpha-\tanh\alpha)}(1+O(\lambda^{-1/5}))(a<1), \tag{96}$$

$$H_\lambda^2(a\lambda)=-e^{-3\pi i/4}\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda\tan\alpha}}e^{-i\lambda(\tan\alpha-\alpha)}(1+O(\lambda^{-1/5}))\,(a>1), \tag{96$'$}$$

$$H_\lambda^2(\lambda)=-\frac{1}{3\pi}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)(e^{-5\pi i/6}-i)\sqrt[3]{\frac{6}{\lambda}}(1+O(\lambda^{-1/4}))\,(a=1). \tag{96$''$}$$

把它们按

$$J_\lambda(x)=\frac{1}{2}(H_\lambda^1(x)+H_\lambda^2(x))$$

合并; 其主要项只在 $a<1$ 的情形为零. 在 $a<1$ 这种情形中，对于 J_λ 我们也可以取图 27 中所示的路线，而用同样方法得

$$J_\lambda(a\lambda)=\frac{2}{\sqrt{2\pi\lambda\tanh\alpha}}e^{\lambda(\tanh\alpha-\alpha)}(1+O(\lambda^{-1/5})).$$

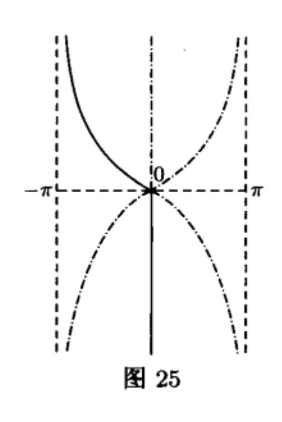


图 25

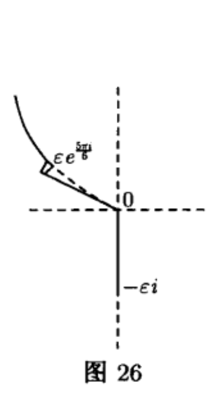


图 26

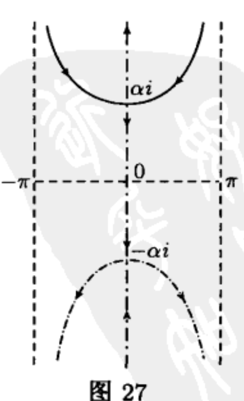


图 27

7.6.5　马鞍点法的一般讨论

我们这里用马鞍点法来推导渐近公式, 它只表示了原来已经指明的渐近级数的第一项. 关于这些级数的详细表示式, 读者可参看 G. N. Watson. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge: Cambridge University Press, 1922. 以及一些文献, 特别是 P. Debye. Näherungsformeln für die Zylinderfunktionen für grosse Werte des Arguments und unbeschränkt veränderliche Werte des Index. Math. Ann., Vol. 67, 1909, 535–558.

在应用马鞍点法时, 积分路线毋需取得恰如上面所描述的那样. 只要最后当用来展开函数的参数值很大时, 这路线充分接近上面所描述的路线就行了. 用这样的方法, 法贝尔[1]得到一些渐近级数, 例如其中有埃尔米特多项式和拉盖尔多项式的.

7.6.6　达布方法

另一求渐近公式的方法是达布方法[2]. 令所讨论的量 a_ν 以一幂级数的系数的地位出现, 因此可由一母函数给出: $K(\zeta)=\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\zeta^\nu$. 如果我们知道了这函数在收敛圆 —— 例如 $|\zeta|=1, \zeta=e^{i\varphi}$—— 上的奇点, 并且如果从它减出一已知函数 $f_n(\zeta)=\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\alpha_{n\nu}\zeta^\nu$ 后, 我们能保证余数 $K-f_n$ 在 ζ 趋近于收敛圆时一致收敛到一个 n 次连续可微的 φ 的函数, 那么幂级数

$$K(\zeta)-f_n(\zeta)=\sum_{\nu=0}^{\infty}(a_\nu-\alpha_{n_\nu})\zeta^\nu$$

的系数 $a_\nu-\alpha_{n_\nu}$ 就是这 φ 的 n 次连续可微函数 (当 $n=0$ 时, 函数只是连续) 的傅里叶系数. 因此, 按第 2 章 2.5.3 小节, 它们应满足条件

$$\lim_{\nu\to\infty}\nu^{n-1}|a_\nu-\alpha_{n\nu}|=0.$$

如果 ν 很大, 则可用 $\alpha_{n\nu}$ 来作为 a_ν 的近似时, n 越大近似越佳.

---

1) G. Faber. Abschätzung von Funktionen grosser Zehlen. S.-Ber. Akad. München (math.-Phys. Kl.), 1922, 285–304.

2) G. Darboux. Mémoire sur l'approximation des fonctions de très-grands nombres, et sur une classe étendue de développements en série, J. de math. pures et appl., Ser. 3, Vol. 4, 1878, 5–56 and 377–416. 还可参看 A. Haar. Über asymptotische Entwicklungen von Funktionen, Math. Ann., Vol. 96, 1926, 69–167.

7.6.7 应用达布方法于勒让德多项式的渐近展开

我们把这方法应用到由母函数

$$K(z,\zeta)=\frac{1}{\sqrt{1-2z\zeta+\zeta^2}}=\sum_{\nu=0}^{\infty}P_\nu(z)\zeta^\nu \tag{97}$$

所给出的勒让德多项式. 假定 $-1<z<1$, $z=\cos\varphi, 0<\varphi<\pi$. 于是 $1-2z\zeta+\zeta^2=(\zeta-e^{\varphi i})(\zeta-e^{-\varphi i})$; 收敛圆的半径为 1, 有奇点 $\zeta=e^{\pm\varphi i}$ 位于圆周上. 为了把 K 展成 $\zeta-e^{\pm\varphi i}$ 的幂级数, 我们规定

$$\sqrt{\zeta-e^{\pm\varphi i}}=e^{\pm i(\varphi+\pi)/2}\sqrt{1-\zeta e^{\mp\varphi i}},$$

右方根号代表那由二项式级数所表示的分支[1]. 我们得

$$\begin{aligned}K(z,\zeta)&=\frac{1}{\sqrt{\zeta-e^{\varphi i}}}[(\zeta-e^{\varphi i})+(e^{\varphi i}-e^{-\varphi i})]^{-1/2}\\&=\frac{e^{3\pi i/4}}{\sqrt{2\sin\varphi}}\frac{1}{\sqrt{\zeta-e^{\varphi i}}}\sum_{\nu=0}^{\infty}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \nu\end{pmatrix}\left(\frac{\zeta-e^{\varphi i}}{e^{\varphi i}-e^{-\varphi i}}\right)^\nu\\&=\frac{e^{-3\pi i/4}}{\sqrt{2\sin\varphi}}\frac{1}{\sqrt{\zeta-e^{-\varphi i}}}\sum_{\nu=0}^{\infty}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \nu\end{pmatrix}\left(\frac{\zeta-e^{-\varphi i}}{e^{-\varphi i}-e^{\varphi i}}\right)^\nu.\end{aligned}$$

如果我们令

$$f_n(z,\zeta)=\frac{1}{\sqrt{2\sin\varphi}}\sum_{\nu=0}^{n}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \nu\end{pmatrix}\cdot\left\{e^{3\pi i/4}\frac{(\zeta-e^{\varphi i})^{\nu-1/2}}{(e^{\varphi i}-e^{-\varphi i})^\nu}+e^{-3\pi i/4}\frac{(\zeta-e^{-\varphi i})^{\nu-1/2}}{(e^{-\varphi i}-e^{\varphi i})^\nu}\right\},$$

则 $K-f_n$ 在收敛圆上是 n 次连续可微的. 因此, 如果把 f_n 依 ζ 的幂次展开, 并为了简便起见, 写 $3\pi/4+(\varphi+\pi)\left(v-\frac{1}{2}\right)=\omega$, 我们得

$$\begin{aligned}f_n(z,\zeta)=&\frac{1}{\sqrt{2\sin\varphi}}\sum_{\nu=0}^{n}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \nu\end{pmatrix}\left\{\frac{e^{i\omega}(1-\zeta e^{-\varphi i})^{\nu-1/2}}{(e^{\varphi i}-e^{-\varphi i})^\nu}+\frac{e^{-i\omega}(1-\zeta e^{\varphi i})^{\nu-1/2}}{(e^{-\varphi i}-e^{\varphi i})^\nu}\right\}\\=&\frac{1}{\sqrt{2\sin\varphi}}\sum_{\nu=0}^{n}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \nu\end{pmatrix}\sum_{\mu=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\nu-\frac{1}{2}\\ \mu\end{pmatrix}\zeta\mu\end{aligned}$$

---

1) 即如果 a 是一个正数, 则当 $\zeta=e^{\varphi i}-a$ 时根 $\sqrt{\zeta-e^{\varphi i}}$ 是正虚数, 当 $\zeta=e^{-\varphi i}-a$ 时根 $\sqrt{\zeta-e^{-\varphi i}}$ 是负虚线, 上述规定符合于公式 (97) 中的要求: $\zeta=0$ 时根式 $\sqrt{1-2z\zeta+\zeta^2}$ 应取 $+1$ 为值.

$$\cdot\left\{\frac{e^{i[\omega-(\varphi+\pi)\mu]}}{(e^{\varphi i}-e^{-\varphi i})^{\nu}}+\frac{e^{-i[\omega-(\varphi+\pi)\mu]}}{(e^{-\varphi i}-e^{\varphi i})^{\nu}}\right\}$$

$$=\sum_{\mu=0}^{\infty}p_{n\mu}(z)\zeta^{\mu},$$

其中

$$p_{n\mu}=\frac{1}{\sqrt{2\sin\varphi}}\sum_{\nu=0}^{n}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \nu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu-\frac{1}{2}\\ \mu\end{pmatrix}\frac{1}{(2\sin\varphi)^{\nu}}\{e^{i[\pi/4+(\nu-\mu-1/2)\varphi-(\mu-\nu/2)\pi]}$$
$$+e^{-i[\pi/4+(\nu-\mu-1/2)\varphi-(\mu-\nu/2)\pi]}\},$$

即

$$p_{n\mu}=\frac{2}{\sqrt{2\sin\varphi}}\sum_{\nu=0}^{n}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \nu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu-\frac{1}{2}\\ \mu\end{pmatrix}\frac{(-1)^{\mu}}{(2\sin\varphi)^{\nu}}$$
$$\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}(1+2\nu)-\left(\nu-\mu-\frac{1}{2}\right)\varphi\right).\tag{98}$$

因此, 在任何形如 $-1+\varepsilon\leqslant z\leqslant 1-\varepsilon(0<\varepsilon<1)$ 的区间中, 一致地有

$$P_{\mu}(z)=p_{n,\mu}(z)+O(\mu^{-n}).$$

又因 $p_{n+1,\mu}-p_{n,\mu}=O(\mu^{-n-1})$, 故有

$$P_{\mu}(z)=p_{n,\mu}(z)+O(\mu^{-n-1}).$$

这个渐近展开的第一项可写作

$$P_{\mu}(z)=\frac{2}{\sqrt{2\sin\varphi}}\frac{1\cdot 3\cdots(2\mu-1)}{2\cdot 4\cdots 2\mu}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\varphi\right)+O\left(\frac{1}{\mu}\right).\tag{99}$$

如果 z 不是 -1 和 $+1$ 之间的实数, 则因奇点 ζ_1,ζ_2 满足 $\zeta_1\zeta_2=1$, 所以它们之一, 譬如 ζ_1, 有小于 1 的模: $|\zeta_1|<1$, 而其他一个的模 $|\zeta_2|>1$. 现在只有奇点 ζ_1 位于收敛圆 $|\zeta|=|\zeta_1|$ 上, 我们只需考虑这一奇点. 因此, 如果把 $K(z,\zeta)$ 依 $\zeta-\zeta_1$ 的幂次的展开的头 n 项变换成 ζ 的幂级数, 则这级数中的系数就给出 $P_{\mu}(z)$ 的渐近式; 不过现在有

$$|\zeta_1|^{n}(P_{\mu}-p_{n\mu})=O(\mu^{-n-1}).$$

7.7 附录：球面调和函数的变换

7.7.1 导言及符号

令 x, y, z 为笛卡尔坐标, r, θ, φ 为球极坐标, 其定义为

$$x = r\cos\varphi\sin\theta,\ y = r\sin\varphi\sin\theta,\ z = r\cos\theta. \tag{100}$$

令 Δ 表示拉普拉斯算子

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.\end{aligned} \tag{101}$$

满足 $\Delta u = 0$ 的函数 u 称为调和 (或谐) 函数. 如果 $p_n(\theta, \varphi)$ 是 x, y, z 的单值函数而 $r^n p_n$ 调和, 则 p_n 称为一 n 阶球面调和函数. 在 7.5 节中已看到, $r^n p_n$ 是 x, y, z 的一个 n 次齐次调和多项式, 反之亦然.

在数学物理的许多问题中, 发生这样的问题：如果坐标系绕固定的原点 $r = 0$ 转动时, 任意一组线性独立的球面调和函数如何变换？要回答这问题, 我们用独立参数 $q_\nu(\nu = 1, 2, 3, 4)$ 刻画正交变换. 对于由 $2n+1$ 个线性独立的 n 阶球面调和函数所组成的函数组, 坐标转动表现为一线性代换, 代换中的系数在参数 q_ν 的四维空间形成一由 $2n$ 阶的正交超球面调和函数组成的完备组.

在多于三个变数的情形, 没有类似的结果.

7.7.2 正交变换

令 O 为一三行三列的正交矩阵; 可表征为

$$OO' = I, \tag{102}$$

O' 是 O 的转置矩阵, I 是恒等或单位矩阵. 我们将只考虑 O 的行列式 $|O| = +1$ 的情形. 令

$$A = \begin{pmatrix} 0 & q_3 & -q_2 \\ -q_3 & 0 & q_1 \\ q_2 & -q_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{103}$$

为一反对称矩阵 (即 $A' = -A$). 令 q_4 为第四个参数并令

$$w = (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^{1/2},\ v = (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)^{1/2}. \tag{104}$$

于是我们有

凯莱定理：对于任何使$v>0$的实数值$q_\nu(\nu=1,2,3,4)$，矩阵

$$O=(q_4I+A)(q_4I-A)^{-1}=\frac{1}{v^2}(v^2I+2q_4A+2A^2) \tag{105}$$

或

$$O=\frac{1}{v^2}\begin{pmatrix} q_4^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2q_1q_2+2q_3q_4 & 2q_1q_3-2q_2q_4 \\ 2q_1q_2-2q_3q_4 & q_4^2+q_2^2-q_1^2-q_3^2 & 2q_2q_3+2q_1q_4 \\ 2q_1q_3+2q_2q_4 & 2q_2q_3-2q_1q_4 & q_4^2+q_3^2-q_1^2-q_2^2 \end{pmatrix}, \tag{106}$$

是正交的；q_1/w, q_2/w, q_3/w 是转动轴对坐标轴 x,y,z 的方向余弦．如果 ω 代表转角，则

$$\cos\frac{\omega}{2}=\frac{q_4}{v},\quad \sin\frac{\omega}{2}=\frac{w}{v}. \tag{107}$$

我们规一化参数 q_ν 使

$$v^2=q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2=1, \tag{108}$$

则当且仅当 $q_\nu=q_\nu^*$ 或 $q_\nu=-q_\nu^*(\nu=1,2,3,4)$ 时，任意两组参数 q_ν,q_ν^* 的值所确定的 O 才是一样的．如果 $w=0$，则空间任何方向皆固定不变，O 变成恒等矩阵 I．

证明：两矩阵 B 和 C 称为可交换的，如果 $BC=CB$．这时，我们可以把它们看成普通的数那样施行各种代数运算，只要不以行列式为零的矩阵来作除法；例如，如果 $|B|\neq 0$，则 B^{-1} 和 C 也是可交换的．利用这事实以及熟知的关系：$(B')^{-1}=(B^{-1})'$(撇“$'$”代表转置矩阵)，立刻看到，如果 q_4I-A 有逆，按 (105) 令

$$O=(q_4I+A)(q_4I-A)^{-1}, \tag{109}$$

则

$$O'=(q_4I'-A')^{-1}(q_4I'+A')=(q_4I-A)(q_4I+A)^{-1}=O^{-1}. \tag{110}$$

所以 O 是正交的．类似地，可以看出，对于任何正交的 O，只要 $|O+I|\neq 0$，则

$$A=q_4(I-O)(I+O)^{-1} \tag{111}$$

是一个反对称的矩阵．但 (111) 正是当我们“解”(109) 中的 A 时所得到的 A 的表示式．这证明了凯莱定理的第一部分 (即 (105) 和 (106))，而 $|I+O|=0$ 的情形除外．即使是在这种情形，(109) 的右方也还是有意义的，只要我们把它的形式改写一下．由于矩阵总满足它的特征方程，所以

$$A^3+w^2A=0. \tag{112}$$

当 $v>0$ 时，这式子导致

$$q_4I+A=v^{-2}(v^2I+2q_4A+2A^2)(q_4I-A). \tag{113}$$

我们可定义 (109) 的右方为 $v^{-2}(v^2I+2q_4A+2A^2)$; 不过还得证明即使是 $|q_4I-A|=0$ (即 q_4 是 A 的一个本征值)，这样定义的矩阵仍是一个正交矩阵. 既然 A 是反对称的，它的本征值是纯虚线. 因此 $q_4=0$ 而

$$v^{-2}(v^2I+2q_4A+2A^2)=I+2w^{-2}A^2. \tag{114}$$

利用 (112)，我们有

$$(I+2w^{-2}A^2)^2=I+4w^{-2}A^2+4w^{-4}A^4=I. \tag{115}$$

所以当 $q_4=0$ 时，$I+2w^{-2}A^2$ 是一个对称的正交矩阵. 我们可以证实，所有这一类的正交矩阵都能写成 $I+2w^{-2}A^2$ 的形式. 另一方面，任一正交矩阵 O，如果 $|O|=+1$ 而 $|I+O|=0$，则它必定是对称的，因为这样的一个 O 必有本征值 $+1$, -1, -1，它的平方有本征值 $+1$, $+1$, $+1$ 而是恒等矩阵，但 $O^2=OO'=I$ 说明 O 是对称的.

要从几何方面来解释 q_ν，我们首先注意，矢量 (q_1,q_2,q_3) 是 A 的一个属于本征值零的本征矢量. 于是由 (105) 知 (q_1,q_2,q_3) 是 O 的一个属于本征值 1 的本征矢量，因此它确定转轴. 因为 O 的本征值是 $e^{i\omega},e^{-i\omega}$ 和 1，而这些值的和是 O 的迹，我们可以从 (106) 得到 (107)，所缺的只是 $\cos(\omega/2)$ 的正负号. 这正负号是毋需确定的，因为如果 $\omega/2$ 变 π,ω 就变了 2π.

显然，凯莱的定理可以推广到高于三维的情形. 不过这时公式 (105) 和 (106) 要变得很复杂. 在三维的情形，(106) 可以用四元数[1)]很简单地叙述出来. 设矢量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{x}'$ 的定义为 $\boldsymbol{x}=(x,y,z)$, $\boldsymbol{x}'=O\boldsymbol{x}$，令 ξ,ξ',α 为如下定义的四元数：

$$\xi=xi+yj+zk,\ \xi'=x'i+y'j+z'k \tag{116}$$

$$\alpha=-q_4+q_1i+q_2j+q_3k; \tag{116$'$}$$

则

$$\xi'=\alpha\xi\alpha^{-1}, \tag{117}$$

1) 四元数是一“超复”数，具有三个“虚”单位 i,j,k，满足

$$i^2=j^2=k^2=-1,\ ij=k,\ jk=i,\ ki=j,$$

$$ij+ji=0,\ ik+ki=0, jk+kj=0,$$

一般的四元数是 $\alpha=a+b_i+c_j+dk$，其中 a,b,c,d 是实数. 所有的代数运算规律除去乘法的交换律外，四元数都满足.

其中 $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1$, $\alpha^{-1} = v^{-2}(-q_4 - q_1 i - q_2 j + q_3 k)$.

可以指出, 在正交群的元素和一个四维超球的各点之间存在一个一对二的对应关系. 还存在这样一个群 G, 正交群乃是 G 的商群, 而 G 的元素同超球的各点一一对应. 关于这个群的定义见 7.4 节; 关于它的意义可参考, 例如, B. L. van der Waerden. Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik, §16. Berlin: J. Springer, 1932.

7.7.3 球面调和函数的一个母函数

令 $P_{n,l}(x)$ 表示在第 7 章 7.5.1 小节中定义的函数, $l = 0, 1, 2, \cdots, n$. 又令

$$P_{n,-l}(x) = (-1)^l \frac{(n-l)!}{(n+l)!} P_{n,l}(x). \tag{118}$$

我们知道, 下面这 $2n+1$ 个函数:

$$P_{n,l}(\cos\theta) e^{il\varphi} (l = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm n) \tag{119}$$

形成一线性独立的 n 阶球面调和函数的完备组. 我们断言:

由

$$\{x - iy - 2zt - (x+iy)t^2\}^n = t^n \sum_{l=-n}^{+n} h_{n,l}(x,y,z) t^l \tag{120}$$

所定义的 n 次齐次多项式 $h_{n,l}(x,y,z)$ 形成一线性独立的 n 次调和多项式的完备组. 如果引进球极坐标 (方程 (100)), 则

$$h_{n,l}(x,y,z) = r^n p_{n,l}(\theta,\varphi), \tag{121}$$

其中

$$p_{n,l}(\theta,\varphi) = (-1)^n \frac{2^n n!}{(n+l)!} P_{n,l}(\cos\theta) e^{il\varphi}. \tag{122}$$

如果 x, y, z 之间有关系

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \tag{123}$$

则 $h_{n,l}$ 可以用两个参数 w_1, w_2 来表示:

$$h_{n,l}(x,y,z) = (-1)^n \binom{2n}{n+l} w_1^{n+l} w_2^{n-l} \tag{124}$$

其中

$$x + iy = w_1^2, \; -x + iy = w_2^2, \; z = w_1 w_2. \tag{125}$$

证明：如果 a, b, c 是任意三个满足关系 $a^2+b^2+c^2=0$ 的数，则显然 $\Delta(ax+by+cz)^n=0$ 成立. 令 $a=1-t^2$, $b=-i(1+t^2)$, $c=-2t$, 即得 (120). 要证明 (121) 和 (122), 可在 (120) 中以 t^{-1} 代 t, 得

$$h_{n,-l}=(-1)^l\overline{h}_{n,l}, \tag{126}$$

式中一横代表复共轭. 所以只要在 $l\geqslant 0$ 的情形证明 (122) 即可. 在 (120) 中令 $t=e^{-i\varphi}s$, 得

$$\{(1-s^2)\sin\theta-2s\cos\theta\}^n=s^n\sum_{l=-n}^{+n}p_{n,l}(\theta,\varphi)e^{-il\varphi}s^l, \tag{127}$$

并看出

$$p_{n,l}e^{-il\varphi}=f_{n,l}(\theta)$$

只是 θ 的函数而且是实函数. 由 (126) 我们得到

$$f_{n,-l}(\theta)=(-1)^lf_{n,l}(\theta). \tag{128}$$

如果以 s^{-n} 乘 (127) 并以 $\exp\{i(\omega+\pi/2)\}$ 代 s, 利用 (128), 得

$$(\cos\theta+i\cos\omega\sin\theta)^n=(-2)^{-n}\left\{f_{n,0}+2\sum_{l=1}^{n}i^lf_{n,l}\cos l\omega\right\}. \tag{129}$$

另一方面，当 $l=0,1,2,\cdots,n$ 时 $P_{n,l}(x)$ 的积分表示 (7.4.4 小节) 显示

$$a_l=\frac{i^l}{(n+l)!}P_{n,l}(x)$$

是展开式

$$(x+i\sqrt{1-x^2}\cos\omega)^n=a_0+2\sum_{l=1}^{n}a_l\cos l\omega \tag{130}$$

中的傅里叶系数. 令 $x=\cos\theta$ 并比较 (130) 和 (129), 即见 (122) 成立.

最后，如果在 (120) 中我们按 (125) 以 w_1, w_2 代 x, y, z, (124) 就变为平常的二项式定理.

应当强调，(123) 不仅仅是 (125) 的一个结果，其中还意味着，任何三个满足 (123) 的数 x, y, z 正好定义两对的数 w_1, w_2 使方程 (125) 成立. 因为 $x+iy$ 和 $x-iy$ 在代数上是互相独立的，所以 (124) 右方的 w_1 和 w_2 的多项式也是线性独立的. 因此，(125) 把调和多项式 $h_{n,l}$ 映射为 w_1 和 w_2 的线性独立的偶次多项式. 这还显示，任一调和多项式正好可以用一有三个变量的多项式来刻画，这三个变量的平

方和等于零: 在这一章的前面部分, 我们已经知道了与此相同的事实; 在那里我们证明, 如果令微分算子 $\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$ 的一个多项式作用在 $r^{-1}=(x^2+y^2+x^2)^{-1/2}$ 上, 就可以得到调和多项式, 而这些算子的平方和 (当作用在 r^{-1} 上时) 显然是等于零的.

7.7.4 变换公式

当我们证明了任一 x, y, z 的正交变换可以用 w_1 和 w_2 的线性代换得到时, 公式 (120) 到 (125) 的意义就很清楚. 这表现着一个熟知的事实: 三个变量的实正交群有 -2×2 的 (复) 矩阵表示.

引理: 令 w_1, w_2, x, y, z 为由 (125) 所联系并设

$$w_1'=\alpha w_1+\beta w_2,\ w_2'=-\overline{\beta} w_1+\overline{\alpha} w_2 \tag{131}$$

及

$$x'+iy'=w_1'^2,\ -x'+iy'=w_2'^2,\ z'=w_1'w_2', \tag{132}$$

则 (125), (131), (132) 定义一线性代换 M, 它把矢量 $\boldsymbol{x}=(x,y,z)$ 映射为 $\boldsymbol{x}'=(x',y',z')=M\boldsymbol{x}$. 如果我们选

$$\alpha=(q_4-iq_3)/v,\quad \beta=(-q_2+iq_1)/v, \tag{133}$$

则 M 就是 (106) 所定义的 O.

证明是显易的. 如果以 $-\alpha, -\beta$ 代 α, β, 我们得到前面的同一矩阵 $M=O$. 这显示, (至少) 有两个不同的代换 (131) 导致同一正交代换 O. 事实上也恰好只有两个这种代换 (132), 而这些代换的群正是本节第 2 小节末所提出的群 G.

我们可以用这引理来证明下述定理 (它的现有形式是海格洛茨给的):

设 $\boldsymbol{x}=(x,y,z)$ 被 (105), (106) 所定义的正产变换 O 变换成 $\boldsymbol{x}'=(x',y',z')$, 则球面调和函数 $h_{n,l}(x',y',z')$ 可以用 $h_{l,n}(x,y,z)$(定义见 (120)) 来表示:

$$h_{n,l}(x',y',z')=\sum_{r=-n}^{n}\frac{\begin{pmatrix}2n\\ l+n\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}2n\\ r+n\end{pmatrix}}v^{-2n}H_{2n}^{(n+l,n+r)}(q_\mu)h_{n,r}(x,y,z), \tag{134}$$

其中 $H_{2n}^{(n+l,n+r)}$ 为变量 $q_\mu(\mu=1,2,3,4)$ 的 $2n$ 次齐次多项式, 它满足

$$\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial q_\mu^2}H_{2n}^{(n+l,n+r)}(q_\mu)=0 \tag{135}$$

并且可以用母函数

$$G_{2n}(q_\mu;s,t)\equiv\{iq_3(1-st)+iq_1(s+t)+q_2(s-t)+q_4(1+st)\}^{2n} \tag{136}$$

来定义：

$$G_{2n}(q_\mu;s,t)=\sum_{j,k=0}^{2n}\begin{pmatrix}2n\\j\end{pmatrix}H_{2n}^{(j,k)}(q_\mu)t^js^k. \tag{137}$$

$H_{2n}^{(r,l)}$ 的显明表示式以及方程 (135) 的另一 (极坐标) 形式均将在本节第 5 小节中给出.

方程 (135) 可以从 (136) 导出, 如同从 (120) 导出结论：$\Delta h_{n,l}=0$ 一样. 要证明方程 (134) 和 (136), 可利用 (124) 并留意线性变换 (131) 对 $h_{n,l}$ 的影响. 由方程 (124), 方程 (133) 及 (131), 得

$$h_{n,l}(x',y',z')=(-1)^n\begin{pmatrix}2n\\n+l\end{pmatrix}w_1'^{n+l}w_2'^{n-l}, \tag{138}$$

$$\begin{aligned}h_{n,l}(x',y',z')=&(-1)^n\left(\frac{w_2}{v}\right)^{2n}\begin{pmatrix}2n\\n+l\end{pmatrix}\\&\cdot\{-q_2+iq_1+(q_4-iq_3)s\}^{n+l}\{q_4+iq_3+(q_2+iq_1)s\}^{n-l},\end{aligned} \tag{139}$$

其中 $s=w_1/w_2$. 另一方面, 方程 (136) 的右方是

$$\{[q_4+iq_3+(iq_1+q_2)s]+[iq_1-q_2+(q_4-iq_3)s]t\}^{2n}.$$

所以 (139) 中 $(-1)^n(w_2/v)^{2n}$ 的系数正是 (137) 中 t^{n+l} 的系数, 如果令 $s=w_1/w_2$. 因此我们得到

$$h_{n,l}(x',y',z')=(-1)^n\begin{pmatrix}2n\\n+l\end{pmatrix}v^{-2n}\sum_{k=0}^{2n}H_{2n}^{(n+l,k)}w_1^kw_2^{2n-k}, \tag{140}$$

再用 (124) 就证明了 (134).

7.7.5 直角坐标下的表示式

如果用极坐标, 则标准的球面调和函数可以表成单个变量 (r,θ,φ) 的函数的乘积; 不过用直角坐标时变换公式要来得简单些. 事实上, 如令

$$x'=r'\cos\varphi'\sin\theta',\ y'=r'\sin\varphi'\sin\theta',\ z'=\cos\theta', \tag{141}$$

我们有 $r'=r$, 但 θ',φ' 则不能简单地用 θ 和 φ 来表示. 不过, 利用 (134), 球面调和函数

$$(r')^{-n}h_{n,l}(x',y',z')=(-1)^n\frac{2^n n!}{(n+l)!}P_{n,l}(\cos\theta')e^{il\varphi'}$$

可以用 $P_{n,l}(\cos\theta)\exp\{il\varphi\}$ 来表示. 剩下的只是找一简单式子把 $H_{2n}^{(n+l,n+r)}(q_\mu)$ 明显地表示出来. 如果我们引用变量 q_ν 的四维空间的 (超球) 极坐标, 所得的式子仍很复杂. 但有一特殊的坐标系, 在其中 $H_{2n}^{n+l,n+r}$ 的表示式相当简单. 我们把结果总结如下:

令 $v\geqslant 0, 0\leqslant\rho\leqslant 2\pi, 0\leqslant\sigma\leqslant 2\pi, 0\leqslant\tau\leqslant\pi/2$

及

$$\begin{aligned}&q_1=-v\sin\sigma\sin\tau,\quad q_2=v\cos\sigma\sin\tau,\\&q_3=v\sin\rho\cos\tau,\quad q_4=v\cos\rho\cos\tau,\end{aligned}\tag{142}$$

则 v,ρ,σ,τ 是正交坐标; 线元素是

$$dq_1^2+dq_2^2+dq_3^2+dq_4^2=dv^2+v^2\{\cos^2\tau d\rho^2+\sin^2\tau d\sigma^2+d\tau^2\},\tag{143}$$

超球 Ω(定义为 $v=1$) 的面元素为

$$d\Omega=\cos\tau\sin\tau d\rho d\sigma d\tau.\tag{144}$$

用这种坐标,

$$\begin{aligned}&v^{-2n}H_{2n}^{(n+l,n+r)}(q_\mu)=S_{2n}^{(l,r)}(\rho,\sigma,\tau)\\=&\frac{1}{(n+r)!}e^{-i(l+r)\rho}e^{-i(r-l)\sigma}(\cos\tau)^{l+r}(\sin\tau)^{r-l}F_{2n}^{(l,r)}(\cos^2\tau),\end{aligned}\tag{145}$$

其中

$$F_{2n}^{(l,r)}(t)=\frac{d^{n+r}}{dt^{n+r}}t^{n-l}(t-1)^{n+l}.\tag{146}$$

$S_{2n}^{(l,r)}$ 和它们的复共轭在单位超球 Ω 上双正交:

$$\iiint_\Omega S_{2n}^{(l',r')}\overline{S}_{2n}^{(l,r)}d\Omega=\begin{cases}0,\ \text{如果}\,l'\neq l\,\text{或}\,r'\neq r,\\ \dfrac{2\pi^2}{2n+1}\begin{pmatrix}2n\\r+n\end{pmatrix}\Big/\begin{pmatrix}2n\\l+n\end{pmatrix},\ \text{如果}\,l'=l,\ r'=r.\end{cases}\tag{147}$$

球面调和函数的变换公式为

$$P_{n,l}(\cos\theta')e^{il\varphi'}=\sum_{r=-n}^{n}\frac{(n-r)!}{(n-l)!}S_{2n}^{(l,r)}P_{n,r}(\cos\theta)e^{ir\varphi}.\tag{148}$$

证明：如果在 (136) 和 (137) 中以 (142) 中各式代 q_μ, 并令

$$s^* = se^{-i(\sigma+\rho)}, t^* = te^{-i(\rho-\sigma)},$$

我们得到 (145) 中的 $S_{2n}^{(l,r)}$ 所满足的关系

$$\begin{aligned}&\{(1+s^*t^*)\cos\tau+(s^*-t^*)\sin\tau\}^{2n}\\&=\sum_{l,r=-n}^{n}\begin{pmatrix}2n\\n+l\end{pmatrix}S_{2n}^{(l,r)}e^{i(r+l)\rho}e^{i(r-l)\sigma}t^{*n+l}s^{*n+r},\end{aligned}\tag{149}$$

这证明 $S_{2n}^{(l,r)}\exp\{i[(r+l)]\rho+(r-l)\sigma]\}=U_{2n}^{(l,r)}$ 只同 τ 有关. 比较 (149) 两方 t^{*n+l} 的系数, 得

$$\begin{aligned}\sum_{r=-n}^{+n}U_{2n}^{(l,r)}s^{*n+r}=&(\cos\tau+s^*\sin\tau)^{n-l}(-\sin\tau+s^*\cos\tau)^{n+l}\\=&(\cos\tau)^{l-n}(\sin\tau)^{-n-l}[\cos^2\tau+s^*\cos\tau\sin\tau]^{n-l}\\&\cdot[\cos^2\tau-1+s^*\cos\tau\sin\tau]^{n+l}.\end{aligned}\tag{150}$$

把 (150) 右方用泰勒公式展开就得到 (145) 和 (146). 从这公式以及 (144), 我们可以用重复分部积分导出 (147), 只要注意

$$\overline{S}_{2n}^{(l,r)}=(-1)^{l+r}S_{2n}^{(-l,-r)}.$$

我们要提一提, 但不证明, 按照雅可比发现的一个公式, $U_{2n}^{(l,r)}$ 可以用超比级数 (见第 2 章 76 页方程 (24)) 来表示. 当 $l+r\leqslant 0$ 时, 这些级数是

$$\begin{aligned}U_{2n}^{(l,r)}=&(-1)^{n+l}\begin{pmatrix}n-l\\n+r\end{pmatrix}(\cos\tau)^{-l-r}(\sin\tau)^{l-r}\cdot{}_2F_1(-n-r,\\&n+1-r;1-l-r;\cos^2\tau),\end{aligned}$$

当 $r+l\geqslant 0$ 时是

$$\begin{aligned}U_{2n}^{(l,r)}=&(-1)^{n+r}\begin{pmatrix}n+l\\n-r\end{pmatrix}(\cos\tau)^{l+r}(\sin\tau)^{r-l}\cdot{}_2F_1(r-n,\\&n+r+1;1+l+r;\cos^2\tau).\end{aligned}$$

附加参考文献

第 1 章

Frazer, R. A., Duncan, W. J., and Collar, A. R.: Elementary matrices. Cambridge, England, the University Press, 1938.

Halmos, P. R.: Finite dimensional vector spaces. Princeton Princeton, University Press, 1942 (Annals of mathematics studies no. 7).

Hamburger, H. L., and Gremshaw, M. E.: Linear transformations in n-dimensional vector space. Cambridge, Eng., the University Press, 1951.

MacDuffee, C. C.: Theory of matrices. J. Springer, Berlin, 1933 (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, bd. 2, bd. 5).

Schreier, O., and Sperner, E.: Einfuehrung in die analytische Geometrie und Algebra. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1935 (Hamburger mathematische Einzelschriften, Heft 10, Heft 19).

Turnbull, H. W., and Aitken, A. C.: An introduction to the theory of canonical matrices. Blackie and Son, Ltd., London and Glasgow, 1932.

Wedderburn, J. H. M.: Lectures on matrices. American Mathematical Society. New York, 1934 (Colloquium publications, vol. 17).

第 2 章

Bochner, S.: Vorlesungen ueber Fouriersche Integrale. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1932.

Bochner, S., and Chandrasekharan, K.: Fourier transforms. Princeton University Press, Princeton, 1949 (Annals of mathematics studies, no. 19).

Carleman, T.: L'Intégrale de Fourier et questions qui s'y rattachent. Almquist and Wiksells boktr., Upsala, 1944.

Hardy, G. H., and Rogosinski, W. W.: Fourier series. Cambridge, Eng., the University Press, 1950 (Cambridge tracts in mathematics and physics, no. 38).

Jackson, D.: Fourier series and orthogonal polynomials. Oberlin, Ohio, 1941 (Carus mathematical monographs, no. 8).

Jeffreys, H., and Jeffreys, B. S.: Methods of mathematical physics. Cambridge, Eng., the University Press, 1946.

Kaczmarz, S., and Steinhaus, H.: Theorie der Orthogonalreihen. Z subwencji Funduszu kultury narodowej (Monografje matematyczne, vol. 6) Warsawa-Lwow, 1935.

Paley, R. E. A. C., and Wiener, N.: Fourier transforms in the complex domain. American Mathematical Society, New York, 1934 (Colloquium publications, vol. 19).

Rogosinski, W.: Fouriersche Reihen. W. de Gruyter, Berlin, 1930.

Sneddon, I. N.: Fourier transforms. McGraw-Hill, New York, 1951.

Szegö, G.: Orthogonal polynomials. American Mathematical Society, New York, 1939 (Colloquium publications, vol. 23).

Titchmarsh, E. C.: Introduction to the theory of Fourier integrals. The Clarerdon Press, Oxford, 1937.

Wiener, N.: The Fourier integral and certain of its applications. Cambridge, Eng., the University Press, 1933.

Zygmund, A.: Trigonometrical series. Z subwencji Funduszu kultury narodowej (Monografje matematyczne, vol. 5), Warsawa-Lwow, 1935.

第 3 章

Banach, S.: Théorie des opérations linéaires. Z subwencji Funduszu kultury narodowej (Monografje matematyczne, vol. 1), Warsawa, 1932.

Hamel, G.: Integralgleichungen. J. Springer, Berlin, 1937.

Lovitt, S. V.: Linear integral equations. McGraw-Hill, New York, 1924.

Riesz. F.: Les eystèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Gauthier-Villars, Paris, 1913.

Stone, M. H.: Linear transformations in Hilbert space and their application to analysis. American Mathematical Society, New York, 1932 (Colloquium publications, vol. 15).

第 4 章

Bliss, G, A.: Lectures on the calculus of variations. University of Chicago Press, Chicago, 1946.

Carathéodory C.: Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. B. G. Teubner, Leipzig and Berlin, 1935.

Courant, R.: Dirichlet's principle, conformal mapping, and minimal surfaces. Interscience, New York, 1950.

Forsyth, A. R.: Calculus of variations. Cambridge, Eng., the University Press, 1927.

Fox, C.: An introduction to the calculus of variations. Oxford University Press, London, 1950.

Lanczos, C.: The variational principles of mechanics. University of Toronto Press, Toronto, 1949.

Lusternik, L., and Schnirelmann. L.: Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels. Hermann et Cie., Paris, 1934.

Lusternik, L., and Schnirelmann, L.: Functional topology and abstract variational theory. Paris, Hermann and Cie., 1938.

Morrey, C. B.: Multiple integral problems in the calculus of variations and related topics. University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1943.

Morse, M.: The calculus of variations in the large. American Mathematical Society, New York, 1934 (A. M. S. Colloquium publications v. 18).

Seifert, H., and Threlfall, W.: Variationsrechnung in Grossen. B. G. Teubner, Leipzig and Berlin, 1938 (Hamburger mathematische Einzelschriften Heft 24).

Polya, G., and Szegö, G.: Isoperimetric inequalities in mathematical physics. Princeton University Press, 1951 (Annals of mathematics studies, 27).

论　文

Courant, R.: Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. American Mathematical Society, Bulletin, vol. 49, pp. 1–23, 1943.

第 5 章及第 6 章

Churchill, R. V.: Fourier series and boundary value problems. McGraw-Hill, New York, 1941.

Collatz, L.: Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung. Becker und Erler. Leipzig, 1945.

Hohenemser, K.: Die Methoden zur angenäherten Lösung von Eigenwertproblemen in der Elastokinetik. Chelsea, New York, 1949.

Ince, E. L.: Ordinary differential equations. Dover, New York, 1944.

Rellich, F.: Störungstheorie der Spektralzerlegung. J. Springer, Berlin, 1936–1942.

Titchmarsh, E. C.: Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations. Oxford, the Clarendon Press, 1946.

Weyl, H.: Ramifications, old and new, of the eigenvalue problem. Bulletin of the American Mathematical Society, Volume 56, 1950, pp. 115–139.

Weinstein, A.: Étude des spectres des équations aux derivées partielles de la théorie des plaques élastiques. Mémorial des Sciences Mathématiques, Volume 88, 1937.

Proceedings of the Symposium on Spectral Theory and Differential Problems. Oklahoma A. & M., Stillwater, Oklahoma, 1951.

第 7 章

Gray, A., Matthews, G. B., and MacRobert, T. M.: A treatise on Bessel functions and their applications to physics. Macmillan, London, 1922.

Hobson, E. W.: The theory of spherical and ellipsoidal harmonics. Cambridge, England, the University Press, 1931.

Jahnke, E., and Emde, F.: Tables of functions with formulae and curves. Dover, New York, 1943.

MacRobert, T. M.: Spherical harmonics: an elementary treatise on harmonic functions. London, Methuen and Co., 1927.

Madelung, E.: Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers. Berlin, J. Springer, 1936 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 4).

Magnus, W., and Oberhettinger, F.: Formelh und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. Berlin, J. Springer, 1948 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 52).

Mclachlan, N. W.: Bessel functions for engineers. Oxford, the Clarendon Press, 1934.

Relton, F. E.: Applied Bessel functions. London, Blackie and Son Ltd., 1946.

Watson, G. N.: A treatise on the theory of Bessel Functions. Cambridge, England, the University Press, 1944; New York, Macmillan, 1944.

Weyrich, R.: Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1937.

论　文

Copson, E. T.: The asymptotic expansion of a Function defined by a definite integral or contour integral, Admiralty Computing Service.

Van der Waerden, B. L.: On the method of saddle points, Applied Scientific Research B (The Hague), vol. II, No. 1, 1951, pp. 33–45.



索　引

五 画

六 画

七 画

九　画

十 一 画

十 二 画

其　它



［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝数学物理方法 １
作者＝（德）柯朗，（德）希尔伯特著
页数＝４５７
出版社＝北京市：科学出版社
出版日期＝２０１１．０６
ＳＳ号＝１２８１２１３９
ＤＸ号＝０００００８１３０９１１
ＵＲＬ＝ｈｔｔｐ：／／ｂｏｏｋ．ｓｚｄｎｅｔ．ｏｒｇ．ｃｎ／ｂｏｏｋＤｅｔａｉｌ．ｊｓｐ？ｄｘＮｕｍｂｅｒ＝００００
０８１３０９１１＆ｄ＝Ｃ８Ａ０６ＡＥ６ＢＢ１７５０３３３ＤＥＢＢＢＦ８０５１Ｄ３７９４